صفحات 439

خواص مادہ

اردو

سید محمد یحییٰ بی۔ اے (عثمانیہ) ... بی ایس سی آنرز (لندن)

سید عبدالرحمن بی۔ اے (عثمانیہ)

شعبہ طبیعیات جامعہ عثمانیہ

حیدرآباد دکن

[illegible] پریس نظام شاہی روڈ حیدرآباد دکن

دیباچہ

ہندوستانی جامعات میں پاس یا آنرس ڈگری کی تعلیم پانیوالے ایسے طلبا کیلئے یہ کتاب لکھی گئی ہے جو احصاء تفرقی اور تکملی کے سادہ اصول سے کسیقدر واقف ہوں۔ ریاضی کے ذریعہ جہاں کہیں بھی تفہیم کی ضرورت تھی وہاں طلبا کی ذہنوں کا لحاظ کرتے ہوئے تفصیلی طور پر بحث کیگئی ہے تاکہ دیگر نظری کتب کی محتاجی باقی نہ رہے۔ مادّہ سے متعلق مظاہر کی تجربی تفصیلات پر کافی روشنی ڈالی گئی ہے۔ امید کیجاتی ہے کہ اس اہم مضمون میں دلچسپی رکھنے والے طلبا اس کتاب کو خاص طور پر کارآمد پائیں گے۔

یہ کتاب ایک حد تک ان لکچروں کے باعث معرض وجود میں آئی جو خواص مادّہ پر جامعہ عثمانیہ میں وقتاً فوقتاً طیلسانین کی جماعتوں کو دئے گئے۔ اس کی تدوین میں مختلف معیاری کتب اور رسائل سے کافی مدد لیگئی ہے جنکا حوالہ ہر باب کے اختتام پر اعداد کے ذریعہ دیا گیا ہے۔ رائل کالج آف سائنس لندن کے بعض مشاہیر طبیعیات کے ہم رہین منت ہیں جن کے لکچروں کے بغیر اس کتاب کا پایۂ تکمیل کو پہنچنا شاید ممکن نہ ہوتا۔

عام طور پر انٹرمیڈیٹ کی جماعتوں میں جو ابتدائی امور بتائے جاتے ہیں انکو اس کتاب میں درج نہیں کیا گیا ہے۔ صرف اہم مضامین مثلاً جمود کا معیار اثر، نظریۂ اہتزاز، جاذبیت، لچک، سطحی تناؤ، لزوجیت، نفوذ اور نظریۂ تحرک وغیرہ سے اسمیں تفصیلی بحث کیگئی ہے۔ کتاب کے آخر میں اسمی اشاریہ اور ساتھ ہی ساتھ اردو اور اسکے معادل انگریزی اصطلاحات کی ایک مکمل فہرست بھی شامل کیگئی ہے اور توقع کی جاتی ہے کہ اس سے طلباء کو مضمون کے سمجھنے میں سہولت ہوگی۔

شعبۂ طبیعیات جامعہ عثمانیہ

حیدرآباد دکن

اگست ۱۹۳۵ء

سید محمد علیخاں
سید عبدالرحمن

فہرست مضامین

"غلطنامہ"

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۴	۱۱	افقی خط	خط
۶	۲۳	لا فزلا	لا۴ فزلا
۱۲	۱۶	قر	فر
۴۱	۱۸	پھسلواں	ڈھلکنے والا
۴۷	۳	کا وزن	کی کمیت
۵۴(الف)	۷	(1928)	(1924)
۵۴(الف)	۵	Master	Matter
۶۳	۱۵	ریچرز	ریشارڈز
۱۱۳	۱۱	لٹکا	ٹکیا
۱۱۸	۳	(۳۱)	(۳۹)
۱۱۸	۵	(۱۰)	(۴۰)
۱۴۲	۱۰	تجتیوں	تختیوں
۱۴۹	۱۵	۱۴	۹۴
۱۸۰	۱۲	زنگن	رونٹگن
۱۹۳	۱۰	مازنگوتی	میزنگونی
۲۱۸	۲۰	سائکلائڈ	تدویرنما
۲۱۴(الف)	۱۴	(2893)	(1893)

پہلا باب

ابعاد۔ رسم الطریق اور جمود کا معیار اثر

ابعاد:۔ س۔ گ۔ ث نظام میں رقبہ اور حجم کی اکائیاں علی الترتیب (سم)^{2} اور (سم)^{3} ہوتی ہیں۔ اگر ایک میٹر طول کو ہم معیاری قرار دیں تو رقبہ اور حجم کی اکائیاں بھی بالترتیب (میٹر)^{2} اور (میٹر)^{3} ہوں گی۔ یعنی معمولی اکائیوں سے رقبہ (۱۰۰ سم)^{2} اور حجم (۱۰۰ سم)^{3} گنا بڑا ہوگا۔ اس صورت میں طول کے رقوم میں رقبہ اور حجم کے ابعاد علی الترتیب ۲ اور ۳ کہلائیں گے۔ اسی طرح جب کوئی ماخوذ اکائی کسی بنیادی اکائی کے ن ویں نسب نما پر مبنی ہو تو ایسی ماخوذ اکائی بنیادی اکائیوں میں ن ابعاد کی ہوگی۔

رفتار کے ابعاد حسب ذیل طریقہ سے معلوم کئے جاتے ہیں:۔

رفتار = $\frac{\text{طول}}{\text{وقت}}$ = طول^{1} × وقت$^{-1}$ یعنی ۱ طول اور -۱ وقت اسراع کے ابعاد دریافت کرنے ہوں تو چونکہ اسراع = $\frac{\text{رفتار}}{\text{وقت}}$ اس لئے اس کے ابعاد ۱ طول اور -۲ وقت ہونگے۔

علیٰ ہذا القیاس معیار حرکت = کمیت × رفتار، اسلئے اسکے ابعاد ۱ کمیت، ۱ طول اور -۱ وقت ہونگے۔

چونکہ قوت = کمیت × اسراع لہذا قوت کے ابعاد ۱ کمیت ۱ طول اور -۲ وقت ہونگے۔ اسی طرح حجم، رقبہ، کام وغیرہ کے ابعاد حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

مختلف اکائیوں کے ابعاد حسب ذیل ہیں:۔

	طول	کمیت	وقت
رفتار	۱	صفر	-۱
اسراع	۱	صفر	-۲
معیار حرکت	۱	۱	-۱
رقبہ	۲	صفر	صفر
حجم	۳	صفر	صفر
کثافت	-۳	۱	صفر
قوت	۱	۱	-۲
کام یا توانائی	۲	۱	-۲
کثافت اضافی	صفر	صفر	صفر
دباؤ	-۱	۱	-۲
سطحی تناؤ	صفر	۱	-۲
لزوجیت	-۱	۱	-۱
ینگ کا معیار لچک	-۱	۱	-۲

ان ابعاد کے ذریعہ ہم بہت سے سوالات حل کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر ان کی مدد سے ہم سادہ رقاص کا ضابطہ اخذ کرینگے۔

یہ ہم جانتے ہیں کہ رقاص کا وقت دوران و، رقاص کے طول ل، اسراع بوجہ جاذبۂ زمین ج اور رقاص کی کمیت ک پر منحصر ہے۔ فرض کرو کہ $و = م\,ل^{ا}\,ج^{ب}\,ک^{ف}$ .... (۱)

جہاں م، ا، ب اور ف دریافت طلب اعداد ہیں۔

اس مساوات کو صحیح ہونے کے لئے داہنی جانب کے ابعاد، بائیں جانب کے ابعاد کے مساوی ہونے چاہئیں۔ و کے ابعاد ۱ وقت، صفر طول اور صفر کمیت ہیں، ل کے ابعاد ۱ طول اور ج چونکہ اسراع ہے اسکے ابعاد ۱ طول، -۲ وقت ہیں اور ک کے ابعاد ۱ کمیت ہے۔

لہذا $م\,ل^{ا}\,ج^{ب}\,ک^{ف}$ میں ا + ب طول ابعاد ہیں، -۲ ب وقت کے ابعاد اور ف کمیت کے،

لہذا

$$\left.\begin{array}{l} ا + ب = صفر \\ -۲ب = ۱ \\ ف = صفر \end{array}\right\}$$ تاکہ مساوات (۱) صحیح ثابت ہو

$\therefore$ ا = $\frac{۱}{۲}$، ب = $-\frac{۱}{۲}$ اور ف = صفر

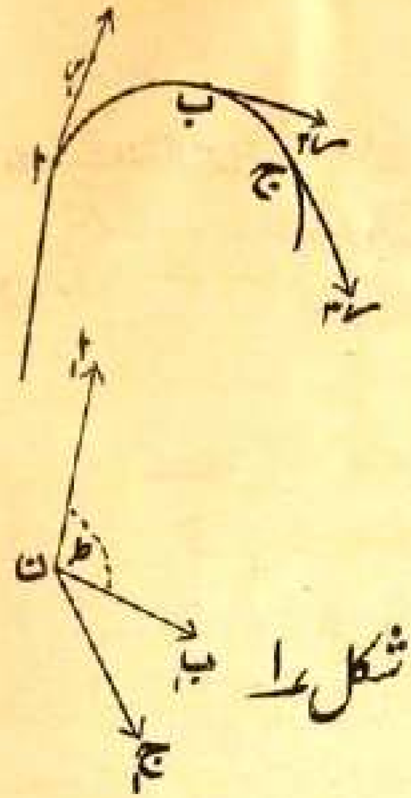
$\therefore$ $و = م\,ل^{\frac{۱}{۲}}\,ج^{-\frac{۱}{۲}}$ یعنی $و = م\sqrt{\frac{ل}{ج}}$ یہاں م مستقل

م کی قیمت تجربہ سے معلوم کی گئی اور جب زاویہ اہتزاز چھوٹا ہو تو یہ مساوی ہوتی ہے ۲ π کے

اسلئے $و = ۲\pi\sqrt{\frac{ل}{ج}}$

اسی طرح ہم دوسرے سوالات بھی حل کر سکتے ہیں۔

رسم الطریق فرض کرو کہ ایک ذرہ ق منحنی ا ب ج پر اس طرح حرکت کر رہا ہے کہ اسکی رفتار ا پر س۱، نقطہ ب پر س۲ اور ج پر س۳ وغیرہ ہے۔



شکل ۱

کوئی نقطہ ن لیکر ن ا۱، ن ب۱، ن ج۱ ایسے خطوط کھینچو جو بالترتیب ا سا۱، ب سا۲ اور ج سا۳ کے متوازی بھی ہوں اور سا۱، سا۲، سا۳ کی تعبیر بھی کریں۔ اب اگر ا۱، ب۱، ج۱ نقطوں کو ایک منحنی کے ذریعہ ملایا جائے تو یہ منحنی ق کی حرکت کا رسم الطریق کہلائے گا۔ اگر ق ایک خط مستقیم پر یکساں رفتار سے حرکت کرے تو ق کی حرکت کا رسم الطریق ایک نقطہ ہوگا۔ اگر ق یکساں رفتار سے حرکت نہ کرے تو ایسی صورت میں ق کی حرکت کا رسم الطریق ایک افقی خط مستقیم ہوگا۔

فرض کرو کہ شکل ۱ میں ا اور ب دونوں نقطے ایکدوسرے کے بالکل قریب واقع ہیں۔ تب رسم الطریق میں ا۱ اور ب۱ بھی بہت قریب واقع ہونگے۔ فرض کرو کہ ق نقطہ ا سے ب تک و وقت میں حرکت کرتا ہے۔

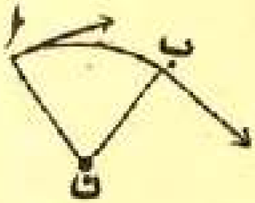
جبکہ ق منحنی ا ب ج .... پر سے گزرتا ہے اس وقت یہ تصور کرو کہ ایک ذرہ ق۱ رسم الطریق ا۱ ب۱ ج۱ .... پر سے بھی گزر رہا ہے۔ تب ق۱، ا۱ سے ب۱ تک و وقت میں پہنچے گا۔ یعنی ق۱ کی رفتار = ا۱ب۱/و

فرض کرو کہ زاویہ ا۱ ن ب۱ = ظ، اب چونکہ ن ا۱، ق کی رفتار کی تعبیر کرتا ہے ا پر، اور نقطہ ب پر ق کی رفتار کی تعبیر ن ب۱ سے ہوتی ہے اس لئے ق کے ا سے ب تک جانے میں رفتار میں جو تبدیلی واقع ہوئی اس کی تعبیر ا۱ ب۱ سے ہوگی۔

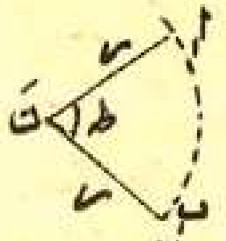
یعنی ق کی تبدیلی رفتار = ا۱ ب۱ اور چونکہ یہ و وقت میں ہوئی اس لئے ق کی شرح تبدیلی رفتار = ا۱ب۱/و = ق کے اسراع کے

یا دوسرے الفاظ میں ق کا اسراع = رسم الطریق میں قَ کی رفتار کے

یکساں دائری حرکت:- فرض کرو کہ ایک نقطہ ق یکساں رفتار سے دائرہ کے محیط پر حرکت کر رہا ہے اور دائرہ کا مرکز ن اور نصف قطر ص ہے۔



اوپر کے بیان کے مطابق اگر اس کا رسم الطریق کھینچا جائے تو ق کی رفتار ہر وقت نصف قطر کے علی القوائم ہوگی۔ اسلئے نَ ا، اور نَ ب، ن ا اور ن ب کے علی القوائم ہوں گے۔



اور زاویہ ا ن ب = زاویہ اَ نَ ب، = ط

فرض کرو کہ ق کو ا سے ب تک جانے کے لئے جو وقت صرف ہوا وہ و کے مساوی ہے

شکل ۲

ن ب س = ا ب / و = ص ط / و

رسم الطریق میں ذرہ قَ کی رفتار = ا، ب، / و = س ط / و

اسلئے ق کا اسراع = قَ کی رفتار = س ط / و = س ط س / ص ط = س² / ص اور یہ

ہمیشہ دائرہ کے مرکز کی جانب عمل کرتا ہے چونکہ نصف قطر کے علی القوائم ہے۔

اور نیز چونکہ دائرہ کا محیط = ۲ π ص اس لئے ق اس دائرہ کا پورا چکر وقت ۲π ص / س میں لگاتا ہے۔ ایک پوری گردش میں ق جو زاویہ طے کرتا ہے = ۲ π، لہذا ایک پورے چکر کا وقت = ۲π / ω جہاں ω = ذرہ ق کی زاویئی رفتار۔

∴ ۲π ص / س = ۲π / ω

∴ س = ص ω یعنی ق کا اسراع = س² / ص = ص ω²

اگر کسی ذرہ کی کمیت ک ہو اور وہ یکساں رفتار کے ساتھ دائرہ میں حرکت

کرے تو جو قوت اسکے مرکز پر عمل کرے گی وہ $\frac{\text{ک سا}^{۲}}{\text{ص}}$ یا ک ص کلا^{۲} کے مساوی ہوگی۔

اگر دھاگے کے ایک سرے سے کوئی پتھر باندھا جائے اور دوسرے سرے کو انگلی سے باندھ کر پتھر کو یکساں رفتار سے دائرے کی شکل میں گھمایا جائے تو انگلی پر جو قوت دھاگے کی سمت میں عمل کریگی $= \frac{\text{ک سا}^{۲}}{\text{ص}} =$ ک ص کلا^{۲}

جمود کا معیار اثر:۔ فرض کرو کہ ہم ایک سلاخ کو مختلف چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں میں جن کی کمیت ک$_{۱}$، ک$_{۲}$، ک$_{۳}$ .... وغیرہ ہے تقسیم کرتے ہیں اور ان کا فاصلہ کسی ایک سرے سے ص$_{۱}$، ص$_{۲}$، ص$_{۳}$ .... وغیرہ ہے۔ تب ک$_{۱}$ ص$_{۱}^{۲}$، ک$_{۲}$ ص$_{۲}^{۲}$، ک$_{۳}$ ص$_{۳}^{۲}$ .... وغیرہ ان ٹکڑوں کے جمود کا معیار اثر علی الترتیب اس سرے کے گرد ہوگا اور چنانچہ "Σ ک ص^{۲}" اس سلاخ کے جمود کا معیار اثر اس کے ایک سرے کے گرد کہلاتا ہے۔ فرض کرو کہ شکل نمبر ۳ میں ا ب ایک سلاخ ہے جس کا طول ل اور کمیت م ہے۔ اس سلاخ کو اگر چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کیا جائے تو ان میں سے ایک چھوٹا ٹکڑا (فرض کرو) فرلا ایسا ہے جو سرے ا سے لا فاصلہ پر ہے۔ اگر اکائی طول کی کمیت ک ہو تو اس چھوٹے ٹکڑے کی کمیت = ک فرلا



شکل نمبر ۳

لہٰذا اس ٹکڑے کے جمود کا معیار اثر = ک فرلا لا^{۲}

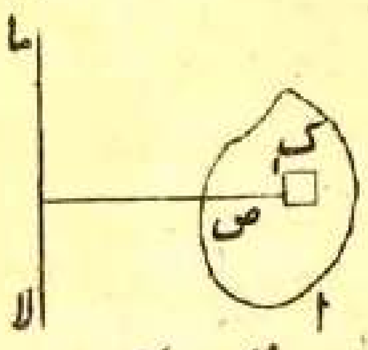
اگر پوری سلاخ کے جمود کا معیار اثر اسکے ایک سرے کے گرد مج سے تعبیر کیا جائے تو مج = ک $\int_{\text{صفر}}^{\text{ل}}$ فرلا لا^{۲} = ک $\frac{\text{ل}^{۳}}{۳}$ لیکن ک ل = م

$\therefore$ مج = $\frac{\text{م ل}^{۲}}{۳}$ بشرطیکہ سلاخ یکساں ہو۔

اسی طرح اس سلاخ کے جمود کا معیار اثر اسکے مرکز کے گرد = ک $\int_{\text{صفر}}^{\text{ل}/۲}$ لا^{۲} فرلا

$$= \frac{\text{ک ل}^{۲}}{۲۱} = \frac{\text{م ل}^{۲}}{۲۴}$$

لیکن یہ صرف آدھی سلاخ کا جمودی معیار اثر ہے۔ لہذا
پوری سلاخ کے جمود کا معیار اثر اسکے مرکز کے گرد = $\frac{\text{م ل}^{۲}}{۱۲}$



شکل ۴

فرض کرو کہ شکل ۴ میں ا ایک ایسا جسم ہے جسکی کمیت م ہے اور لا ما کوئی ایک خط ہے۔ اگر اس جسم کو چھوٹے چھوٹے حصوں میں تقسیم کیا جائے جن کی کمیت $\text{ک}_{۱}$، $\text{ک}_{۲}$، $\text{ک}_{۳}$، $\text{ک}_{۴}$ ...... وغیرہ ہو اور ان کا فاصلہ لا ما سے بالترتیب $\text{ص}_{۱}$، $\text{ص}_{۲}$، $\text{ص}_{۳}$ ... . وغیرہ ہو۔

تو $\text{ک}_{۱}\,\text{ص}_{۱}^{۲} + \text{ک}_{۲}\,\text{ص}_{۲}^{۲} + \text{ک}_{۳}\,\text{ص}_{۳}^{۲} + ...$ کو خط لا ما کے گرد جسم ا کے جمود کا معیار اثر کہتے ہیں۔ اگر اس کو مج سے تعبیر کیا جائے تو

$$\text{مج} = \sum \text{ک ص}^{۲}$$

اب فرض کرو کہ $\sum \text{ک ص}^{۲} = \text{م ف}^{۲}$

جہاں $\text{م} = \text{ک}_{۱} + \text{ک}_{۲} + \text{ک}_{۳} + ... = \sum \text{ک}$

اور $\text{ف}^{۲} = \sum \text{ص}^{۲}$

اس ف کو گردشی نصف قطر سے تعبیر کیا جاتا ہے یعنی $\text{مج} = \text{م ف}^{۲}$

علی القوائم محوروں کا اصول:۔ فرض کرو کسی پترے کے جمود کے معیار اثر ایسے دو محوروں کے گرد جو ایکدوسرے کے علی القوائم ہیں، مج اور مج سے تعبیر کئے جاتے ہیں اور خود یہ محور پترے کے مستوی میں ہیں۔ اگر اس پترے کے جمود کا معیار اثر ایک ایسے خط کے گرد جو اُن دونوں محوروں کے نقطۂ تقاطع میں سے گزرتا ہے اور اس پترے کے مستوی کے علی القوائم ہے مج ہو تو

مج = مج + مج



شکل ۵

فرض کرو کہ شکل ۵ میں ن لا اور ن ما ایسے دو محور ہیں جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔ ق ایک ٹکڑا ہے جس کی کمیت ک ہے اور اسکا فاصلہ ان محوروں سے لا اور ما ہے اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ ق کا فاصلہ ایک ایسے محور سے جو ن میں سے گزرتا ہے اور مستوی ما ن لا کے علی القوائم ہے = ق

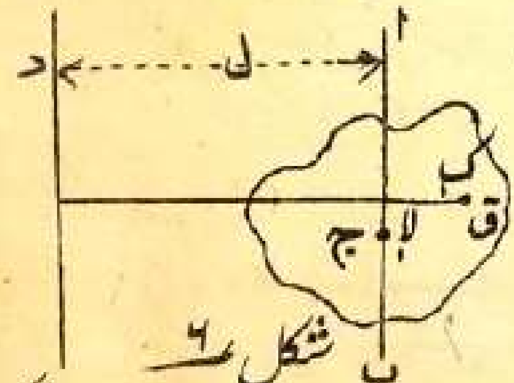
تب مج = ∑ ک ق

= ∑ ک (لا + ما)

= ∑ ک لا + ∑ ک ما

= مج + مج

متوازی محوروں کا اصول:— کسی پترے کے جمود کا معیار اثر ایسے محور کے گرد جو پترے کے مستوی میں واقع ہو = اس محور کے متوازی اور پترے کے مرکز کمیت میں سے گزرنے والے کسی دوسرے محور کے گرد والے جمود کے معیار اثر کے + م لٓ جہاں م = پترے کی کمیت اور ل = دونوں محوروں کے درمیان فاصلہ۔



شکل ۶

فرض کرو شکل ۶ میں د دَ ایک ایسا محور ہے جو پترے کے مستوی میں ہے اور ۲ ب ایک دوسرا محور

ایسا ہے جو د دَ کے متوازی بھی ہے اور پترے کے مرکز کمیت ج میں سے گزر
بھی رہا ہے۔ اس پترے میں کوئی ایک چھوٹا سا ٹکڑا ق تصور کرو۔ اب اگر
اُس چھوٹے سے ٹکڑے ق کی کمیت جس کا فاصلہ ا ب سے لا ہے، ک
فرض کی جائے۔ (ان ٹکڑوں کے فاصلوں کی علامتیں ا ب کے دائیں یا
بائیں جانب ہونے کے لحاظ سے بالترتیب مثبت یا منفی لی جائیں گی۔)

تو اس ٹکڑے کے جمود کا معیار اثر د دَ کے گرد = ک (لا + ل)²

= ک (لا² + ل² + ۲ لا ل)

= ک لا² + ک ل² + ۲ لا ل ک

فرض کرو کہ د دَ اور ا ب کے گرد جمود کا اثری معیار مج اور مج علی الترتیب ہیں تب

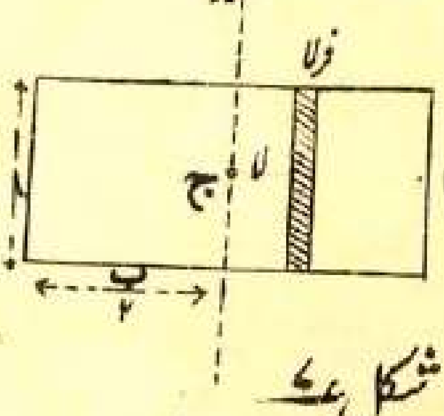
مج = Σ ک (لا + ل)²

= Σ ک لا² + Σ ک ل² + ۲ Σ ک لا ل

= مج + Σ ک ل² + صفر

= مج + م ل² (چونکہ Σ ک لا = صفر یعنی پترے کو کسی دھاری دار کنارے کے ذریعہ ا ب محور پر لٹکایا جائے تو توازن میں رہے گا یا دیگر الفاظ میں ک لا کی نفی علامتیں اتنی ہی ہوں گی جتنی کہ مثبت علامتیں)

(ا) ایک مستطیل کے جمود کا معیار اثر (جس کے ضلعے ا اور ب ہیں) ایسے محور کے گرد جو ا کے متوازی ہو اور مستطیل کے مرکز میں سے گزر رہا ہو:—



شکل ۶

فرض کرو کہ مستطیل کی کمیت = م

اس مستطیل کو فرلا کے مانند چھوٹی چھوٹی دھجیوں میں تقسیم کرو اور ایک چھوٹی فرلا دھجی پر غور کرو جس کا فاصلہ محور سے فرض کرو = لا (دیکھو شکل ۶)

اس دھجی کی کمیت = فرلا م / ب

اور اسکے جمود کا معیار اثر اُس محور کے گرد $= \frac{\text{م}\ \text{فرلا}}{\text{ب}} \cdot \text{لا}^{۲}$

$\therefore$ مستطیل کے جمود کا معیار اثر اُس محور کے گرد $= ۲ \int_{\text{صفر}}^{\frac{\text{ب}}{۲}} \frac{\text{م}\ \text{فرلا}\ \text{لا}^{۲}}{\text{ب}}$

$$= ۲ \frac{\text{م}}{\text{ب}} \left[\frac{\text{لا}^{۳}}{۳}\right]_{\text{صفر}}^{\frac{\text{ب}}{۲}}$$

$$= \text{م} \cdot \frac{\text{ب}^{۲}}{۱۲}$$

اگر ا چھوٹا ہو یعنی مستطیل کے بجائے جسم کی شکل ایک سلاخ کی سی ہو جہاں ب = ل = سلاخ کا طول تو ایسی سلاخ کے جمود کا معیار اثر مرکز کے گرد

$$= \frac{\text{م}\ \text{ل}^{۲}}{۱۲}$$

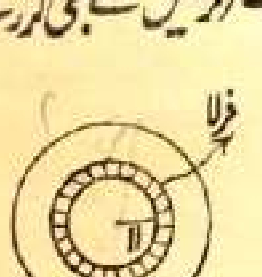
اگر دہی محور ب کے متوازی ہو تو اسی محور کے گرد مستطیل کے جمود کا معیار اثر

$$= \frac{\text{م}\ \text{ا}^{۲}}{۱۲}$$

(۲) مذکورۂ بالا مستطیل کے جمود کا معیار اثر ایسے محور کے گرد جو مستطیل کے مستوی کے علی القوائم ہو اور مستطیل کے مرکز میں سے بھی گزر رہا ہو:۔

علی القوائم محوروں کے اصول سے :۔ $\frac{\text{م}\ \text{ا}^{۲}}{۱۲} + \frac{\text{م}\ \text{ب}^{۲}}{۱۲} = \frac{\text{م}(\text{ا}^{۲}+\text{ب}^{۲})}{۱۲}$

(۳) ایک قرص کے جمود کا معیار اثر ایسے محور کے گرد جو قرص کے مرکز میں سے بھی گزرے اور اسکے مستوی کے علی القوائم بھی ہو۔



شکل ۸

فرض کرو کہ قرص کی کمیت = م اور اسکا نصف قطر = ص

اب قرص کے ایک ایسے چھوٹے حلقہ پر غور کرو جس کا نصف قطر لا اور عرض فرلا ہے اس حلقہ کا رقبہ $= ۲\pi$ لا فرلا اور اس کی کمیت $= \frac{۲\text{م}\ \pi\ \text{لا}\ \text{فرلا}}{\pi\ \text{ص}^{۲}}$

اسکے جمود کا معیار اثر ایک ایسے محور کے گرد جو اس کے مرکز میں سے گزر رہا ہو اور اسکے مستوی کے بھی علی القوائم ہو $= \frac{۲\pi\ \text{لا}\ \text{فرلا}\ \text{م}}{\pi\ \text{ص}^{۲}} \cdot \text{لا}^{۲}$

لہذا پورے قرص کیلئے مج $= \int_{صفر}^{ص/۲} \frac{۲\pi\, لا\, فرلا\, م\, لا^۲}{\frac{\pi}{۴} ص^۲}$

$= \frac{۸م}{ص^۲}\int_{صفر}^{ص/۲} لا^۳\, فرلا$

$= \frac{م\, ص^۲}{۸}$

(۴) مذکورۂ بالا قرص کے جمود کا معیار اثر اسکے قطر کے گرد :—

فرض کرو کہ قرص کے جمود کا معیار اثر اسکے قطر کے گرد = $مج'$ اور وہی مج

= قرص کے جمود کا معیار اثر قطر کے علی القوائم قطر کے گرد'

تو علی القوائم محوروں کے اصول سے :—

$مج' + مج' = \frac{م\, ص^۲}{۸}$

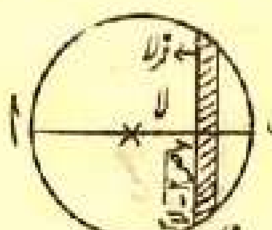
یعنی $مج' = \frac{م\, ص^۲}{۱۶}$

(۵) مذکورہ بالا قرص کے جمود کا معیار اثر اس کے مماس کے گرد :— اس صورت میں محور مرکز سے $\frac{ص}{۲}$ فاصلہ پر ہے اس لئے متوازی محوروں کے اصول سے

جمود کا معیار اثر مماس کے گرد = مج فرض کرو

$= مج' + م\, (\frac{ص}{۲})^۲ = \frac{م\, ص^۲}{۱۶} + \frac{م\, ص^۲}{۴}$

$= \frac{۵}{۱۶}\, م\, ص^۲$



شکل ۹

(۶) ایک ٹھوس کرہ کے جمود کا معیار اثر اسکے کسی ایک قطر کے گرد :—

فرض کرو کہ کرہ کی کمیت = م اور اسکا نصف قطر = ص

تب اسکے اکائی حجم کی کمیت $= \frac{۳ م}{۴\pi ص^۳}$

اس کرہ میں سے ایک پتلی دائری ٹکیہ تراش لو جس کا فاصلہ مرکز سے = لا اور جس کا عرض = فرلا تب اس کا نصف قطر $= \sqrt{ص^۲ - لا^۲}$ اور اسکا حجم =

$\pi\,(\text{ص}^2 - \text{لا}^2)\,\text{فرلا}$ اور اسکی کمیت $= \dfrac{\pi\,(\text{ص}^2 - \text{لا}^2)\,\text{فرلا}\ ۳\text{م}}{\frac{۴}{۳}\,\pi\,\text{ص}^3}$ اور نمبر (۳) سے اُسکے جمود کا معیار اثر کرہ کے قطر ا ب کے گرد $= \dfrac{\pi\,(\text{ص}^2 - \text{لا}^2)\,\text{فرلا}\ ۳\text{م}}{۴\,\pi\,\text{ص}^3} \times \dfrac{(\text{ص}^2 - \text{لا}^2)}{۲}$

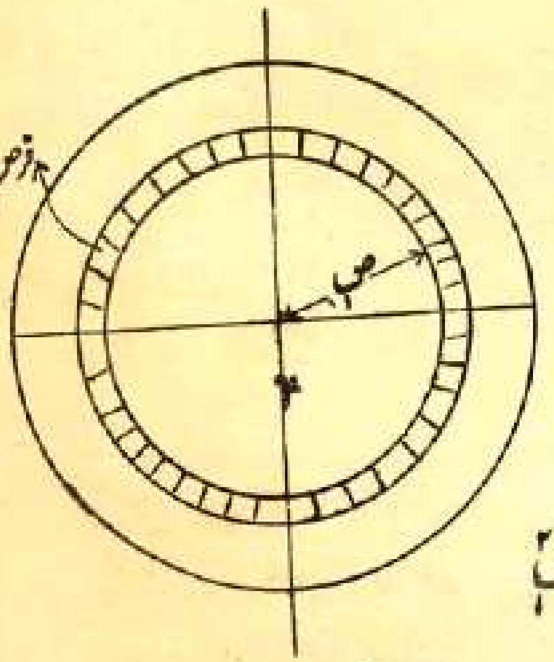
اب کرہ کے جمود کا معیار اثر ا ب کے گرد یعنی $\text{مج}^{(5)} = \dfrac{۲\times۳\ \pi\ ۳\text{م}}{۸\ \pi\ ۴\,\text{ص}^3} \int_{\text{صفر}}^{\text{ص}} (\text{ص}^2 - \text{لا}^2)^2\,\text{فرلا}$

$$= \frac{۳\text{م}}{۴\,\text{ص}^3} \int_{\text{صفر}}^{\text{ص}} (\text{ص}^4 - ۲\,\text{ص}^2\,\text{لا}^2 + \text{لا}^4)\,\text{فرلا}$$

$$= \frac{۳\text{م}}{۴\,\text{ص}^3} \times \frac{۸\,\text{ص}^5}{۱۵} = \frac{۲}{۵}\,\text{م}\,\text{ص}^2$$

(۷) ایک ٹھوس کرہ کے جمود کا معیار اثر اسکے قطب کے گرد:-

فرض کرو کہ اس کرہ میں ایک خول ایسا لیا جاتا ہے جس کا فاصلہ مرکز سے ص_1 ہے اور موٹائی فرص_1 ہے (شکل نمبر ۱۰)



شکل نمبر ۱۰

اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ اس کرہ کی کمیت فی اکائی حجم ک اور نصف قطر ص ہے۔ اس خول کے جمود کا معیار اثر قطب کے گرد

$$= ۴\,\pi\,\text{ص}_1^2\ \text{فرص}_1\ \text{ک}\ \frac{۲}{۳}\,\text{ص}_1^2$$

لہذا پورے کرہ کے جمود کا معیار اثر مج قطب کے گرد

$$= \int_{\text{صفر}}^{\text{ص}} ۴\,\pi\,\text{ص}_1^2\ \text{فرص}_1\ \text{ک}\ \text{ص}_1^2$$

$$= ۴\,\pi\,\text{ک} \int_{\text{صفر}}^{\text{ص}} \text{ص}_1^4\ \text{فرص}_1$$

$$= \frac{۴}{۵}\,\pi\,\text{ک}\,\text{ص}^5$$

لیکن پورے کرہ کی کمیت $= \text{م} = \frac{۴}{۳}\,\pi\,\text{ص}^3\,.\,\text{ک}$

$$\therefore \text{ک} = \frac{۳}{۴}\,\text{م} \times \frac{۱}{\pi\,\text{ص}^{۳}}$$

$$\therefore \text{مج} = \frac{۴}{۵}\,\pi \times \frac{۳}{۴}\,\text{م} \times \frac{۱}{\pi\,\text{ص}^{۳}} \times \text{ص}^{۵}$$

$$= \frac{۳}{۵}\,\text{م ص}^{۲}$$

(۸) اسی کرہ کے جمود کا معیار اثر اسکے مماس کے گرد:-

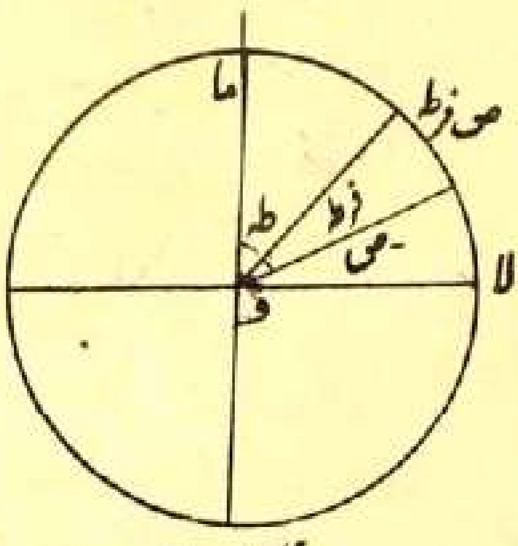
اگر $\text{مج}_{۱}$ = جمود کا معیار اثر مماس کے گرد تو متوازی محوروں کے اصول سے

$$\text{مج}_{۱} = \text{مج} + \text{م ص}^{۲} = \frac{۲}{۵}\,\text{م ص}^{۲} + \text{م ص}^{۲} = \frac{۷}{۵}\,\text{م ص}^{۲}$$

(۹) تار کے حلقہ کا جمود کا معیار اثر ایسے محور کے گرد جو اسکے مرکز میں سے گزرتا ہو اور حلقہ کے مستوی کے علی القوائم ہو:-

فرض کرو کہ اس حلقہ کا نصف قطر ص اور ک کمیت فی اکائی طول ہے۔

فرض کرو کہ اس تار کو چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کیا جاتا ہے جن میں سے ایک چھوٹا سا ٹکڑا ایسا لیا جاتا ہے جو مرکز پر فرطہ زاویہ بناتا ہے۔ (دیکھو شکل ۱۱)



شکل ۱۱

تب اس چھوٹے ٹکڑے کی کمیت

$= \text{ک ص فرطہ}$

$\therefore$ اس کے جمود کا معیار اثر اس محور کے گرد $= \text{ک ص فرطہ ص}^{۲}$

$$\therefore \text{پورے حلقہ کے جمود کا معیار اثر اس محور کے گرد} = \int_{\text{صفر}}^{۲\pi} \text{ک ص}^{۳}\,\text{فرطہ}$$

$$= ۲\,\pi\,\text{ک ص}^{۳}$$

لیکن اس پورے حلقہ کی کمیت = م

$$= ۲\,\pi\,\text{ص ک}$$

∴ حلقہ کے جمود کا معیار اثر = مج (۲) = ۲ π ص³ . م / ۲ π ص = م ص²

اگر حلقہ کے جمود کے معیار اثر کو ایسے محور کے گرد جو حلقہ کے مستوی میں ہو اور اسکے مرکز میں سے گزرتا ہو ہم مج فرض کریں تو علی القوائم محوروں کے اصول سے

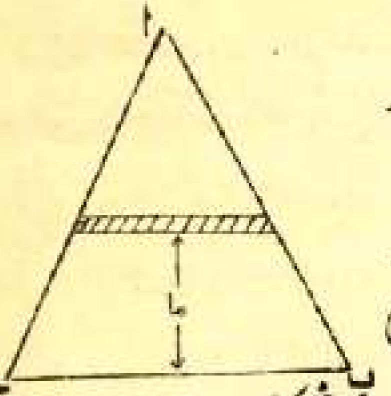
۲ مج = مج = ک ص²

∴ مج = ک/۲ ص²

(۱۰) ایک مثلث نما ا ب ج تختی کا جمودی معیار اثر ب ج کے گرد:-

فرض کرو کہ اس تختی کی کمیت = م

اور اس عمود کا طول جو ا سے ب ج پر کھینچا جائے = د۔ ب ج سے ما فاصلہ پر اور اس کے متوازی ایک چھوٹی دھجی تصور کرو جس کی موٹائی "فرما" ہے (شکل ۱۲)



شکل ۱۲

تب اس دھجی کا طول = (د ـ ما) ف / د

جہاں ف = ب ج

∴ اس دھجی کا رقبہ = (د ـ ما) ف فرما / د یعنی اسکی کمیت = ۲م (د ـ ما) ف فرما / ف د²

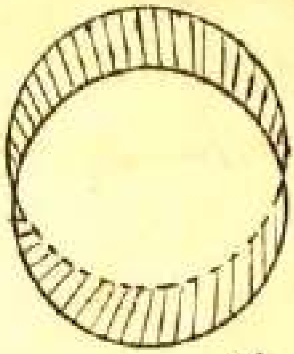
∴ اُسکے جمود کا معیار اثر ب ج کے گرد = ۲م (د ـ ما) ف ما² فرما / ف د²

اسی طرح اور دھجیاں تصور کرو اور اُن سب کے جمود کا معیار اثر = اُس مثلث کے جمودی معیار اثر کے ب ج کے گرد = مج (۳) = ∫ (صفر سے د) ۲م (د ـ ما) ف ما² فرما / ف د²

= م د² / ۶

مثال:- ایک ٹھوس حلقہ کی تراش مستطیلی وضع کی ہے اور اسکے اضلاع ایک ایسے محور کے متوازی اور علی القوائم ہیں جو حلقہ کے مرکز میں سے گزر رہا ہے اور حلقہ کے مستوی کے علی القوائم ہے۔ ثابت کرو کہ اس محور کے گرد حلقہ کے گردشی نصف قطر کا مربع = ۱/۲ (ا² + ب²) جہاں ا اور ب حلقہ کے اندرونی اور بیرونی نصف قطر ہیں۔

حل :- حلقہ کی موٹائی = ب - ا



شکل ۱۳

فرض کرو کہ اسکے اکائی رقبہ کی کمیت = ک
حلقہ میں ایک چھوٹی سی دیجی یا تصور کرو جس کا
نصف قطر = ص اور جس کی موٹائی = ؤص
تب اس کی کمیت = ۲ π ص ؤص ک
اور اس کے جمود کا معیار اثر ایسے محور کے گرد جو حلقہ
کے مرکز میں سے گزر رہا ہے اور حلقہ کے مستوی کے علی القوائم ہے =

$$۲\pi ص \cdot ؤص\, ک \cdot ص^{۲}$$

∴ پورے حلقہ کا جمود کا معیار اثر اس محور کے گرد

$$= \int_{ا}^{ب} ۲\pi ص\, ؤص\, ک\, ص^{۲}$$

$$= ۲\pi ک \left[\frac{ص^{۴}}{۴}\right]_{ا}^{ب}$$

$$= ۲\pi ک \left(\frac{ب^{۴}}{۴} - \frac{ا^{۴}}{۴}\right)$$

$$= م ف^{۲}$$

جہاں م اس پورے حلقہ کی کمیت اور ف اسکا گردشی نصف قطر ہے
لیکن پورے حلقہ کی کمیت $م = \int_{ا}^{ب} ۲\pi ص\, ؤص\, ک$

$$= ۲\pi ک \left(\frac{ب^{۲}}{۲} - \frac{ا^{۲}}{۲}\right)$$

$$\therefore ۲\pi ک \left(\frac{ب^{۴}}{۴} - \frac{ا^{۴}}{۴}\right) = م ف^{۲} = ف^{۲}\, ۲\pi ک \left(\frac{ب^{۲}}{۲} - \frac{ا^{۲}}{۲}\right)$$

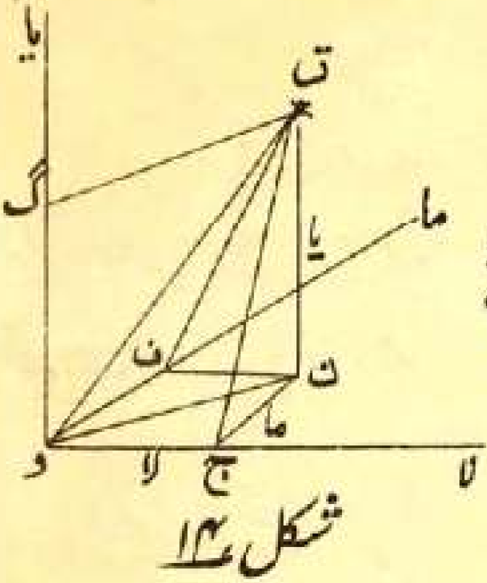
$$\therefore ف^{۲} = \frac{\frac{ب^{۴}}{۴} - \frac{ا^{۴}}{۴}}{\frac{ب^{۲}}{۲} - \frac{ا^{۲}}{۲}} = \frac{۱}{۲}(ب^{۲} + ا^{۲})$$

علی القوائم محوروں کا اصول (تین العادی صورت):۔

شکل ۱۴۱ میں فرض کرو کہ مج، مج اور مج، جمود کا اثری معیار ہیں کوئی تین ایسے محوروں ولا، وما، اور ویا کے گرد ہیں جو آپس میں ایک دوسرے پر علی القوائم ہیں۔ فرض کرو کہ ک کمیت کا ایک ذرہ ق پر واقع ہے جس کے محدد (لا، ما، یا) ہیں یعنی

ق ن = یا، ج ن = ما اور ج و = لا

ق گ، ق ج، اور ق ف بالترتیب ویا، ولا اور وما پر عمود کھینچو۔



شکل ۱۴۱

تب مج = ∑ک ق ج²

= ∑ک (ما² + یا²)

مج = ∑ک ق ف² = ∑ک (لا² + یا²)

مج = ∑ک ق گ² = ∑ک ون² = ∑ک (لا² + ما²)

اگر مج، مبدء و کے گرد جمود کا معیار اثر ہو تو :۔

مج = ∑ک ق و² = ∑ک (لا² + ما² + یا²)

∴ مج + مج + مج = ۲ مج (۵)

یہ ایک نہایت اہم اصول ہے جس کی مدد سے اکثر سوالات حل کئے جا سکتے ہیں۔ مندرجہ ذیل دو صورتوں سے اس اصول کے اطلاق کی توضیح ہوگی:۔

(۱۱) ایک پتلے کھوکھلے کرہ کے جمود کا معیار اثر اس کے قطب کے گرد :۔ کسی پتلے کھوکھلے کرہ کے تمام حصے مرکز و سے مساوی فاصلوں پر ہوتے ہیں لہذا

مج = م ص²

جہاں م = کرہ کی کمیت اور ص = اس کا نصف قطر

(۱۲) اسی کرہ کے جمود کا معیار اثر اس کے قطر کے گرد :۔ جمود کا معیار اثر قطر کے

گرد = $مج_{ا} = مج_{ما} = مج_{یا}$ فرض کرو۔

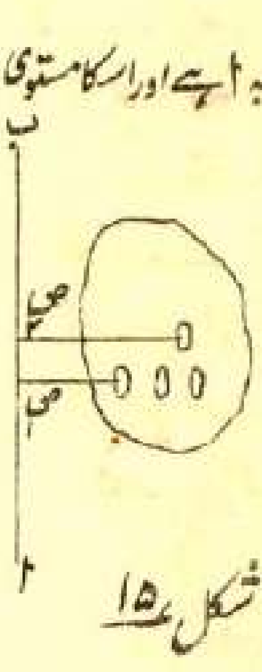
لہٰذا اوپر کی مساوات سے :- $۳\ مج_{ا} = ۲\ مج_{و} = ۲\ م\ ص^{۲}$

$\therefore\ مج_{ا} = \frac{۲}{۳}\ م\ ص^{۲}$ ۔

اسی طرح اس کرہ کے جمود کا معیار اثر اس کے مماس کے گرد = $مج_{۲}$ (فرض کرو) = $مج_{ا} + م\ ص^{۲} = \frac{۵}{۳}\ م\ ص^{۲}$

قطبی جمود کا معیار اثر یا سطحی جمود کا معیار اثر

فرض کرو کہ شکل نمبر ۱۵ میں جو جسم دکھایا گیا ہے اس کا رقبہ ا ہے اور اسکا مستوی اس کاغذ کے مستوی کے علی القوائم ہے۔



شکل نمبر ۱۵

اب ہم اسکا قطبی جمود کا معیار اثر محور ا ب کے گرد جو کاغذ کے مستوی میں ہے دریافت کرینگے۔

اس کے رقبہ کو چھوٹے چھوٹے رقبوں $ا_{۱}$، $ا_{۲}$، $ا_{۳}$ ...... وغیرہ میں تقسیم کرو اور فرض کرو کہ انکا فاصلہ محور سے $ص_{۱}$، $ص_{۲}$، $ص_{۳}$ .... وغیرہ ہے۔

اسکے قطبی جمود کے معیار اثر کو $مج$ سے تعبیر کیا جائے تو

$$مج = \sum ا\ ص^{۲} = ا_{۱} ص_{۱}^{۲} + ا_{۲} ص_{۲}^{۲} + \cdots\cdots$$

$= ا\ ف^{۲}$ جہاں ف = اسکا گردشی نصف قطر

یہ بالکل اسی طرح ہے جیسا کہ پہلے حاصل کیا گیا تھا لیکن یہاں کمیت کے بجائے رقبہ لیا گیا ہے۔

فرض کرو کہ شکل نمبر ۱۶ میں جو قرص دکھایا گیا ہے اسکا نصف قطر ص ہے اسکے قطبی جمود کا معیار اثر ایک ایسے محور کے گرد معلوم کریں گے جو جسم کے مرکز

میں سے گزرتا ہے اور اس کے مستوی کے علی القوائم ہے۔ اسکے مرکز سے اس کو چھوٹے چھوٹے حلقوں میں تقسیم کرو۔



شکل ۱۶

فرض کرو کہ مرکز سے ایک چھوٹے حلقہ کا فاصلہ = ص۱ اور اسکا عرض = فرص۱

اس ٹکڑے کے قطبی جمود کا معیار اثر اس محور کے گرد = 2π ص۱ فرص۱ . ص۱^2

∴ پورے قرص کے جمود کا معیار اثر مج = $\int_{\text{صفر}}^{\text{ص}}$ 2π ص۱ فرص۱ . ص۱^2

$$= \frac{\pi\, ص^4}{2} = \pi\, ص^2 \times \frac{ص^2}{2}$$

یہ نتیجہ بھی بالکل وہی ہے جو پہلے حاصل کیا گیا تھا لیکن یہاں بجائے قرص کی کمیت کے اسکا رقبہ π ص^2 لیا گیا ہے۔

اگر اسکے جمود کا معیار اثر مج۱ ایسے محور کے گرد جو مرکز میں سے گزرتا ہو اور اسکے مستوی میں ہو تو علی القوائم محوروں کے اصول سے

$$2\, مج_1 = مج = \frac{\pi\, ص^4}{2}$$

$$\therefore مج_1 = \frac{\pi\, ص^4}{4} = \pi\, ص^2 \times \frac{ص^2}{4}$$

یعنی اس صورت میں اسکا گردشی نصف قطر = $\frac{ص^2}{4}$

یہ نتیجہ بھی پہلے کی طرح ہے لیکن فرق صرف اتنا ہے کہ کمیت کے بجائے رقبہ لیا جائے۔



شکل ۱۷

فرض کرو کہ شکل ۱۷ میں جو سلاخ دکھائی گئی ہے اسکا طول ل ہے ہم پہلے دریافت کر چکے ہیں کہ اسکے جمود کا معیار اثر مرکز کے گرد = $\frac{م\, ل^2}{12}$

اگر سلاخ کا عرض ب ہو اور گہرائی د، تو اس کے سرے کی جانب سے دیکھنے سے اسکے قطبی جمود کا معیار اثر مرکز کے گرد = رقبہ × (گردشی نصف قطر)^2

لیکن اسکا رقبہ = ب د اور (گردشی نصف قطر)^2 = $\frac{\text{د}^2}{12}$

∴ اسکا قطبی جمودی معیار اثر مرکز کے گرد = $\frac{\text{ب د}^3}{12}$

اگر اوپر سے لیا جائے تو مرکز کے گرد سطحی یا قطبی جمودی معیار اثر = $\frac{\text{د ل}^3}{12}$

اور اگر سامنے سے لیں تو اسکے مرکز کے گرد سطحی یا قطبی جمود کا معیار اثر

= $\frac{\text{ل ب}^3}{12}$

Chapter I.

(۱) Properties of Matter "Wagstaff" P65 (1924)
(۲) ,, ,, ,, ,, P69 (1924)
(۳) Statics "Lamb" ________ P162 (1924)
(۴) ,, ,, ________ P162 (1924)
(۵) Properties of Matter "Newman & Searle" P23 (1928)

دوسرا باب

نظریۂ اہتزاز

توانائی بالفعل :- فرض کرو کہ ایک جسم دائری وضع میں ایسے محور کے گرد گھومتا ہے جو اس کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔ اس جسم میں ایک ایسا ذرہ ق تصور کرو جس کا فاصلہ مرکز سے لا_1 ہو اور اس کی کمیت ک_1 کے مساوی ہو۔

فرض کرو کہ دوران گردش میں ذرہ کسی ایک بالکل چھوٹے وقفہ فرو میں فاصلہ فرس طے کرتا ہے۔

$$\text{تو قوت} = \text{ک}_1 \frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرو}^2} = \frac{\text{فر}}{\text{فرو}}\left(\text{ک}_1 \frac{\text{لا}_1\,\text{فرط}}{\text{فرو}}\right)$$



$$\text{اس کی قوت کا معیار اثر} = \frac{\text{فر}}{\text{فرو}}\left(\text{ک}_1 \frac{\text{لا}_1^2\,\text{فرط}}{\text{فرو}}\right)$$

لہذا اُس کُل جسم کے لئے جبکہ وہ گردش کر رہا ہے تمام

شکل ع۱

$$\text{قوتوں کا معیار اثر} = \text{جفت}$$

$$= \text{ثہ} \quad (\text{فرض کرو})$$

$$= \frac{\text{فر}^2\text{ط}}{\text{فرو}^2} \sum \text{ک}_1 \text{لا}_1^2$$

$$= \text{مج}\,\text{سفف} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

جہاں مج = جمود کا معیار اثر اسکے مرکز کے گرد اور سفف = زاوئی اسراع

$$\text{اس ذرہ کی توانائی بالفعل} = \frac{1}{2}\,\text{ک}_1 \left(\frac{\text{فر س}_1}{\text{فر و}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{ک}_1 \left(\frac{\text{لا}_1\,\text{فر طہ}}{\text{فر و}}\right)^2$$

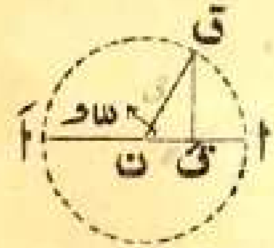
$$\text{لہذا اس پورے جسم کی توانائی بالفعل} = \Sigma\,\frac{1}{2}\,\text{ک}_1\,\text{لا}_1^2 \left(\frac{\text{فر طہ}}{\text{فر و}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{بج سلا}^2$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{م فا}^2\,\text{سلا}^2 \quad \text{.........} \quad (۲)$$

جہاں م اس جسم کی کمیت ہے۔ ف اسکا گردشی نصف قطر ہے اور سلا زاوئی رفتار۔

سادہ موسیقی حرکت:۔ فرض کرو کہ ذرہ ق یکساں زاوئی رفتار سے ایک دائرہ کے محیط پر حرکت کر رہا ہے۔



شکل ۲

شکل ۲ میں دائرہ کا کوئی قطر ا اَ لو اور ق سے ایک خط ق قَ کھینچو جو خط ا اَ کے علی القوائم ہو۔ نقطہ قَ، قطر ا اَ پر ق کا ظِل کہلاتا ہے۔ ن دائرہ کا مرکز ہے۔

ق جب دائرہ کے محیط پر چکر لگائیگا تو نقطہ قَ ا اَ پر ن کے دائیں اور بائیں جانب حرکت کرے گا۔ اس نقطہ قَ کی حرکت اگر ایسی ہو کہ اسکا نقل مکان قَ ن (اسی ہی راستہ پر) اس کے اسراع کے متناسب ہو اور اسراع ہمیشہ مرکز کی طرف عمل کرے تو قَ کی ایسی حرکت سادہ موسیقی حرکت کہلاتی ہے۔

فرض کرو کہ ق کی یکساں زاوئی رفتار سلا ہے۔ و ثانیوں کے بعد وہ زاویہ سلا و طے کریگا۔ فرض کرو کہ قَ ن = لا تو لا = ص جم سلا و

جہاں ص = دائرہ کا نصف قطر

لہذا قَ کا نقل مکان = لا = ص جم کلا و

اسلئے قَ کی رفتار = $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}}$ = لآ فرض کرو = — ص کلا جب کلا و

اور قَ کا اسراع = $\frac{\text{فرلآ}}{\text{فرو}}$ = لآ فرض کرو = — ص کلا^۲ جم کلا و

∴ اسراع = لآ = — لا کلا^۲ = — لا لہ   جہاں لہ = کلا^۲

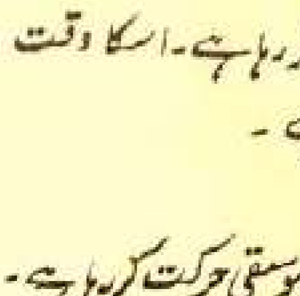
یعنی اگر زاوی رفتار یکساں ہو تو اسراع نقل مکان کے متناسب ہے۔

اور اگر زاوئی رفتار مستقل ہو تو کلا = $\frac{۲\pi}{و}$ جہاں و = ق یا قَ کا وقت دوران۔

یعنے و = $\frac{۲\pi}{\text{کلا}}$ = $\frac{۲\pi}{\sqrt{\text{لہ}}}$ .... (۳)

مثلاً اگر کسی سوال کے حل کرتے ہیں لآ = — لا لہ کی طرح کی مساوات آجائے تو یہ تصور کیا جائے گا کہ ذرہ سادہ موسیقی حرکت کر رہا ہے۔ اسکا وقت دوران و = $\frac{۲\pi}{\sqrt{\text{لہ}}}$ آسانی سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

مثال کے طور پر ایک سادہ رقاص پر غور کرو جو سادہ موسیقی حرکت کر رہا ہے۔ فرض کرو کہ شکل ۳ میں ب ن ایک رقاص ہے جس کی کمیت ک اور طول ل ہے۔ فرض کرو کہ رقاص حالت سکون سے کسی ایک وقت میں زاویہ عہ بناتا ہے رقاص کا وزن ک ج نیچے کی جانب عمل کرے گا اور دوسری قوت تناؤ کی ہوگی جو ڈوری کے سمت میں عمل کرے گی۔ اب چونکہ ب ٹ، ب ن کے علی القوائم ہے، اس لئے ب ٹ کی سمت میں جو قوت عمل کرے گی وہ = ک ج جب عہ



شکل ۳

جہاں، ج = اسراع بوجہ جاذبہ زمین

اسلئے ب ٹ کی سمت میں عمل کرنیوالا اسراع = ج جب عہ

= ج عہ اگر عہ بہت چھوٹا ہو

لہذا اسراع = لاً = ج عہ = $\frac{ج\ لا}{ل}$ جہاں لا = ب بَ = نقل مکان

اب چونکہ یہ سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے۔

∴ وقت دوران $و = ۲\pi \sqrt{\frac{ل}{ج}}$ .... (۴)

یہ ضابطہ اسی وقت صحیح ہے جبکہ عہ بہت چھوٹا ہو

صحیح ضابطہ حسب ذیل ہے :-

$$و = ۲\pi \sqrt{\frac{ل}{ج}} \left(1 + \frac{عہ^۲}{۱۶}\right)$$

جہاں عہ = اہتزاز کا آدھا زاویہ، اس مساوات کو برنولی نے ۱۷۴۷ء میں ثابت کیا۔

مرکب رقاص :- شکل ۴ میں ایک مرکب رقاص دکھایا گیا ہے جس کا وزن ک ج ہے جو نیچے کی جانب عمل کر رہا ہے۔ فرض کرو کہ اس کا مرکز جاذبہ جؔ ہے اور ن اسکا مرکز اہتزاز ہے۔ فرض کرو کہ دھاریدار کنارے اور مرکز جاذبہ کے درمیان فاصلہ = ل

جب یہ رقاص حرکت کریگا تو جفت

= قوت × عمودی فاصلہ

= ک ج ل جب عہ

جہاں عہ = انتصابی سمت اور ن نَ کے درمیان زاویہ



لیکن ہمیں یہ معلوم ہے کہ جفت = $ج\ \frac{ف^۲ عہ}{ف و^۲}$

شکل ۴

جہاں مج = جمود کا معیار اثر ایسے محور کے گرد جو ن میں سے گزرتا ہے، اور جو کاغذ کے مستوی کے علی القوائم ہے۔

$$\therefore \text{مج} \frac{\text{فر}^2 \text{عہ}}{\text{فرو}^2} = -\text{ک ج ل}_1 \text{ جب عہ}$$

$$= -\text{ک ج ل}_1 \text{ عہ} \quad (\text{اگر عہ چھوٹا ہو})$$

$$\text{یعنی } \frac{\text{فر}^2 \text{عہ}}{\text{فرو}^2} = \text{زاویائی اسراع} = -\frac{\text{ک ج ل}_1 \text{عہ}}{\text{مج}} = -\frac{\text{ک ج ل}_1 \text{عہ}}{\text{ک ف}^2}$$

جہاں ف = اسکا گردشی نصف قطر اسی محور کے گرد

یہ ایک سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے۔ لہذا اس کا وقت

$$\text{دوران و} = 2\pi \sqrt{\frac{\text{ف}^2}{\text{ج ل}_1}} \quad \text{.........} \quad (5)$$

اگر سادہ رقاص اور اسکا وقت دوران مساوی ہو تو مساوات (۴) اور (۵) سے سادہ رقاص کا طول ل = $\frac{\text{ف}^2}{\text{ل}_1}$ متوازی محوروں کے اصول سے چونکہ کسی محور پر ایک رقاص کے جمود کا معیار اثر = اس محور کے متوازی محور کے جمود کے معیار اثر کے جو مرکز جاذبہ میں گزر رہا ہو + ک ل_1^2 جہاں ل_1 = ن جَ = دونوں محوروں کے درمیان فاصلہ

$$\therefore \text{ک ف}^2 = \text{ک ط}^2 + \text{ک ل}_1^2 \quad \text{یعنی ف}^2 = \text{ط}^2 + \text{ل}_1^2$$

جہاں ط = گردشی نصف قطر ایسے محور کے گرد، جو جَ میں سے گزر رہا ہے اور جو کاغذ کے مستوی کے علی القوائم ہے۔

$$\text{لہذا مرکب رقاص کے لئے ضابطہ و} = 2\pi \sqrt{\frac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_1 \text{ج}}} \quad \text{.........} \quad (6)$$

اگر مرکز اہتزاز ن، جَ سے منطبق ہو جائے تو ل_1 = صفر یعنی اس صورت میں وقت دوران لامتناہی ہو جاتا ہے۔

و کی قیمت اقل ہونے کی شرط یہ ہے کہ $\frac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_1}$ اقل ہونا چاہیئے۔

یعنی $\frac{ل_1^2 - 2ل_1 ط + 2ل_1 ط + ط^2}{ل_1}$ یا $\frac{(ل_1 - ط)^2 + 2ل_1 ط}{ل_1}$ کی قیمت

اقل ہونی چاہیے یا $ل_1 = ط$ ہونا چاہیے۔

∴ اقل وقت دوران $و_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2ط}{ج}}$ .... (۷)

فرض کرو کہ اوپر کی شکل ۲۴ میں مرکز اہتزاز $\bar{ن}$ ایسا لیا جاتا ہے کہ

$ن\bar{ن} \times ن ج = \bar{ن}^2 = ط^2 + \bar{ن ج}^2$

یعنی $ن ج (ن\bar{ن} - ن ج) = ط^2$

یا $ن ج \times \bar{ن} ج = ط^2$ .... (۸)

فرض کرو کہ بجائے ن مرکز اہتزاز کے $\bar{\bar{ن}}$ ایسا لیا گیا ہے کہ

$\bar{\bar{ن}} \bar{ن} \times \bar{ن} ج = \bar{ن}^2 = ط^2 + \bar{ن ج}^2$

لیکن اسی طریقہ سے $\bar{ن} ج \times \bar{\bar{ن}} ج = ط^2$ یعنی $\bar{\bar{ن}} ج = ن ج$

یعنی ن اور $\bar{\bar{ن}}$ ایکدوسرے پر منطبق ہو جاتے ہیں۔

اب جبکہ ن مرکز اہتزاز ہے مرکب رقاص کا ضابطہ :-

$و = 2\pi\sqrt{\frac{ل_1^2 + ط^2}{ل ج}}$

$\therefore ل_1^2 - \frac{ج و^2}{4\pi^2} ل_1 + ط^2 = صفر$

$\therefore ل_1 = \frac{ج و^2}{8\pi^2} \pm \sqrt{\frac{ج^2 و^4}{64\pi^4} - ط^2}$

$= گ_1 + گ_2$ یا $گ_1 - گ_2$ فرض کرو

یعنی $ل_1$ کی دو قیمتیں ہیں جہاں کہ وقت دوران کی قیمتیں ایک ہوتی ہیں۔ اور ہر دونوں قیمتیں مرکز جاذبہ کے ایک جانب ہیں۔ اسی طرح اگر رقاص کو اولٹ دیا جائے تو ہم کو اور دو قیمتیں حاصل ہوں گی پس اس سے ظاہر ہوا کہ $ل_1$ کی

چار قیمتیں ہیں (دو مرکز جاذبہ کے ایک جانب اور دو دوسری جانب) جہاں پر وقت دوران کی قیمتیں مساوی ہوتی ہیں اور ل کی پہلی اور تیسری قیمتیں اور دوسری اور چوتھی قیمتیں آپس میں علی الترتیب مساوی ہوتی ہیں۔

اب فرض کرو کہ سادہ رقاص کا طول = ن نَ

ظاہر ہے کہ سادہ رقاص کا وقت دوران، مرکب رقاص کے وقت دوران کے مساوی ہوگا اس قسم کے سادہ رقاص کو جس کا طول $ل = \frac{ل_{۱}^{۲} + ط^{۲}}{ل_{۱}}$ ہو معادل سادہ رقاص کہتے ہیں۔

اس وجہ سے کہ $و = ۲\pi \sqrt{\frac{ل}{ج}} = ۲\pi \sqrt{\frac{ل_{۱}^{۲} + ط^{۲}}{ل_{۱}\, ج}}$ (۹)

فرض کرو کہ نَ مرکز اہتزاز ہے تب نَ ج = ل - ل، اگر اس صورت میں وقت دوران وَ فرض کیا جائے تو $وَ = ۲\pi \sqrt{\frac{(ل - ل_{۱})^{۲} + ط^{۲}}{(ل - ل_{۱})\, ج}}$

لیکن مساوات (۹) سے $ل - ل_{۱} = \frac{ط^{۲}}{ل_{۱}}$

$$\therefore \quad وَ = ۲\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{ط^{۲}}{ل_{۱}}\right)^{۲} + ط^{۲}}{\frac{ط^{۲}}{ل_{۱}}\, ج}} = ۲\pi \sqrt{\frac{ل_{۱}^{۲} + ط^{۲}}{ل_{۱}\, ج}}$$

$\therefore$ و = وَ یعنے وقت دوران ن اور نَ پر مساوی ہے۔

ان مساواتوں کی تصدیق کرنے کے لئے ذیل کا تجربہ کیا جاتا ہے:-



شکل ۵

شکل ۵ میں لوہے کی ا میٹر لمبی اور ۳ سمر چوڑی ایک مستطیلی سلاخ دکھلائی گئی ہے، اس کو مختلف نقطوں پر سوراخوں کے ذریعہ جو دو دو سمر کے فاصلہ پر سلاخ کے طول میں بنے ہوئے ہوتے ہیں ایک دھاردار

کنارے سے لٹکایا جا سکتا ہے۔

تجربہ میں باری باری سے سلاخ کو ہر دوسرے سوراخ کے ذریعہ لٹکا کر ہر ایک کا وقت دوران دریافت کرو۔ سلاخ کے مرکز جاذبہ کا فاصلہ ہر ایسے سوراخ سے دریافت کرو جہاں پر سلاخ لٹکائی جاتی ہے۔ سلاخ کا مرکز جاذبہ آسانی سے سلاخ کو دھار یدار کنارے پر توازن میں لانے سے معلوم ہو سکتا ہے۔ و کی مختلف قیمتوں کو مرکز جاذبہ اور سوراخوں کے درمیانی فاصلے کی متناظر قیمتوں کے مقابلہ میں مرتسم کرو۔ ⓶

ایک ایسا منحنی حاصل ہوگا جو شکل نمبر ۶ میں دکھایا گیا ہے دونوں منحنیوں کے مماس ل م اور لَ مَ کھینچو

چونکہ ان دونوں نقاط م اور مَ پر وقت دوران اقل ہیں۔

لہذا ح م = ح مَ

= ل، = ط

اور چونکہ اقل وقت دوران

= ح ج = و



شکل نمبر ۶

لہذا مساوات (۷) سے ج کی قیمت دریافت کی جا سکتی ہے۔

دوران تجربہ میں اقل وقت دوران و کے قریبی نقطوں کی قیمتیں بڑی احتیاط سے متعدد دفعہ تقریبی مقام کے ہر ایک جانب لی جائیں۔ اگر ج کی قیمت

معلوم ہو تو ط کی قیمت دریافت کی جا سکتی ہے اور جمود کے معیار اثر (مج) کی قیمت ایک ایسے محور کے گرد جو مرکز جاذبہ میں سے گزرے، صرف سلاخ کو تول کر دریافت کی جا سکتی ہے۔

کیونکہ مج = م ط^2 جہاں م = سلاخ کی کمیت

لا محور کے متوازی ایک خط د ف ب ا ع کھینچو، د، ف، ا، اور ع پر وقت دوران و کی قیمت ایک ہی ہے اور ب ج کے مساوی ہے۔ چونکہ

ف ب = ب ا اور ب د = ب ع۔

لہذا مساوات (۸) سے ب د × ب ا = ب ع × ب ف = ط^2

لہذا معادل سادہ رقاص کا طول ل = (ب د^2 + (ب د × ب ا)) / ب د

= ب د (ب د + ب ا) / ب د = ب د + ب ا

∴ ل = ب د + ب ا = ب ع + ب ف .... (۱۰)

لہذا مساوات (۴) سے ج کی قیمت دریافت کی جا سکتی ہے۔

مثال (الف) ایک میٹری سلاخ (ب) ۴۰ سم قطر کا ایک قرص، بطور رقاص علیحدہ علیحدہ لٹکائے گئے ہیں ان دونوں کے نقاط تعلیق کے ایسے مقام دریافت کرو جہاں ہر ایک کا وقت دوران اقل ہو۔

(الف) اقل وقت دوران کی شرط یہ ہے کہ ل$_1$ = ط

لیکن سلاخ کے جمود کا معیار اثر اس کے مرکز کے گرد = م ل^2 / ۱۲

= م ط^2 جہاں م سلاخ کی کمیت کو اور ل اسکے طول کو تعبیر کرتا ہے۔

∴ ط = √(ل^2 / ۱۲) = √((۱۰۰)^2 / ۱۲) = ل$_1$

∴ ل$_1$ = ۲۸٫۲۸ سم، یعنی سلاخ کے مرکز جاذبہ سے نقطہ تعلیق کا فاصلہ ۲۸٫۲۸ سم ہونا چاہیئے تاکہ وقت دوران اقل ہو۔

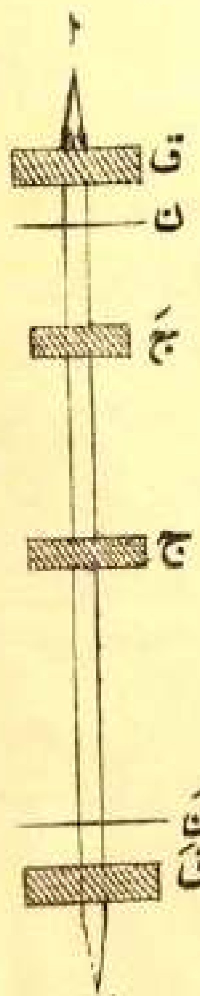
(ب) قرص کا جمودی معیار اثر مرکز کے گرد = $\frac{\text{م ص}^{2}}{\text{۲}}$

جہاں ص = قرص کا نصف قطر اور م = قرص کی کمیت

$\therefore$ ل = ط = $\sqrt{\frac{\text{ص}^{2}}{\text{۲}}} = \sqrt{\frac{\text{۲۰}^{2}}{\text{۲}}}$ = ۱۴٫۱۴ سم

یعنی قرص کے مرکز سے ۱۴٫۱۴ سم کے فاصلہ پر نقطہ تعلیق کو ہونا چاہیئے کہ اس کا وقت دوران اقل ہو

کیٹر کا رقاص :۔ شکل ۷ میں ا ب ایک فولادی سلاخ ہے اور ن اور نَ دو دھاریدار کنارے ہیں جو مرکز جاذبہ کے دونوں جانب واقع ہیں۔ ق اور قَ دو بڑے استوانے ہیں جن میں سے ایک پیتل کا ہوتا ہے اور دوسرا لکڑی کا۔ فرض کرو کہ ن اور نَ پر وقت دوران مساوی ہیں۔ اس صورت میں ن اور نَ کا درمیانی فاصلہ ایک ایسے سادہ رقاص کے طول ل کے مساوی ہوگا جسکا وقت دوران اس مرکب رقاص کے وقت دوران کے مساوی ہے۔



شکل ۷

اس رقاص کو کپتان کیٹر نے ۱۸۱۸ء میں گھڑی کے رقاص کا طول دریافت کرنے کے لئے تیار کیا تھا۔

ج ایک متحرک حلقہ ہے جس کو سلاخ پر اوپر یا نیچے ہٹایا جا سکتا ہے تاکہ وقت دوران ن اور نَ پر مساوی کئے جائیں۔

جَ ایک چھوٹا متحرک حلقہ جس کی مدد سے وقت دوران کی قیمتوں کے درمیان چھوٹے فرق کو رفع کیا جاتا ہے۔

لیکن دونوں دھاریدار کناروں پر وقت دوران کی قیمتوں کو مساوی حاصل کرنا آسان نہیں۔ اس کے

لئے حسب ذیل طریقہ اختیار کیا جاتا ہے جس کو پہلی مرتبہ مِسِّل نے پیش کیا تھا اس طریقہ سے ط کی رقوم ضابطہ سے ساقط ہو جاتی ہیں۔

فرض کرو کہ جَ اور ج کے ذریعہ ت١ اور ت٢ کے وقت دوران تقریباً مساوی حاصل کر لئے گئے ہیں۔

اگر ان میں سے ایک $و_1$ اور دوسرا $و_2$ ہو تو $و_1 = 2\pi\sqrt{\frac{ط^2 + ل_1^2}{ل_1 ج}}$

اور $و_2 = 2\pi\sqrt{\frac{ط^2 + ل_2^2}{ل_2 ج}}$ دونوں مساواتوں کو مربع کرنے کے بعد

$$و_1^2 = 4\pi^2\left(\frac{ط^2 + ل_1^2}{ل_1 ج}\right) \quad \text{اور} \quad و_2^2 = 4\pi^2\left(\frac{ط^2 + ل_2^2}{ل_2 ج}\right)$$

ان دونوں ضابطوں کے ذریعہ ط کو ساقط کر دیا جائے تو

$$\frac{ج}{4\pi^2}\left(و_1^2 ل_1 - و_2^2 ل_2\right) = ل_1^2 - ل_2^2$$

$$\therefore \frac{4\pi^2}{ج} = \frac{و_1^2 ل_1 - و_2^2 ل_2}{ل_1^2 - ل_2^2} = \frac{4و_1^2 ل_1 - 4و_2^2 ل_2}{4(ل_1^2 - ل_2^2)}$$

$$= \frac{2و_1^2 ل_1 + 2و_1^2 ل_1 - 2ل_2 و_2^2 - 2ل_2 و_2^2 + 2ل_1 و_2^2 - 2ل_1 و_2^2 + 2ل_2 و_1^2 - 2ل_2 و_1^2}{2(ل_1 + ل_2)\,2(ل_1 - ل_2)}$$

$$= \frac{2و_1^2(ل_1 - ل_2) + 2و_1^2(ل_1 + ل_2) - 2و_2^2(ل_1 + ل_2) + 2و_2^2(ل_1 - ل_2)}{2(ل_1 + ل_2)\,2(ل_1 - ل_2)}$$

$$= \frac{2و_1^2}{4(ل_1 + ل_2)} + \frac{2و_1^2}{4(ل_1 - ل_2)} - \frac{2و_2^2}{4(ل_1 - ل_2)} + \frac{2و_2^2}{4(ل_1 + ل_2)}$$

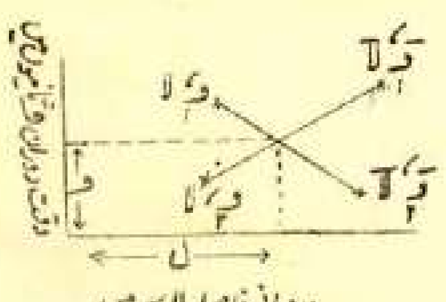
$$= \frac{و_1^2 + و_2^2}{2(ل_1+ل_2)} + \frac{و_1^2 - و_2^2}{2(ل_1-ل_2)}$$

$$یعنی \quad \frac{4\pi^2}{ج} = \frac{و_1^2 + و_2^2}{2(ل_1+ل_2)} + \frac{و_1^2 - و_2^2}{2(ل_1-ل_2)} \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

رقاص کو دو دھاریدار کناروں پر توازن میں لاکر $ل_1$ اور $ل_2$ دریافت کرنے کے بعد اس مساوات کے ذریعہ ہم ج کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔

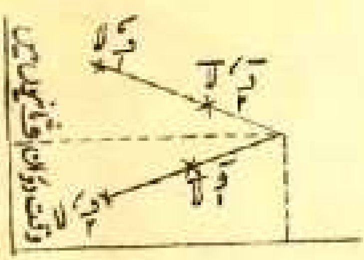
دوسرا طریقہ :- اگر ہم کو صحیح وقت دوران (جو دونوں دھاریدار کناروں پر بالکل مساوی ہونا چاہیئے) معلوم ہوجائے تو سادہ رقاص کا ضابطہ استعمال کرنے سے ہم ج کی قیمت دریافت کر سکتے ہیں:-

فرض کرو کہ $و_1$ اور $و_2$ دونوں دھاریدار کناروں ن اور نَ پر وقت دوران ہیں اور ن اور نَ کے درمیان فاصلہ لا کے مساوی ہے اور $و_1$ تقریباً $و_2$ کے مساوی ہے۔ دھاریدار کناروں کو ذرا سا ہٹاؤ اور فرض کرو کہ اب ن اور نَ پر وقت دوران کی قیمتیں جو قریب قریب مساوی ہیں، $وَ_1$ اور $وَ_2$ کے مساوی ہیں اور ان کا درمیانی فاصلہ لاَ کے مساوی ہے۔ و اور لا کے درمیان ترسیم شکل ۸ یا ۹ کے مطابق کھینچو۔



درمیانی فاصلہ لا سمر میں

شکل ۸



درمیانی فاصلہ لا سمر میں

شکل ۹

نقاط (و۲، لا) اور (و۲، لاَ) کو ملاؤ، اسی طرح (و۱، لا) اور (و۲، لاَ) کو ملاؤ نقطہ تقاطع سے صحیح وقت دوران اور صحیح طول ملجائیگا۔ اور اس سے ج کی قیمت مساوات (۴) سے معلوم کی جاسکتی ہے تجربہ میں ہوا کی مزاحمت کی وجہ سے وقت دوران میں فرق واقع ہوتا ہے یعنی اس میں کسی قدر کمی ہوتی ہے۔

دوران تجربہ میں تپش بھی مستقل ہونی چاہیئے ورنہ تپش کے بڑھنے سے رقاص کا طول بڑھ جائے گا اور اس سے وقت دوران پر اثر پڑے گا۔ تجربہ میں وہ مقام جہاں رقاص سہارا جاتا ہے مضبوطی کے ساتھ جما دینا چاہیئے ورنہ قسری ارتعاشوں کی وجہ سے وقت دوران میں فرق ہونے کا احتمال ہے۔

رقاص کی حرکت پر واسطہ کی لزوجت کا اثر صرف اتنا ہی ہوتا ہے کہ حیطۂ اہتزاز کو چھوٹا کردے، وقت دوران پر یہ اثر قابل لحاظ نہیں ہوتا۔ وقت دوران کو $\left(۱ + \frac{گ^{۲}}{۸\, ل}\right)$ سے ضرب دینے سے اسکی تصحیح ہو جاتی ہے

یعنی $و = \frac{\pi^{۲}}{ج\, ل}\left(۱ + \frac{گ^{۲}}{۸\, ل}\right)$ جہاں گ ایسی ایک رقم ہے جو لزوجت پر منحصر ہوتی ہے۔ لہذا لزوجت سے وقت دوران $۱ : ۱ + \frac{گ^{۲}}{۸\, ل}$ کی نسبت سے بڑھ جاتا ہے اور اس سے ظاہر ہے کہ و کی قیمت میں یہ بہت ہی قلیل اضافہ ہے چونکہ گ کی قیمت بالکل چھوٹی ہوتی ہے۔

عموماً کیٹر اور بورڈا کے رقاصوں میں ۲ر۱:۱ کی نسبت سے اہتزازی قوس میں کمی تقریباً ۵۰۰ ثانیوں میں واقع ہوتی ہے۔

دھاریدار کناروں کے انحنا کی تصحیح، ان کو آپس میں تبدیل کرنے کے بعد حسب معمول مشاہدات کو دوہرانے سے ہوسکتی ہے۔

طریقۂ انطباق :- کیٹر کے رقاص کے دونوں دھار یدار کناروں پر وقت دوران کی قیمتوں کو اس طرح ترتیب دو کہ یہ تقریباً مساوی ہوجائیں۔ رقاص کو دوربین سے دیکھو۔

ایک گھڑی کے ثانیہ رقاص کو برقی طریقہ سے اس طرح ترتیب دو کہ ٹیلیفون کے "وصول کنندہ" کے ذریعہ اسکی "ٹِک ٹِک" کی آواز صاف طور پر تمہیں سنائی دینے لگے۔

جس لمحہ میں کیٹر کے رقاص کا کوئی نشان زدہ نقطہ دوربین کے انتصابی صلیبی تار کے محاذی عین اسوقت پہنچے جبکہ گھڑی کی "ٹِک" ساتھ ہی سنائی دے، ٹکوں کو گننا شروع کرو۔ اس طرح متبادل ٹکوں کی آوازوں کو اتنی دیر تک گنتے جاؤ کہ کیٹر کے رقاص کے نشان زدہ نقطہ کا انتصابی صلیبی تار کے محاذی آنا ہر ٹک کی آواز کے ساتھ منطبق ہوجائے۔ اس امر کا لحاظ رکھو کہ گننے کا عمل مسلسل رہے۔ فرض کرو کہ م ویں متبادل ٹک پر ن واں انطباق ہوتا ہے۔ چونکہ ہر متبادل ٹِک کو شمار کیا گیا ہے اس وجہ سے اگر بالفرض کیٹر کے رقاص کا وقت دوران ۲ ثانیوں سے کم ہے تو رقاص ۲م ثانیوں میں (م + ن) مکمل اہتزاز کرے گا۔ اگر اس کا وقت دوران ۲ ثانیوں سے زیادہ ہے تو ۲م ثانیوں میں وہ (م - ن) مکمل اہتزاز کریگا۔
لہذا کیٹر کے رقاص کا صحیح وقت دوران $= \frac{\text{۲م}}{\text{م} \pm \text{ن}}$

اسی طرح دوسرے دھار یدار کنارہ سے وقت دوران دریافت کیا جاسکتا ہے

ہوا کی اُچھال کا اثر صرف یہ ہوتا ہے کہ اس کی وجہ سے رقاص کے جمود کے معیار اثر کی قیمت بڑھ جاتی ہے لیکن رقاص کی بیرونی شکل اس کے وسطی نقطہ کے متشاکل بنائی جائے اور مرکز سے دونوں دھار یدار کناروں کا فاصلہ مساوی ہو تو ہوا کا اثر زائل ہوجاتا ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ دونوں

مشاہدات میں ہٹائی ہوئی ہوا کی کمیت یکساں رہتی ہے۔

ان تمام تصحیحوں پر ہم تفصیل کے ساتھ یہاں بحث کریں گے :۔

زاویۂ اہتزاز کی تصحیح :۔ اس سے قبل یہ ذکر ہو چکا ہے کہ شکل نمبر ۳ اور نمبر ۴ میں زاویہ عہ بہت چھوٹا ہونا چاہیے ورنہ وقت دوران د کی قیمت میں تصحیح کی ضرورت ہوتی ہے۔ اس کے لیے شکل نمبر ۴ پر غور کرو۔ فرض کرو کہ ت وقفہ کے بعد ن ج انتصابی سمت سے جو زاویہ بناتا ہے وہ ط کے مساوی ہے، اس لمحہ میں جسم کی زاویائی رفتار = ω = $\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}}$ ج کی گہرائی ن کے نیچے ل_1 جم ط ہے۔ اسکا مطلب یہ ہے کہ مرکز جاذبہ اپنے ابتدائی مقام سے بقدر ل_1 (جم ط - جم عہ) نیچے اتر آیا ہے۔ لہذا جاذبۂ زمین سے اسپر جو کام ہوا = ک ج ل_1 (جم ط - جم عہ)

لیکن مساوات (۲) سے جسم کی توانائی بالفعل

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{مج}\,\omega^2 = \tfrac{1}{2}\,\text{ک}\,\text{ف}^2\left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}}\right)^2$$

لیکن توانائی بالفعل = کام جو کیا گیا

$$\therefore \text{ک ج ل}_1\,(\text{جم ط} - \text{جم عہ}) = \tfrac{1}{2}\,\text{ک}\,\text{ف}^2\left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}}\right)^2$$

$$\therefore \text{ف}^2\left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}}\right)^2 = 2\,\text{ج ل}_1\,(\text{جم ط} - \text{جم عہ})$$

لیکن مساوات (۵) اور (۶) سے :۔ $\text{ف}^2 = \text{ل}_1^2 + \text{ط}^2$

$$\therefore (\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2)\left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}}\right)^2 = 2\,\text{ج ل}_1\,(\text{جم ط} - \text{جم عہ})$$

اسکو تکملانے سے :۔

$$\sqrt{\frac{2\,\text{ج ل}_1}{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}}\int_{\text{صفر}}^{\text{و}/4} \text{فرت} = \int_{\text{صفر}}^{\text{عہ}} \frac{\text{فرط}}{\sqrt{\text{جم ط} - \text{جم عہ}}}$$

جہاں و وقت دوران ہے

$$\therefore \frac{\text{و}}{4}\sqrt{\frac{\text{ج ل}_1}{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}} = \int_{\text{صفر}}^{\text{عہ}} \frac{\text{فرط}}{\sqrt{\text{جب}^2\frac{\text{عہ}}{2} - \text{جب}^2\frac{\text{ط}}{2}}}$$

اب جب $\frac{\text{ط}}{۲}$ = جب $\frac{\text{ع}}{۲}$. جب فہ، رکھو جہاں فہ = کوئی خاص زاویہ (فرض کرو)

اس کو تفرقانے سے :- جم $\frac{\text{ط}}{۲}$. فر $\frac{\text{ط}}{۲}$ = جب $\frac{\text{ع}}{۲}$ جم فہ فر فہ

$$\therefore \text{فر ط} = \frac{\text{۲ جب } \frac{\text{ع}}{۲} \text{ جم فہ فر فہ}}{\text{جم } \frac{\text{ط}}{۲}} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{ا})$$

اور

$$\sqrt{\text{جب}^۲ \frac{\text{ع}}{۲} - \text{جب}^۲ \frac{\text{ط}}{۲}} = \sqrt{\text{جب}^۲ \frac{\text{ع}}{۲} (\text{۱} - \text{جب}^۲ \text{ فہ})}$$

$$= \sqrt{\text{جب}^۲ \frac{\text{ع}}{۲} \text{ جم}^۲ \text{ فہ}}$$

$$= \text{جب } \frac{\text{ع}}{۲} \text{ جم فہ} \quad \ldots\ldots (\text{ب})$$

ان مساواتوں (ا) اور (ب) کو اس تکمل میں درج کرنے سے :-

$$\frac{\text{و}}{۲} \cdot \sqrt{\frac{\text{ج ل}_۱}{\text{ل}_۱^۲ + \text{ط}^۲}} = \int_{\text{صفر}}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\text{۲ فر فہ}}{\text{جم } \frac{\text{ط}}{۲}} = \int_{\text{صفر}}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\text{۲ فر فہ}}{\sqrt{\text{۱} - \text{جب}^۲ \frac{\text{ط}}{۲}}}$$

$$= \int_{\text{صفر}}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\text{۲ فر فہ}}{\sqrt{\text{۱} - \text{جب}^۲ \frac{\text{ع}}{۲} \text{ جب}^۲ \text{ فہ}}}$$

$$\therefore \text{و} = ۴ \sqrt{\frac{\text{ل}_۱^۲ + \text{ط}^۲}{\text{ج ل}_۱}} \int_{\text{صفر}}^{\frac{\pi}{۲}} \Big(\text{۱} + \frac{۱}{۲} \text{ جب}^۲ \frac{\text{ع}}{۲} \text{ جب}^۲ \text{ فہ}$$

$$+ \frac{۳}{۸} \text{ جب}^۴ \frac{\text{ع}}{۲} \text{ جب}^۴ \text{ فہ} + \ldots\ldots \Big) \text{ فر فہ}$$

$$= ۴ \sqrt{\frac{\text{ل}_۱^۲ + \text{ط}^۲}{\text{ج ل}_۱}} \cdot \frac{\pi}{۲} \Big(\text{۱} + \frac{۱}{۴} \text{ جب}^۲ \frac{\text{ع}}{۲} + \frac{۹}{۶۴} \text{ جب}^۴ \frac{\text{ع}}{۲} + \ldots\Big)$$

$$= ۲\pi\sqrt{\frac{\text{ل}_1^2+\text{ط}^2}{\text{ج ل}_1}}\left(۱+\frac{۱}{۴}\,\text{جب}^2\,\frac{\text{ع}}{۲}\right)$$

اگر ع بہت چھوٹا ہو تو

$$\text{و} = ۲\pi\sqrt{\frac{\text{ل}_1^2+\text{ط}^2}{\text{ج ل}_1}}\left(۱+\frac{\text{ع}^2}{۱۶}\right)$$

ہَوا کی تصحیح :- چونکہ رقاص بجائے خلا کے ہوا میں اہتزاز کرتا ہے اسلئے ہوا کی وجہ سے جو اثرات مرتب ہوتے ہیں ان کی تصحیح ضروری ہے۔ نیوٹن کے خیال کے مطابق کیٹر نے صرف اوچھال کے اثر کو ملحوظ رکھا جس کی وجہ سے رقاص کے وزن میں کسی قدر کمی واقع ہوتی ہے۔ ہوا اور رقاص کے حاصل جفت کو مدنظر رکھ کر اس نے حسب ذیل مساوات فرض کی :-

$$\frac{\text{ز}^2\text{ع}}{\text{ز و}^2} = \frac{(\text{ک} - \text{کَ})\,\text{ج ل}_1\,\text{ع}}{\text{ک}\,(\text{ل}_1^2+\text{ط}^2)}$$

جہاں کَ = ہَوا کی کمیت جو رقاص سے ہٹائی جاتی ہے
یہ ایک سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے۔

$$\therefore \text{وقت دوران و} = ۲\pi\sqrt{\frac{(\text{ل}_1^2+\text{ط}^2)\,\text{ک}}{\text{ج ل}_1\,(\text{ک}-\text{کَ})}}$$

$$= ۲\pi\sqrt{\frac{\text{ل}_1^2+\text{ط}^2}{\text{ج ل}_1\left(۱-\frac{\text{کَ}}{\text{ک}}\right)}}$$

کَ کی قیمت کرے کی تپش پر ہوا کی کثافت اور رقاص کے حجم سے معلوم کی جا سکتی ہے۔

اس صورت میں سادہ معادل رقاص کا طول = $\dfrac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_1\left(1 - \dfrac{\text{کَ}}{\text{ک}}\right)}$

بَس نے یہ دکھلایا کہ ہوا کا اثر اور زیادہ پیچیدہ ہوتا ہے کہ حاصل اسراع پیدا کرنے والی قوت نہ صرف رقاص پر عمل کرتی ہے بلکہ واسطہ کے ملے ہوئے حصوں پر بھی اسکا اثر پڑتا ہے اور اس کی وجہ سے توانائی کی مساوات کا ہر حصہ متاثر ہوتا ہے۔

لہذا اس صورت میں توانائی کی مساوات حسب ذیل ہو جاتی ہے :۔

$$\frac{1}{2}\text{ک}(\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2)\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^2 = \text{ک ج ل}_1\ \text{جم ط} + \text{گ}$$

جہاں گ ہوا کی صورت میں ایک مستقل ہے یہ فرض کرتے ہوئے کہ جسم کی بیرونی شکل اور رفتار کی وجہ سے گ میں جو کمی واقع ہوتی ہے وہ نظر انداز کئے جانے کے قابل ہے۔

ظاہر ہے کہ ہوا کے ہر متحرک ذرہ میں توانائی بالفعل پیدا ہوتی ہے۔ اگر کسی ایک ذرہ کی کمیت فرکَ اور اسکی رفتار سَ ہو تو واسطہ کے متاثرہ حصہ کی توانائی بالفعل $= \frac{1}{2}\int \text{فرکَ} . \text{سَ}^2$

لہذا اس مساوات کے داہنی جانب میں جو رقاص کی توانائی بالفعل کو تعبیر کرتی ہے، اتنی مقدار کا اضافہ ہونا چاہیئے۔

مساوات کے بائیں جانب میں ۲ کَ ج س جم ط کے مساوی کمی کرنا ہوگا جہاں س رقاص کے مرکز تعلیق اور ہٹائی ہوئی ہوا کے مرکز جاذبہ کے درمیان فاصلہ ہے۔

$$\therefore \text{ک}(\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2)\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^2 + \int \text{فرکَ}\ \text{سَ}^2 =$$

= ۲ ج (ک ل₁ - کَ س) جم ط + گ₁ جہاں گ₁

= ۲ گ فرض کرو

تکمل ∫ سا² فرکَ کی قیمت دریافت نہیں کی گئی ہے لیکن ہم یہ فرض کرسکتے ہیں کہ رقاص جب حرکت کرتا ہے تو ہوا کا ہر ذرہ بھی حرکت کرتا ہے جسکی وجہ سے رفتار سا (فرط/فرت) کے متناسب ہوتی ہے اور ذرہ کے مقام اور جسم کی شکل پر منحصر ہوتی ہے۔

∴ ∫ سا² فرکَ = کَ ھ (فرط/فرت)² جہاں ھ ایک مستقل ہے۔

∴ (فرط/فرت)² ک {ل₁² + ط² + (کَ/ک) ھ}

= ۲ ج (ک ل₁ - کَ س) جم ط + گ₁

اسکو تفرق دینے سے :—

۲ (فر²ط/فرت²) ک {ل₁² + ط² + (کَ/ک) ھ}

= ۲ ج (ک ل₁ - کَ س) جب ط

اگر ط بہت چھوٹا ہو تو جب ط ≐ ط

اور یہ ایک سادہ موسیقی حرکت ہے

∴ وقت دوران ف = ۲ π √[(ل₁² + ط² + (کَ/ک) ھ) / (ج (ل₁ - (کَ/ک) س))]

اور سادہ معادل رقاص کا طول = (ل₁² + ط² + (کَ/ک) ھ) / (ل₁ - (کَ/ک) س)

اس ھ کی قیمت تجربہ سے ہوا کے لئے مستقل ثابت ہوئی ہے۔

ایک ایسے رقاص کے لئے جو الٹا یا جاسکتا ہو فرض کرو کہ ف₁ اور ف₂

دو دھاریدار کناروں کے گرد وقت دوران کی قیمتیں ہیں اور مرکز جاذبہ کے متناظر فاصلے ل_1 اور ل_2 ہیں تب

$$\frac{\text{ج}\,\text{و}_1^2}{4\pi^2} = \frac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2 + \text{ھ}_1}{\text{ل}_1\left(1 - \frac{\text{ک}'}{\text{ک}}\cdot\frac{\text{س}_1}{\text{ل}_1}\right)}$$

چھوٹی مقداروں کے حاصلضرب کی قیمتوں کو نظرانداز کرتے ہوئے :—

$$\frac{\text{ج}\,\text{و}_1^2}{4\pi^2} = \frac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_1} + \frac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_1}\left(\frac{\text{ک}'}{\text{ک}}\cdot\frac{\text{س}_1}{\text{ل}_1}\right) + \frac{\text{ھ}_1}{\text{ل}_1}$$

اسی طرح :— $$\frac{\text{ج}\,\text{و}_2^2}{4\pi^2} = \frac{\text{ل}_2^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_2} + \frac{\text{ل}_2^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_2}\left(\frac{\text{ک}'}{\text{ک}}\cdot\frac{\text{س}_2}{\text{ل}_2}\right) + \frac{\text{ھ}_2}{\text{ل}_2}$$

ایک کو دوسرے سے تفریق کرنے سے :—

$$\frac{\text{ج}}{4\pi^2}\left(\text{و}_1^2\,\text{ل}_1 - \text{و}_2^2\,\text{ل}_2\right) = \text{ل}_1^2 - \text{ل}_2^2$$

$$+ (\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2)\frac{\text{ک}'}{\text{ک}}\cdot\frac{\text{س}_1}{\text{ل}_1} - (\text{ل}_2^2 + \text{ط}^2)\frac{\text{ک}'}{\text{ک}}\cdot\frac{\text{س}_2}{\text{ل}_2} + (\text{ھ}_1 - \text{ھ}_2)$$

سادہ معادل رقاص کا طول تقریباً $= \text{ل} = \frac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_1} = \frac{\text{ل}_2^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_2}$

ل کی قیمت ان مقداروں کے لئے لکھئے اور $(\text{ل}_1 - \text{ل}_2)$ سے کل اوپر کی مساوات کو تقسیم کرنے سے :—

$$\frac{\text{ج}}{4\pi^2}\left(\frac{\text{و}_1^2\,\text{ل}_1 - \text{و}_2^2\,\text{ل}_2}{\text{ل}_1 - \text{ل}_2}\right) = (\text{ل}_1 + \text{ل}_2) \quad (5)$$

$$+ \frac{\text{ک}'\,\text{ل}}{\text{ک}}\left(\frac{\text{س}_1 - \text{س}_2}{\text{ل}_1 - \text{ل}_2}\right) + \frac{\text{ھ}_1 - \text{ھ}_2}{\text{ل}_1 - \text{ل}_2}$$

بائیں جانب کے مقادیر تصحیح کے رقوم ہیں $(\text{س}_1 - \text{س}_2)$ کی قیمت حسابی طریقہ

سے دریافت کی جاسکتی ہے۔ آخری جز، ایک ہی ناپ اور شکل کے دو رقاصوں کی مدد سے، جن کی کمیتیں مختلف ہوں، دریافت کیا جاسکتا ہے۔ ھ۱ اور ھ۲ کی قیمتیں دریافت کرنی ہوں تو دونوں مساواتوں کو حل کرنا ہوگا۔ اگر رقاص کی شکل ایسی ہو کہ وہ درمیانی نقطہ پر متشاکل ہو تو س۱ = س۲ اور ھ۱ = ھ۲، اور ہوا کی تصحیح ساقط ہو جاتی ہے۔ ایسے رقاص کو جو ان شرائط کو پورا کرتا ہو پہلے پہل رپسالڈ نے بنایا اور اسکو شکل ۱۰ میں دکھلایا گیا ہے۔



شکل ۱۰

ایک سلاخ دو حلقوں ص۱ اور ص۲ میں جوڑ دی جاتی ہے۔ ان حلقوں میں دو چھوٹی سلاخیں جن کے سروں پر دھاریدار کنارے ن۱ اور ن۲ ہوتے ہیں، پیچ کے ذریعہ کس دی جاتی ہیں اور ان کے ساتھ دو اسطوانے ا اور ب لگے ہوئے ہوتے ہیں ان میں سے ایک ٹھوس اور دوسرا کھوکھلا ہوتا ہے ان اسطوانوں کو سلاخ کے کسی مقام پر، اوپر یا نیچے کی جانب ہٹا کر پیچ کے ذریعہ جکڑ دیا جاسکتا ہے اور اس طرح ن۱ اور ن۲ کے گرد، وقت دوران کی قیمتیں تقریباً مساوی کی جاسکتی ہیں۔

دھاریدار کناروں کا انحنا :— اگر دھاریدار کنارے اچھی طرح تیز نہ ہوں تو دھاریدار کنارہ کے (اپنے سہارے کے ساتھ) پھسلواں تماس کی وجہ سے، رقاص اہتزاز کرتا ہے۔

فرض کرو کہ دھاریدار کنارے ص۱ اور ص۲ نصف قطر کے اسطوانے ہیں (شکل ۱۱ میں ق کو ایک دھاریدار کنارے کا حصہ کا نقطہ تماس گ ہے) انحنا کا مرکز فرض کیا گیا ہے۔ مرکز جاذبہ ج، دھاریدار کنارہ سے ل۱ فاصلہ پر ہے۔

تھامنے والا جفت = ک ج × ق م

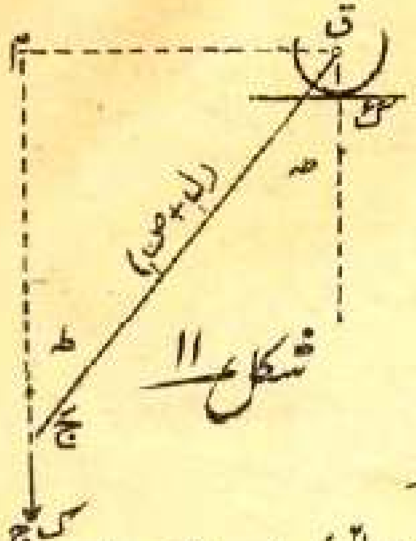
$= \text{ک ج} (\text{ل}_1 + \text{ص}_1)\ \text{جب ط}$

اگر ط چھوٹا ہو تو جفت = ک ج (ل₁ + ص₁) ط

لیکن جفت $= \text{مج}\ \dfrac{\text{ف}^2\text{ط}}{\text{ف ت}^2}$

$= \text{ک} (\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2)\ \dfrac{\text{ف}^2\text{ط}}{\text{ف ت}^2}$

$= \text{ک ج} (\text{ل}_1 + \text{ص}_1)\ \text{ط}$



شکل ۱۱

اور یہ ایک سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہوا اسلئے :۔

$$\frac{\text{ج}\ \text{و}_1^2}{4\pi^2} = \frac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_1 + \text{ص}_1} \quad — \quad \frac{(\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2)}{\text{ل}_1} \cdot \left(1 - \frac{\text{ص}_1}{\text{ل}_1}\right)$$

اسی طرح دوسرے دھار یدار کنارے کے لئے :۔

$$\frac{\text{ج}\ \text{و}_2^2}{4\pi^2} = \frac{(\text{ل}_2^2 + \text{ط}^2)}{\text{ل}_2} \cdot \left(1 - \frac{\text{ص}_2}{\text{ل}_2}\right)$$

دونوں کو ایک دوسرے میں سے تفریق کرنے سے :۔

$$\frac{\text{ج}}{4\pi^2} (\text{و}_1^2\ \text{ل}_1 - \text{و}_2^2\ \text{ل}_2) = (\text{ل}_1^2 - \text{ل}_2^2) - \left(\frac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_1}\right) \text{ص}_1 + \left(\frac{\text{ل}_2^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_2}\right) \text{ص}_2$$

اب سادہ معادل رقاص کا طول $= \text{ل} = \dfrac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_1} = \dfrac{\text{ل}_2^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_2}$

ل کی رقوم میں لکھنے اور اوپر کی مساوات کو (ل₁ - ل₂) سے تقسیم کرنے سے :۔

$$\frac{\text{ج}}{4\pi^2} \left\{ \frac{\text{و}_1^2\ \text{ل}_1 - \text{و}_2^2\ \text{ل}_2}{\text{ل}_1 - \text{ل}_2} \right\} = (\text{ل}_1 + \text{ل}_2) + \left(\frac{\text{ل}}{\text{ل}_1 - \text{ل}_2}\right) (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)$$

اگر دھاریدار کناروں کو اُلٹ دیا جائے جس طرح کہ ریسالڈ کے رقاص کی صورت میں کیا جاسکتا ہے تو

$$\frac{\text{ج}}{\text{۴}\pi^{2}}\left\{\frac{\text{ف}_{1}\text{ل}_{1}-\text{ف}_{2}\text{ل}_{2}}{\text{ل}_{1}-\text{ل}_{2}}\right\}=(\text{ل}_{1}+\text{ل}_{2})+\frac{\text{ل}}{\text{ل}_{1}-\text{ل}_{2}}(\text{ص}_{1}-\text{ص}_{2})$$

ان دونوں مساواتوں کو جمع کرنے سے ص_1 اور ص_2 کی قیمتیں ساقط ہو جاتی ہیں، ورنہ ص_1 اور ص_2 کی قیمتیں دریافت کرنی ہوں گی۔

اگر سہارے میں ایک ثابت دھار یدار کنارہ اور رقاص پر مستوی بیرنگ ہو تو $\text{ص}_1 = \text{ص}_2$، لہذا اس صورت میں کسی تصحیح کی ضرورت نہیں۔

سہارے کی حرکت:- سہارا اگر مضبوطی کے ساتھ نہ جمایا گیا ہو، تو رقاص کی حرکت کے ساتھ مجبوراً خود بھی ضرور حرکت کرنے لگے گا، سہارے کی اس حرکت کو انتصابی و افقی اجزا میں تحلیل کیا جا سکتا ہے، لیکن موخر الذکر کا اثر وقت دوران پر زیادہ ہوتا ہے اور انتصابی کا بالکل کم ہوتا ہے، اسلئے یہ ضروری ہے کہ سہارے کو خصوصاً عرضی سمت میں، مضبوطی کے ساتھ جما دیا جائے۔

شکل ۱۲ میں ایک دھار یدار کنارہ کا نقطہ تعلیق فرض کرو ق ہے اور ا مرکز جاذبہ ہے۔ جہاں ن ا = ل_1،



شکل ۱۲

فرض کرو کہ سہارا، افقی سمت میں فی اکائی قوت، بقدر ع، حرکت کرتا ہے۔

$$\text{ا ا کی سمت میں اسراع} = \text{ل}_{1}\frac{\text{فر}^{2}\text{ط}}{\text{فرت}^{2}}$$

$$\text{لہذا قوت ا ا کی سمت میں} = \text{ک}\,\text{ل}_{1}\frac{\text{فر}^{2}\text{ط}}{\text{فرت}^{2}}$$

$$\text{لیکن}\ \frac{\text{فر}^{2}\text{ط}}{\text{فرت}^{2}} = \frac{\text{ج}\,\text{ل}_{1}\,\text{ط}}{\text{ل}_{1}^{2}+\text{ط}^{2}}$$

$$\text{لہذا سہارے پر قوت} = \frac{\text{ک}\,\text{ج}\,\text{ل}_{1}^{2}\,\text{ط}}{\text{ل}_{1}^{2}+\text{ط}^{2}}$$

$$\text{چونکہ}\ \frac{\text{ل}_{1}^{2}+\text{ط}^{2}}{\text{ل}_{1}} = \frac{\text{ل}_{2}^{2}+\text{ط}^{2}}{\text{ل}_{2}} = \text{ل}$$

$$\therefore\ \text{ط}^2 = \text{ل}_1\,\text{ل}_2$$

$$\therefore\ \text{سہارے پر قوت} = \frac{\text{ک ج ل}_1\,\text{ط}}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}$$

لیکن اکائی قوت کے لئے سہارہ عہ کے مساوی حرکت کرتا ہے۔

$$\therefore\ \text{اس قوت کے لئے سہارہ جتنی حرکت کریگا} = \frac{\text{ک ج ل}_1\,\text{ط}}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}\,.\,\text{عہ}$$

لیکن اس قوت سے سہارہ زاویۂ نقل مکان ط کے لئے بقدر ن نَ حرکت کرتا ہے۔

$$\text{لہٰذا}\quad \frac{\text{ک ج ل}_1\,\text{ط}}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}\,.\,\text{عہ} = \text{ن نَ}$$

$$\text{لیکن}\quad \text{ن نَ} = \text{ف}_1\,\text{ط}$$

$$\therefore\ \text{ف}_1 = \frac{\text{ک ج عہ ل}_1}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}$$

اور مرکزِ اہتزاز ق تک اونچا کر دیا گیا ہے۔

لہٰذا وقت دوران کے لئے:—

$$\frac{\text{ج و}_1^2}{4\pi^2} = \frac{(\text{ل}_1 + \text{ف}_1)^2 + \text{ط}^2}{(\text{ل}_1 + \text{ف}_1)}$$

$$= \text{ل}_1 + \text{ف}_1 + \frac{\text{ط}^2}{\text{ل}_1 + \text{ف}_1}$$

دوسرے دھاریدار کنارے کے لئے:—

$$\frac{\text{ج و}_2^2}{4\pi^2} = \text{ل}_2 + \text{ف}_2 + \frac{\text{ط}^2}{\text{ل}_2 + \text{ف}_2}$$

∴ ایک کو دوسرے میں سے تفریق کرنے سے:—

$$\frac{\text{ج}}{4\pi^2}\left\{\frac{\text{و}_1^2\,\text{ل}_1 - \text{و}_2^2\,\text{ل}_2}{\text{ل}_1 - \text{ل}_2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\text{ل}_1 - \text{ل}_2}\left\{\text{ل}_1^2 + \text{ف}_1\,\text{ل}_1 + \frac{\text{ط}^2\,\text{ل}_1}{\text{ل}_1 + \text{ف}_1} - \text{ل}_2^2 - \text{ف}_2\,\text{ل}_2 - \frac{\text{ط}^2\,\text{ل}_2}{\text{ل}_2 + \text{ف}_2}\right\}$$

$$\text{اب چونکہ } ف_۱ = \frac{ک\,ج\,ع\,ل_۲}{ل_۱ + ل_۲}$$

$$\therefore \frac{ف_۱}{ف_۲} = \frac{ل_۲}{ل_۱} \text{ یعنی } ف_۱ ل_۱ = ف_۲ ل_۲$$

$$\therefore \frac{ج}{۴\pi^۲}\left\{\frac{ف_۲^۲ ل_۱ - ف_۱^۲ ل_۲}{ل_۱ - ل_۲}\right\} = (ل_۱ + ل_۲) + \frac{۱}{ل_۱ - ل_۲}(ف_۱ ل_۱ - ف_۲ ل_۲)$$

$$= (ل_۱ + ل_۲) + \frac{۱}{ل_۱ - ل_۲}\left(ف_۱ ل_۱ - ف_۱ \frac{ل_۲^۲}{ل_۱}\right)$$

$$= (ل_۱ + ل_۲) + \frac{ف_۱}{ل_۱}(ل_۱ + ل_۲)$$

$$= (ل_۱ + ل_۲) + ک\,ج\,ع$$

لہذا رقاص کے وزن سے، سہارہ جو افقی حرکت کرتا ہے اسکا تصحیحی جزو "ک ج ع" ہے۔

بورڈا کا رقاص یہ بالکل سادہ رقاص کی طرح ہوتا ہے۔ ایک بڑا فولاد کا یا لوہے کا ٹھوس کرہ، باریک تار کے ذریعہ لٹکایا جاتا ہے۔

چونکہ کسی ٹھوس کرہ کے جمود کا معیار اثر اس کے قطر کے گرد $= م\,\frac{۲}{۵}\,ص^۲$

اس لئے وقت دوران $ق = ۲\pi\sqrt{\frac{ل_۱^۲ + \frac{۲}{۵}ص^۲}{ل_۱\,ج}}$ .... (۱۲)

جہاں $ل_۱$ دہار بیدار کنارے اور کرہ کے مرکز جاذبہ کے درمیان فاصلہ ہے۔ اس سے ج کی قیمت دریافت کی جاسکتی ہے۔

ایک لچک دار ڈوری کے ذریعہ کسی جسم کا ارتعاش کرنا

فرض کرو کہ ایک جسم جس کی کمیت م ہے کسی لچکدار ڈوری کے ذریعہ لٹکایا گیا ہو دیکھو شکل نمبر ۱۳

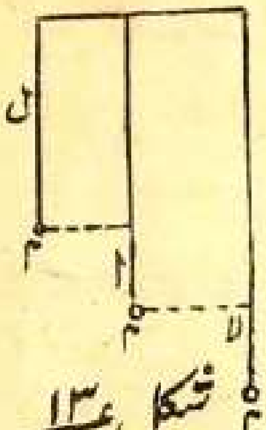
اگر جسم کو لٹکانے کے بغیر ڈوری کا صحیح طول ل کے مساوی ہو اور اُسکو لٹکانے کے بعد اس میں اضافہ طول = ا، تو ہوک کے کلیہ کی رُو سے ڈوری میں تناؤ یا زور ※

$$\text{م ج} = \text{ی}\ \frac{\text{ا}}{\text{ل}}$$

جہاں ی = ڈوری کے مادہ کا ینگ کا معیار لچک

اب اگر جسم اہتزاز کر رہا ہو اور کچھ وقت میں فاصلہ لا اپنے پہلے مقام سے نیچے اُتر جائے تو ڈوری میں زور یا تناؤ $= \text{ی}\ \frac{\text{ا} + \text{لا}}{\text{ل}}$

اور دوسری قوت یا زور جو عمل کر رہا ہے $= \text{م ج}$



شکل ۱۳

$$\therefore \text{حاصل قوت} = \frac{\text{ی}(\text{ا} + \text{لا})}{\text{ل}} - \text{م ج}$$

$$= \text{ی}\ \frac{(\text{ا} + \text{لا})}{\text{ل}} - \text{ی}\ \frac{\text{ا}}{\text{ل}}$$

$$= \frac{\text{ی لا}}{\text{ل}}$$

$$\therefore \text{جسم کا اسراع} = \frac{\text{فر}^{2}\,\text{لا}}{\text{فر و}^{2}} = \frac{\text{ی لا}}{\text{م ل}}\ ،$$

یہ سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے۔

$$\therefore \text{وقت دوران و} = 2\pi \sqrt{\frac{\text{م ل}}{\text{ی}}} \quad \cdots\cdots\cdots (13)$$

$$\text{اور چونکہ م ج} = \text{ی}\ \frac{\text{ا}}{\text{ل}} \qquad \therefore \frac{\text{م ل}}{\text{ی}} = \frac{\text{ا}}{\text{ج}}$$

$$\therefore \text{و} = 2\pi \sqrt{\frac{\text{ا}}{\text{ج}}} \quad \cdots\cdots\cdots (14)$$

اس سے ج کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے اور اگر و، م، اور ل کی قیمتیں معلوم ہو جائیں تو ی کی بھی پیمائش ہو سکتی ہے۔

فرض کرو کہ وزن کے اضافہ مَ ج کی وجہ سے طول میں اضافہ ب ہوتا ہے۔

اوپر کے طریقہ سے، $\text{مَ ج} = \text{ی}\ \frac{\text{ب}}{\text{ل}}$

ی کو ساقط کرنے کے بعد $\text{و} = 2\pi \sqrt{\frac{\text{م ب}}{\text{مَ ج}}}$

※ چوتھا باب دیکھو۔

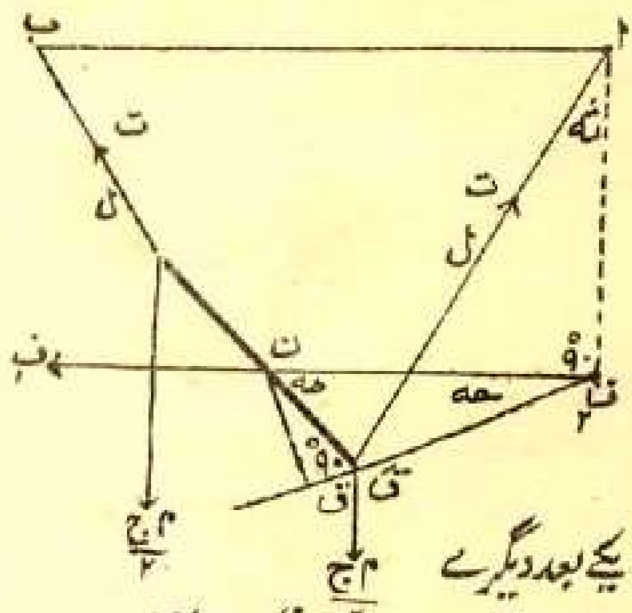
پس ج کی قیمت معلوم ہو جا سکتی ہے۔ صحیح قیمت حاصل کرنے کے لئے ڈوری کی کمیت کا تیسرا حصہ م میں جمع کرنا چاہیئے یعنی

$$\text{و} = ۲\pi\sqrt{\frac{\text{ب ل م} + \frac{\text{ک}}{۳}}{۲\,\text{ج}}}$$

جہاں ک = ڈوری کا وزن۔

دو ریشی تعلیق

فرض کرو کہ شکل ۱۴ میں ایک سلاخ جسکا مرکز ن ہے دو مساوی طول ل کی ڈوریوں کے ذریعہ ا اور ب پر لٹکائی گئی ہے۔ فرض کرو کہ



شکل ۱۴

ا اور ب کا درمیانی فاصلہ = ۲د اور سلاخ کا طول = ۲ح

ف ف کوئی افقی خط فرض کیا جائے جبکہ سلاخ ابتدا میں افقی اور ا ب، ف ف کے متوازی ہو۔

اگر سلاخ کے سروں کو یکے بعد دیگرے آگے اور پیچھے علی الترتیب اہتزاز میں لایا جائے۔

تو سلاخ کا مرکز افقی خط سے کوئی زاویہ بنائے گا۔ فرض کرو کہ یہ زاویہ طہ کے مساوی ہے اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ انتصابی وضع سے ڈوری جو زاویہ بناتی ہے وہ ثہ کے مساوی ہے۔

ف سے ایک خط کھینچو جو سلاخ کے سرے قَ میں سے گزرے۔ ایک اور خط ن ق کھینچو جو ف قَ کے علی القوائم ہو۔

فرض کرو کہ ف ف اور ف قَ کے درمیان زاویہ حہ کے مساوی ہے

اب اگر سلاخ کی کمیت = م

تو $\frac{\text{م ج}}{\text{۲ ت}}$ = جم ثہ   جہاں ڈوری کا تناؤ = ت

یعنی م ج = ۲ ت جم ثہ

اور جفت = م فـ² . $\frac{\text{د}^2\text{طہ}}{\text{د و}^2}$ = ۲ ن ق × ت جب ثہ

جہاں فـ = گردشی نصف قطر

یعنی م فـ² . $\frac{\text{د}^2\text{طہ}}{\text{د و}^2}$ = ۲ ن ق × $\frac{\text{م ج}}{\text{۲}}$ مس ثہ

= $\frac{\text{د}_2}{\text{۲}}$ جب حہ . $\frac{\text{م ج}}{\text{۲}}$. $\frac{\text{قَ ف}}{\text{ل}}$ تقریباً

اگر ثہ چھوٹا ہو

مثلث ن قَ فـ میں

$\frac{\text{ف قَ}}{\text{جب طہ}} = \frac{\text{قَ ن}}{\text{جب حہ}} = \frac{\text{د}_2}{\text{۲ جب حہ}}$

یعنی ف قَ = $\frac{\text{د}_2\text{ جب طہ}}{\text{۲ جب حہ}}$

∴ م فـ² $\frac{\text{د}^2\text{طہ}}{\text{د و}^2} = \frac{\text{۲ د}_1\text{ د}_2\text{ جب طہ م ج}}{\text{۸ ل}} = \frac{\text{د}_1\text{ د}_2\text{ م ج طہ}}{\text{۴ ل}}$

یعنی $\frac{\text{د}^2\text{طہ}}{\text{د و}^2}$ = زاویائی اسراع = $\frac{\text{د}_1\text{ د}_2\text{ ج طہ}}{\text{۴ ل ف}^2}$

چونکہ یہ ایک سادہ موسیقی حرکت ہے اس لئے وقت دوران و = ۲π $\sqrt{\frac{\text{۴ ل ف}^2}{\text{د}_1\text{ د}_2\text{ ج}}}$

= ۴π فـ $\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج د}_1\text{ د}_2}}$ .... (۱۵)

اگر سلاخ مستطیل کی شکل کی ہو تو فـ² = $\frac{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}{\text{۱۲}}$

جہاں ا = سلاخ کا طول

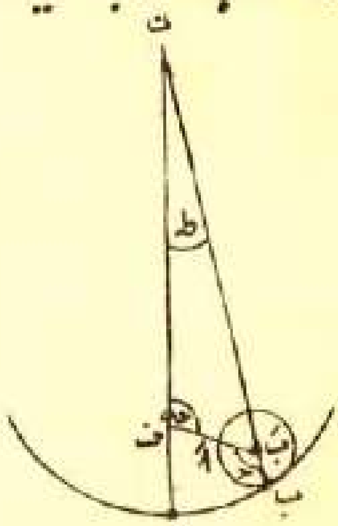
ب = " عرض

اور اگر استوانہ ہو تو ف $= \left(\frac{\text{ا}^2}{12} + \frac{\text{ص}^2}{4}\right)$

جہاں ص = استوانہ کا نصف قطر

ایک گولی کو مقعر آئینہ پر لڑھکا کر ج کی قیمت دریافت کرنا:۔

شکل ۱۵ میں فرض کرو کہ ن مقعر آئینہ کا مرکز انحنا ہے اور ب ایک گولی ہے جو مقعر آئینہ پر لڑھک رہی ہے۔



شکل ۱۵

ایک نقطہ ا گولی پر اس طرح کا اگر لیا جائے کہ جب وہ بائیں جانب لڑھکے تو آئینہ کے مرکز ا سے منطبق ہو جائے یعنی قوس ب ا = قوس ب ا کے۔

فرض کرو کہ گولی کا مرکز بَ، اس کا نصف قطر ص_1 اور آئینہ کا نصف قطر انحنا ص_2 ہے۔

بَ ا کو ملاؤ اور فرض کرو کہ ن ا کو یہ نقطہ ف پر قطع کرتا ہے۔ ن بَ کو ملاؤ

چونکہ قوس ا ب = قوس ب ا اس لیے $\text{ص}_1 \text{ط} = \text{ص}_2 \text{ب}$

اور $\text{حہ} = \text{ب} - \text{ط} = \frac{\text{ص}_1 \text{ط}}{\text{ص}_2} - \text{ط} = \frac{\text{ط}(\text{ص}_1 - \text{ص}_2)}{\text{ص}_2}$

فرض کرو کہ گولی کے جمود کا معیار اثر ایسے محور کے گرد جو کہ ب میں سے گزر رہا ہے = مج = جمود کے معیار اثر اس کے ایسے متوازی محور کے گرد جو بَ میں سے گزر رہا ہے $+ \text{م}\,\text{ص}_1^2 = \frac{2}{5}\text{م}\,\text{ص}_1^2 + \text{م}\,\text{ص}_1^2 = \frac{7}{5}\text{م}\,\text{ص}_1^2$ [جہاں م = گولی کی کمیت]

گولی کی زاویٔی رفتار $= \frac{\text{د حہ}}{\text{د و}} = \frac{\frac{\text{د ط}}{\text{د و}}(\text{ص}_1 - \text{ص}_2)}{\text{ص}_2} = \text{سٹ}$ [فرض کرو]

$$\text{گولی کی توانائی بالفعل} = \frac{1}{2}\,\text{مج}\,\omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{7}{5}\,\text{م}\,\text{صب}^2\right)\left(\frac{\text{صا} - \text{صب}}{\text{صب}}\right)^2\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرو}}\right)^2$$

اور توانائی بالقوہ = گولی کا وزن × وہ فاصلہ جو گولی کا مرکز اوپر کی طرف ہٹا

$$= \text{م ج}\left\{(\text{صا} - \text{صب}) - (\text{صا} - \text{صب})\,\text{جم طہ}\right\}$$

$$= \text{م ج}\,(\text{صا} - \text{صب})\,(1 - \text{جم طہ})$$

چونکہ توانائی بالفعل + توانائی بالقوہ = مستقل

$$\text{لہذا}\ \text{م ج}\,(\text{صا} - \text{صب})(1 - \text{جم طہ}) + \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{5}\,\text{م}\,\text{صب}^2\left(\frac{\text{صا} - \text{صب}}{\text{صب}}\right)^2\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرو}}\right)^2 = \text{مستقل}$$

$$\text{اس کو تفرقانے سے}\ \text{م ج}\,(\text{صا} - \text{صب})\,\text{جب طہ}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرو}} + 2\cdot\frac{7}{10}\,\text{م}\,(\text{صا} - \text{صب})^2\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرو}}\cdot\frac{\text{فر}^2\text{طہ}}{\text{فرو}^2} = \text{صفر}$$

$$\text{اگر زاویہ طہ چھوٹا ہو تو}\ \text{ج طہ} + \frac{7}{5}(\text{صا} - \text{صب})\frac{\text{فر}^2\text{طہ}}{\text{فرو}^2} = \text{صفر}$$

$$\text{یعنی اسراع} = \frac{\text{فر}^2\text{طہ}}{\text{فرو}^2} = \frac{-5\,\text{ج طہ}}{7(\text{صا} - \text{صب})}$$

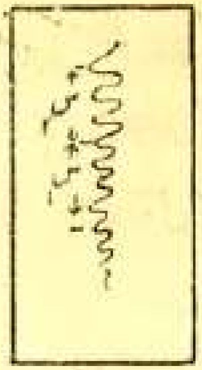
اور چونکہ یہ سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے۔

$$\text{لہذا وقت دوران و} = 2\pi\sqrt{\frac{7}{5}\cdot\frac{(\text{صا} - \text{صب})}{\text{ج}}} \quad \text{.........} \quad (16)$$

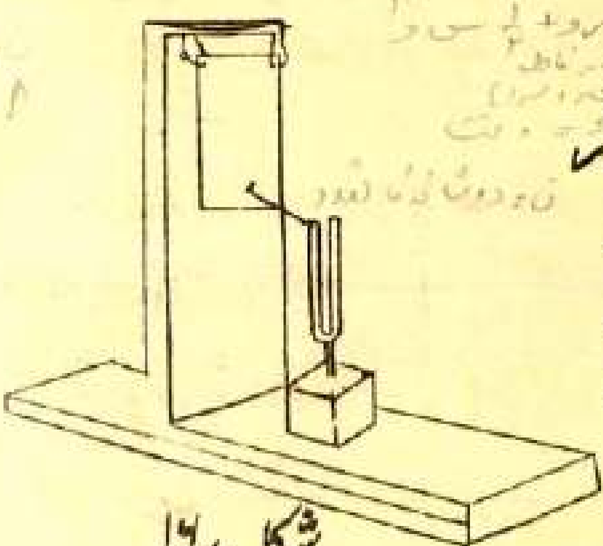
اس مساوات سے ج کی قیمت دریافت کی جا سکتی ہے۔

دھینلی (دھویں سے سیاہ شدہ) تختی کو گرا کر ج کی قیمت کی دریافت:-

تجربہ میں ایک مستطیل شکل کی تختی کو کاجل کے ذریعہ دھنیلا کیا جاتا ہے۔ ایک سر پیدا کرنے والے دوشاخہ کو لے کر اس کے ایک شاخ کے سرے پر پتلا تار لگا دیا جاتا ہے اور دوشاخہ کو تختی کے نچلے حصہ میں اسطرح رکھا جاتا ہے کہ تار کا سرا تختی کے ساتھ مس کرتا ہے دیکھو شکل ۱۶ اب



اگر تختی کو گرا دیا جائے تو اس پر موجی شکل کا ایک منحنی بنے گا جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے فرض کرو کہ ا تعداد کی موجوں کے لیے تختی نے جو فاصلہ طے کیا = س۱ اور اسی ا موجوں کے لیے فرض کرو کہ تختی کے دوسرے حصہ میں جو فاصلہ طے کیا گیا وہ = س۲



شکل ۱۶

$$\text{س}_1 = \text{ع}_1 \frac{\text{ا}}{\text{ن}} + \frac{1}{2}\,\text{ج} \left(\frac{\text{ا}}{\text{ن}}\right)^2$$

جہاں ع۱ = ابتدا میں تختی کی رفتار جبکہ پہلی ا موجیں بنی تھیں

$$\therefore\ 2\,\text{س}_1 = 2\,\text{ع}_1 \frac{\text{ا}}{\text{ن}} + \text{ج} \left(\frac{\text{ا}}{\text{ن}}\right)^2$$

اور

$$\text{س}_1 + \text{س}_2 = \text{ع}_1 \left(\frac{2\text{ا}}{\text{ن}}\right) + \frac{1}{2}\,\text{ج} \left(\frac{2\text{ا}}{\text{ن}}\right)^2$$

$$\therefore\ \text{س}_2 - \text{س}_1 = \frac{1}{2}\,\text{ج} \left(\frac{2\text{ا}}{\text{ن}}\right)^2 - \text{ج} \left(\frac{\text{ا}}{\text{ن}}\right)^2$$

$$= \text{ج} \left(\frac{\text{ا}}{\text{ن}}\right)^2 (2-1) \qquad \therefore\ \text{س}_2 - \text{س}_1 = \text{ج} \left(\frac{\text{ا}}{\text{ن}}\right)^2$$

$$\therefore\ \text{ج} = \frac{\text{ن}^2}{\text{ا}^2} (\text{س}_2 - \text{س}_1) \quad \text{.........} \quad (17)$$

سطح زمین پر ج کی قیمت کا تغیر:—

۱۶۷۲ء میں ریشر نامی شخص نے پہلی دفعہ یہ ثابت کیا کہ مختلف مقامات پر ج کی قیمت مختلف ہوتی ہے۔ چونکہ زمین اپنے محور پر گردش کرتی رہتی ہے اس وجہ سے اسکی سطح پر مختلف اشیاء میں اس امر کا تقاضا ہوتا ہے کہ

زمین کی سطح سے علیحدہ ہو کر دور پھینکے جائیں۔ یہ تقاضا خطِ استوا پر اعظم ہوتا ہے جہاں کہ گردش کی رفتار اعظم ہوتی ہے اور قطبوں کے قریب یہ اقل ہوتا ہے چونکہ زمین کے خطِ استوا کا نصف قطر، قطبی نصف قطر سے بہت بڑا ہے لہذا جو اشیا خطِ استوا پر واقع ہیں انکا فاصلہ، زمین کے مرکزِ کمیت سے، بہ نسبت قطبوں پر واقع ہونے والی اشیا کے فاصلہ کے بہت زیادہ ہوتا ہے۔ اسی وجہ سے خطِ استوا پر جاذبہ کی قوت کسی کمیت پر قطبوں کی بہ نسبت کم ہوتی ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ ج کی قیمت خطِ استوا پر کم اور قطبوں پر زیادہ ہوتی ہے۔

۱۷۴۳ء میں کلیرو نے یہ ثابت کیا کہ کسی عرض البلد ل پر ج کی قیمت کی تعبیر ذیل کی ساوات سے ہوتی ہے:-

$$\text{ج}_{\text{ل}} = \text{ج}_{۱}\left[۱ + \left(\tfrac{۵}{۲}\text{ک} - \text{مہ}\right)\text{جب}^{۲}\,\text{ل}\right]$$

جہاں $\text{ج}_{۱}$ = خطِ استوا پر ج کی قیمت

$$\text{ک} = \frac{\text{قوت مرکز گریز خطِ استوا پر}}{\text{ج}_{۱}}$$

$$\text{مہ} = \frac{\text{استوائی اور قطبی نصف قطروں کا فرق}}{\text{استوائی نصف قطر}}$$

۱۸۸۴ء میں ہلمرٹ نے صحیح ضابطہ دریافت کیا جو آجکل بھی معیاری تصور کیا جاتا ہے۔

$$\text{ج} = ۹۷۸٫۰۰\,(۱ + ۰٫۰۰۵۳۱\,\text{جب}^{۲}\,\text{ل})$$

سر جارج ایری وغیرہ نے یہ ثابت کر دکھایا کہ ایک ہی مقام پر ج کی قیمت زمین سے مختلف بلندیوں پر بدلتی رہتی ہے۔ کسی پہاڑ کی چوٹی پر

سطح سمندر کے مقابلہ میں ج کی قیمت کم ہوتی ہے اسکی وجہ یہ ہے کہ زمین کا مرکزی حصہ، بالائی حصہ کی بہ نسبت زیادہ کثیف ہے۔ لہذا کسی کان کے اندر ج کی قیمت، بلند مقامات کی بہ نسبت زیادہ ہوگی۔ ایوان تجارت نے حسب ذیل ضابطہ معین کیا ہے۔

یہ فرض کرتے ہوئے کہ زمین ن نصف قطر کا ایک کرہ ہے۔

$$\text{ج}_{\text{لہ ب}} = ۹۸۰٫۶۲ \left(۱ - ۰٫۰۰۲۵۷\ \text{جم}۲\text{لہ}\right)\left[۱ - \frac{۵\text{ب}}{۴\text{ن}}\right]$$

جہاں $\text{ج}_{\text{لہ ب}}$ = ج کی قیمت عرض البلد لہ اور سطح سمندر سے بلندی ب پر

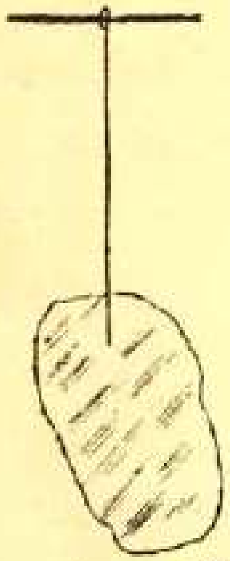
زمین کے مختلف مقامات پر ج کی قیمت حسب ذیل ہے:۔

مقام	عرض البلد	ج سمر فی ثانیہ فی ثانیہ
خط استوا	۰° – ۰′	۹۷۸٫۱۰
مدراس	۱۳° – ۴′	۹۷۸٫۲۹
حیدرآباد دکن	۱۷° – ۲۵′ – ۵۴″	۹۷۸٫۳۰
کلکتہ	۲۲° – ۳۳′	۹۷۸٫۷۷
کیپ ٹاؤن	۳۳° – ۵۶′	۹۷۹٫۶۴
ٹوکیو	۳۵° – ۴۱′	۹۷۹٫۹۵
ملبورن	۳۷° – ۵۰′	۹۷۹٫۹۸
نیویارک	۴۰° – ۴۴′	۹۸۰٫۲۴
پیرس	۴۸° – ۵۰′	۹۸۰٫۹۴
لندن	۵۱° – ۳۱′	۹۸۱٫۱۹

مقام	عرض البلد	ج سمر فی ثانیہ فی ثانیہ
کیمبرج	۵۲° - ۱۳'	۹۸۱٫۲۵
اڈنبرا	۵۵° - ۵۷'	۹۸۱٫۵۸
قطب شمالی	۹۰° - ۰'	۹۸۳٫۲۱

مروڑی اہتزاز:-

فرض کرو کہ ایک جسم دائری وضع میں اہتزاز کر رہا ہے یعنی مروڑی اہتزاز ہو رہا ہے۔



شکل ۱۷

اگر کسی وقت و میں زاویہ عہ گھومے تو جفت

$$= \text{مج}\ \frac{\text{فر}^2\,\text{عہ}}{\text{فرو}^2}$$

اور یہ جفت = ٹ عہ جہاں ٹ = مروڑ کا جفت فی اکائی زاویہ

$$\therefore\ \text{مج}\ \frac{\text{فر}^2\,\text{عہ}}{\text{فرو}^2} = \text{ٹ عہ}$$

یعنی زاویائی اسراع

$$= \frac{\text{فر}^2\,\text{عہ}}{\text{فرو}^2} = \frac{\text{ٹ عہ}}{\text{مج}}$$

اور چونکہ یہ ایک سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے اس لئے وقت دوران

$$\text{و} = 2\pi \sqrt{\frac{\text{مج}}{\text{ٹ}}} \quad \text{......}(۱۸)$$

Chapter II.

(۱) Advanced Practical Physics "Worsnop & Flint" P69 (1927)
(۲) ,, ,, ,, ,, P71 (1927)
(۳) Properties of Matter "Poynting & Thomson" P14 (1922)
(۴) Properties of Matter "Newman & Searle" P43 (1928)
(۵) ,, ,, ,, P46, (1928)
(۶) ,, ,, ,, P49, (1928)
(۷) Properties of Matter "Wagsteff" P85 (1928)
(۸) Phil. Trans. 40, 19 (1737)
(۹) Properties of Master "Wagstaff" P142, (1924)

تیسرا باب

قوت جاذبہ کا مستقل

نیوٹن کا کلیہ جاذبہ:- اگر دو جسموں کی کمیت ک_1 اور ک_2 ہو اور ان کے درمیان فاصلہ ف تو دونوں کے درمیان کشش کی قوت ق $\propto \frac{\text{ک}_1 \text{ک}_2}{\text{ف}^2}$

یعنی $\text{ق} = \text{جہ} \frac{\text{ک}_1 \text{ک}_2}{\text{ف}^2}$

جہ جاذبہ کا مستقل کہلاتا ہے۔ کیونڈش، بائز، جولی، اور پوائنٹنگ وغیرہ نے جہ کی قیمت تجربہ کے ذریعہ دریافت کی ہے۔

نیوٹن کے شہرۂ آفاق کلیہ کی رو سے کسی ک_2 کمیت کا اسراع کسی دوسرے جسم کی طرف $= \frac{\text{جہ}\ \text{ک}_1}{\text{ف}^2}$

اس نتیجہ کی مدد سے ہم مختلف اجرام سماوی کی کمیتیں بہ آسانی دریافت کر سکتے ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ چاند کی زاویٔ رفتار $= \text{ع}_\text{چ}$ اور اس کا فاصلہ زمین سے $= \text{ف}_\text{چ}$ اور س = سورج کی کمیت

ز = زمین کی کمیت اور $\text{ع}_\text{ز}$ = زمین کی زاویٔ رفتار اور $\text{ف}_\text{ز}$ = زمین کا فاصلہ سورج سے اس صورت میں چاند کا اسراع زمین کی طرف

$$= \text{ف}_\text{چ} \times \text{ع}_\text{چ}^2$$

$$= \frac{\text{جہ}\ \text{ز}}{\text{ف}_\text{چ}^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

اور زمین کا اسراع سورج کی طرف = $\text{ف}_{\text{ز}} \times \text{سلا}_{\text{ز}}^{۲}$

$$= \frac{\text{ج س}}{\text{ف}_{\text{ز}}^{۲}} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

مساوات (۱) کو (۲) سے تقسیم کرنے سے :-

$$\frac{\text{ف}_{\text{ز}}^{۲}}{\text{ف}_{\text{چ}}^{۲}} \times \frac{\text{ز}}{\text{س}} = \frac{\text{سلا}_{\text{چ}}^{۲} \times \text{ف}_{\text{چ}}}{\text{ف}_{\text{ز}} \times \text{سلا}_{\text{ز}}^{۲}}$$

$$\therefore \frac{\text{ز}}{\text{س}} = \frac{\text{ف}_{\text{چ}}^{۳} \times \text{سلا}_{\text{چ}}^{۲}}{\text{ف}_{\text{ز}}^{۳} \times \text{سلا}_{\text{ز}}^{۲}}$$

$$= \left(\frac{۲۴۰۰۰۰}{۹۲۰۰۰۰۰۰}\right)^{۳} . \left(\frac{۳۶۵}{۲۷}\right)^{۲}$$

$$= \frac{۱}{۳۰۰۰۰۰}$$

لیکن ہمیں یہ معلوم ہے کہ زمین کا وزن تقریباً $۱٫۲۵ \times ۱۰^{۲۵}$ پونڈ ہے

لہٰذا سورج کا وزن تقریباً = $۱٫۲۵ \times ۱۰^{۲۵} \times ۳۰۰۰۰۰$

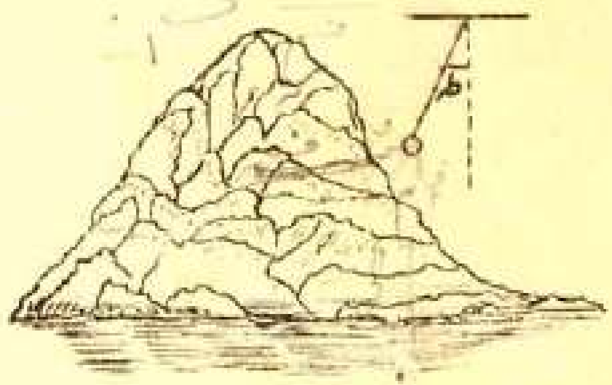
= $۳٫۷۵ \times ۱۰^{۳۰}$ پونڈ

زمین کی کمیت کسی پہاڑ کی کمیت کے رقوم میں :- کسی پہاڑ کے کنارے کے قریب ایک چھوٹا سا گولا لٹکا دیا جائے تو پہاڑ کی کشش کی وجہ سے ایک افقی قوت گولہ کو اُس کی طرف جذب کرے گی اور قوت جاذبۂ زمین اس کو نیچے کی جانب انتصابی سمت میں کھینچے گی، لہٰذا گولہ جس ڈوری سے بندھا ہوا ہوگا یہ ڈوری اِن دونوں قوتوں کی حاصل سمت اختیار کرے گی۔ اگر انتصابی سمت سے ڈوری زاویہ ط بنائے تو

$$\text{مس ط} = \frac{\text{ق}_{۱}}{\text{ق}_{۲}}$$

جہاں ق_1 = پہاڑ کی کشش کی وجہ افقی قوت
ق_2 = جاذبۂ زمین کی وجہ انتصابی قوت

فرض کرو کہ ک_1 پہاڑ کی اور م گولہ کی کمیت ہے۔ پہاڑ کی کشش کے مرکز سے گولہ کا فاصلہ = ف، اور زمین کی کمیت ضا ہے اور زمین کے مرکز کا فاصلہ گولہ سے = ص،



تب $\text{ق}_1 = \text{جہ} \dfrac{\text{ک}_1 \text{م}}{\text{ف}^2}$

اور $\text{ق}_2 = \dfrac{\text{جہ ضا م}}{\text{ص}^2}$

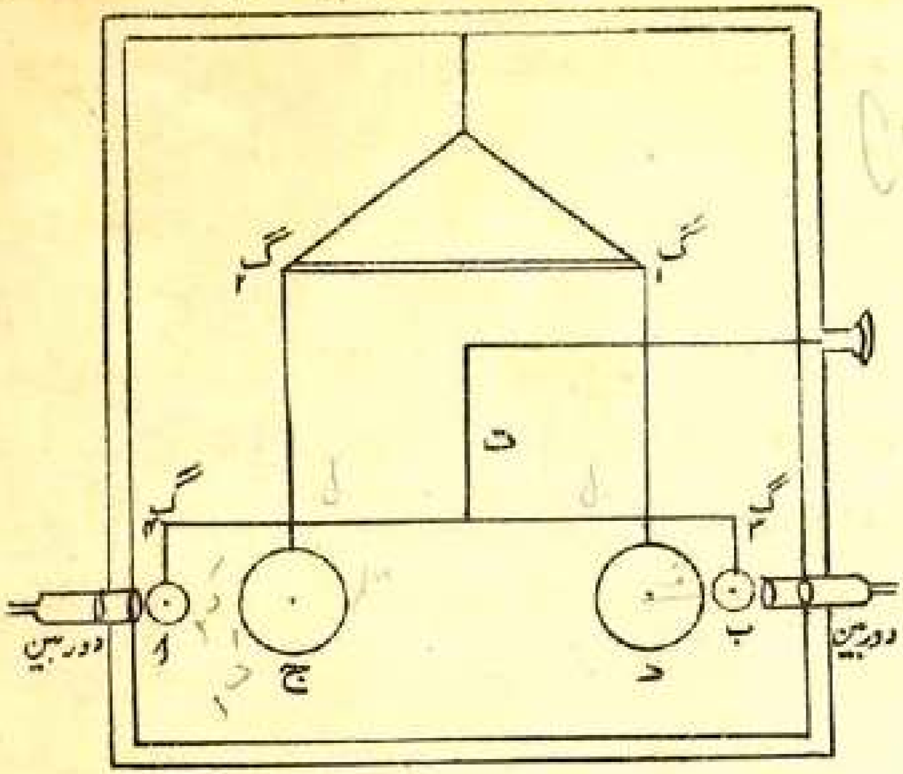
$$\therefore \quad \frac{\text{ق}_1}{\text{ق}_2} = \text{مس ظ} = \frac{\text{ک}_1 \text{ص}^2}{\text{ضا ف}^2}$$

لہذا ضا کی قیمت حساب کے ذریعہ معلوم کی جا سکتی ہے۔ زمین کا حجم اگر معلوم ہو تو اس کی کثافت بھی دریافت کی جا سکتی ہے۔

پہلے پہل سنہ ۱۷۴۰ء میں اس قسم کا تجربہ کرنے کی کوشش بوگے نے کی تھی۔ اس کے بعد سنہ ۱۷۷۴ء میں میسکیلین نامی ایک انگریز ہیئت داں نے اسی قسم کے تجربہ کو دوہرایا اور زمین کی کثافت اس نے ۵ء۴ دریافت کی۔ لیکن پہاڑ کی کمیت صحیح طور پر معلوم کرنے کے بعد زمین کی کثافت کی صحیح قیمت ۵ نکلی۔ سنہ ۱۸۵۴ء میں ایبری نے زمین کی کثافت ۵ء۶ دریافت کی۔

جہ کی قیمت کی دریافت ہنری کیونڈش کے طریقہ سے:۔ اصل میں اس تجربہ کی

بنیاد جان مشیکل نے ڈالی تھی لیکن بعد میں کیونڈش نے ۱۷۹۸ء میں



شکل ۱

صحیح طور پر اس کو کیا تھا،

شکل ۱ میں ج، د دو بڑے سیسہ کے گولے ہیں جنکا قطر ۱۲ انچ ہے اور یہ ایک سلاخ گ گ۱ کے ذریعہ لٹکائے گئے ہیں۔ اس سلاخ کو ہم دائری وضع میں گھما سکتے ہیں، گ۲ گ۳ ایک پتلی ہلکی سلاخ ہے جس کے ذریعہ دو چھوٹے سیسہ کے گولے ب اور ا آویزاں کئے گئے ہیں۔ ان چاروں گولوں کے مرکز ایک ہی اُفقی مستوی میں واقع ہیں۔

تجربہ میں یہ کل چیزیں ایک بند صندوق میں رکھ دی جاتی ہیں تاکہ بیرونی اثرات سے محفوظ رہیں شروع میں گ۲ گ۳ کو اس طرح گھمایا جاتا ہے کہ اس کی سمت گ گ۱ کے علی القوائم ہو جائے اور مروڑے ہوئے تار ت کی مروڑ

نکال دی جاتی ہے۔ پھر سلاخ گ، گ۲ کو اسکی پہلی وضع میں اسطرح گھمایا جاتا ہے کہ ج، ا کے اور د، ب کے قریب آجائے ۲ اور ج اور ب اور د میں کشش ہوگی اور اس کی وجہ سے سلاخ گ، گ۲ میں انصراف ہوگا۔ یہ انصراف معلوم کرلیا جاتا ہے۔ اس کے بعد سلاخ گ، گ۲ کو دوسری طرف گھماکر اسی طرح تجربہ دوہرایا جاتا ہے۔ اور یہ انصراف دوربینوں کی مدد سے معلوم کیا جاتا ہے تجربہ کے دوران میں تپش کا مستقل رکھنا ضروری ہے۔ کیونڈش نے یہ تجربہ ایک بند کمرے میں کیا تھا تاکہ ہوا کے اثرات نہ ہونے پائیں۔ چونکہ آلات میں خود کشش کا خوف تھا اس لئے کیونڈش نے ایک شیشہ کا صندوق بنایا۔ ا، ب اور ج، د کی کمیت اور جسامت علی الترتیب یکساں ہونی چاہئے۔ فرض کرو کہ ک، کسی ایک بڑے گولے کی کمیت ہے اور ک۲ کسی چھوٹے گولے کی، اور ب اور د کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ = ف جبکہ سلاخ گ، گ۲ میں انصراف = عہ اور سلاخ گ، گ۲ کا طول = ۲ ل

تب ب اور د کے درمیان کشش کی قوت $ق = ج \frac{ک_۱ ک_۲}{ف^۲}$

اور انکے محور کے گرد معیار اثر $= \frac{۲ ل ج ک_۱ ک_۲}{ف^۲} =$ جفت

= ٹہ عہ جہاں ٹہ پیچیدگی کا جفت فی اکائی زاویہ ہے

$$\therefore ج = \frac{ٹہ\, عہ\, ف^۲}{۲ ل ک_۱ ک_۲} \qquad (۳)$$

اس مساوات سے اگر ٹہ کی قیمت معلوم ہو تو جہ کی قیمت معلوم ہوجاتی ہے اگر گ، گ۲ کو دائری وضع میں اہتزاز کراکے اس کا وقت دوران و معلوم ہوجائے اور اس سلاخ کے جمود کا معیار اثر مج ہو تو ٹہ کی قیمت

$$و = ۲\pi \sqrt{\frac{مج}{ٹہ}}$$ سے معلوم ہوجائے گی

اگر جہ معلوم ہو جائے تو زمین کی کثافت آسانی سے معلوم کی جا سکتی ہے۔ فرض کرو کہ زمین پر ایک جسم جس کی کمیت ک ہے رکھا ہوا ہے۔ زمین اور جسم کے درمیان کشش کی قوت = اس جسم کے وزن کے جو زمین کی جانب عمل کر رہا ہے۔ چونکہ زمین کی کمیت = $\frac{4}{3}\pi$ ص^3 ث

جہاں ص = زمین کا نصف قطر

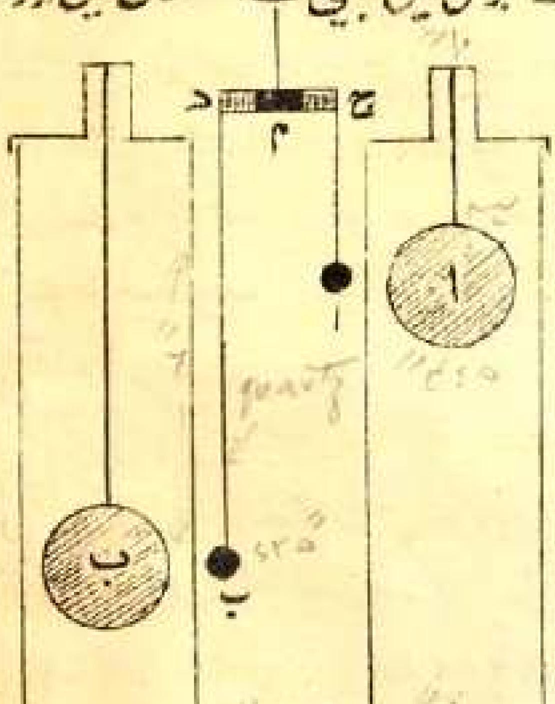
$$\therefore \text{کشش کی قوت} = \text{ک ج} = \frac{\text{جہ}\left(\frac{4}{3}\pi\,\text{ص}^3\,\text{ث}\right)\text{ک}}{\text{ص}^2}$$

$$\therefore \text{ث} = \text{زمین کی کثافت} = \frac{3\,\text{ج}}{4\pi\,\text{جہ ص}}$$

تجربہ سے جہ = 6.66×10^{-8}

اس سے ث معلوم ہو جاتا اگر ہمیں ص معلوم ہو ص کی قیمت درج کرنے سے ث کی قیمت ۵٫۵۴ گرام فی مکعب سم حاصل ہوتی ہے۔

بعد میں اس تجربہ کو ریش نے جرمنی میں بیلی نے انگلستان میں اور کارنو اور بیلے نے فرانس میں دوہرایا، ان تمام کے نتائج کیونڈش کے نتائج کے بہت ہی قریب ہیں۔



شکل ۲

جہ کی قیمت کی دریافت

ورنن بائز کے تجربہ سے:-

پروفیسر بائز نے ۱۸۹۵ء میں جو تجربہ کیا وہ حسب ذیل ہے۔

اس نے کوارٹز کے بہت ہی

باریک ریشے بنانے کا ایک طریقہ دریافت کیا اس نے دیکھا کہ یہ ریشے بہت مضبوط ہوتے ہیں اور لچک دار خواص ان میں صحیح طور پر پائے جاتے ہیں۔ اسوجہ سے اسنے کوارٹز کے ریشوں کو اپنے تجربہ میں ایسی جگہ استعمال کیا جہاں چھوٹی چھوٹی قوتیں ناپنے کی ضرورت تھی شکل ع۔۲ میں اب سونے کے دو چھوٹے کرّے ہیں جن کے قطر ۰٫۲۵ انچ ہیں۔

ان کو کوارٹز کے ریشوں کے ذریعہ ایک بہت چھوٹی مروڑی سلاخ ج د کے دونوں سروں پر لٹکایا جاتا ہے جس کے ساتھ ایک آئینہ م بھی لگا ہوا ہوتا ہے۔ کشش کرنے والی کمیتین ا اور ب سیسہ کے کرے تھے جنکا قطر ۴٫۵ انچ تھا۔ کیونڈش کے تجربہ کی طرح کشش کرنے والی قوتیں ایک ہی سطح میں ہوتیں تو اتنی چھوٹی مروڑی سلاخ کے ساتھ ا اور ب دونوں سونے کے کروں کو تقریباً مساوی قوت سے جذب کرتے۔ اس کو روکنے کے لئے پروفیسر بائز نے ا' ا کو ایک سطح میں اور ب، ب کو ۶ انچ نیچے، دوسری سطح میں رکھا۔

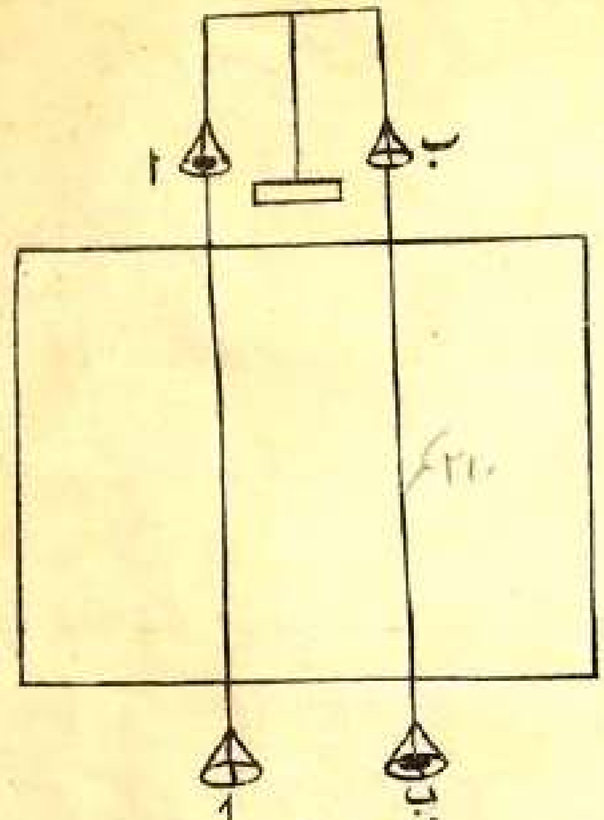
کشش کرنے والی کمیتین ا اور ب ایک کھوکھلے استوانہ نما بکس کے ڈھکن سے جس کا قطر ۱۰ انچ تھا اور جو گھوم سکتا تھا لٹکائی گئیں، اور کرے اب ایک نلی کے اندر لٹکائے گئے جس کا قطر تقریباً ۱٫۵ انچ تھا۔

تجربہ میں کمیتیں ا اور ب، بکس کے ڈھکن کو گھما کر اسطرح رکھی گئی تھیں کہ پہلے ایک سمت میں اور پھر دوسری سمت میں طلائی کروں پر اُن کا اعظم جفت عمل کرے۔ بائز نے جہ کی قیمت مساوات (۳) کی مدد سے دریافت کی اور یہ 6.657×10^{-8} کے مساوی تھی۔

اس تجربہ کو ۱۸۹۶ء میں ڈاکٹر بران نے بھی اس میں کچھ تھوڑی سی تبدیلی کرنے کے بعد دوہرایا۔ اسنے بھی جہ کی قیمت تقریباً یہی دریافت

کی جو بائز کو حاصل ہوئی تھی۔

جہ دریافت کرنے کے لئے پروفیسر جولی کا تجربہ:- پہلے پہل ۱۸۸۱ء میں جولی نے اس تجربہ کو کیا تھا، شکل ۳ میں ایک ترازو دکھایا گیا ہے۔ اس ترازو کو جرمنی میں ایک مینار کی چھت سے لٹکایا گیا۔ چھوٹے پلڑوں ا اور ب سے دو بڑے پلڑے ا، ب لمبے تاروں کے ذریعے ۲۱۰ سم نیچے لٹکائے گئے۔ فرض کرو کہ ا اور ب میں دو ایسے وزن ڈالے گئے کہ دونوں پلڑے



شکل ۳

تعادل میں رہیں، اب اگر ایک وزن ب میں رکھا جائے جیسا کہ شکل سے ظاہر ہے تو یہ وزن زمین کے مرکز کے قریب ہو جائے گا اور اوپر والے وزن سے بھاری ہو جائے گا۔ جولی نے دریافت کیا کہ ۵ کلوگرام کے وزن میں تقریباً ۳۲ ملی گرام کا اضافہ ہوا۔ اس کے بعد جولی نے ایک بڑا لوہے کا ۳۶ انچ قطر والا کرہ نچلے پلڑے کے نیچے رکھا اور اس وقت ۵ کلوگرام میں ۵ر۳۲ ملی گرام کا اضافہ ہوا جبکہ وزن پیشتر کی طرح اوپر سے نیچے کے پلڑے میں لایا گیا، لہذا صرف کرہ کی وجہ سے ۵ر ملی گرام کے مساوی کشش ہوئی۔

فرض کرو کہ پلڑے میں کمیت = م اور زمین کی کمیت = نما اور کرہ کی کمیت = ک تب زمین اور پلڑے کی کمیتوں میں قوت جاذبہ = $\frac{\text{جہ نما م}}{\text{ص}^2}$ = ۵۰۰۰ گرام جہاں ص = زمین کا نصف قطر اگر ص_1 = کرہ کا نصف قطر تو

پلڑے کی کمیت اور کرہ کے درمیان جاذبہ کی قوت = $\frac{\text{جہ ک م}}{\text{ص}_1^2}$

= ۵ ، ملی گرام = ۰۰۰۵، گرام

لہذا ایک کو دوسرے سے تقسیم کرنے سے :-

$$\frac{\text{نما}}{\text{ص}^2} \times \frac{\text{ص}_1^2}{\text{ک}} = \frac{5000}{.005} = 10^6$$

$$\text{لہذا}\quad \frac{\text{نما}}{\text{ک}} = \frac{\frac{4}{3}\pi\,\text{ص}^3 \times \text{ث}}{\frac{4}{3}\pi\,\text{ص}_1^3 \times \text{ث}_1} = \frac{10^6 \times \text{ص}^2}{\text{ص}_1^2}$$

$$\therefore\ \text{ث} = \frac{\text{ص}_1 \times 10^6 \times \text{ث}_1}{\text{ص}}$$ جہاں ث_1 = کرہ کے مادہ کی کثافت

اور ث = زمین کی کثافت

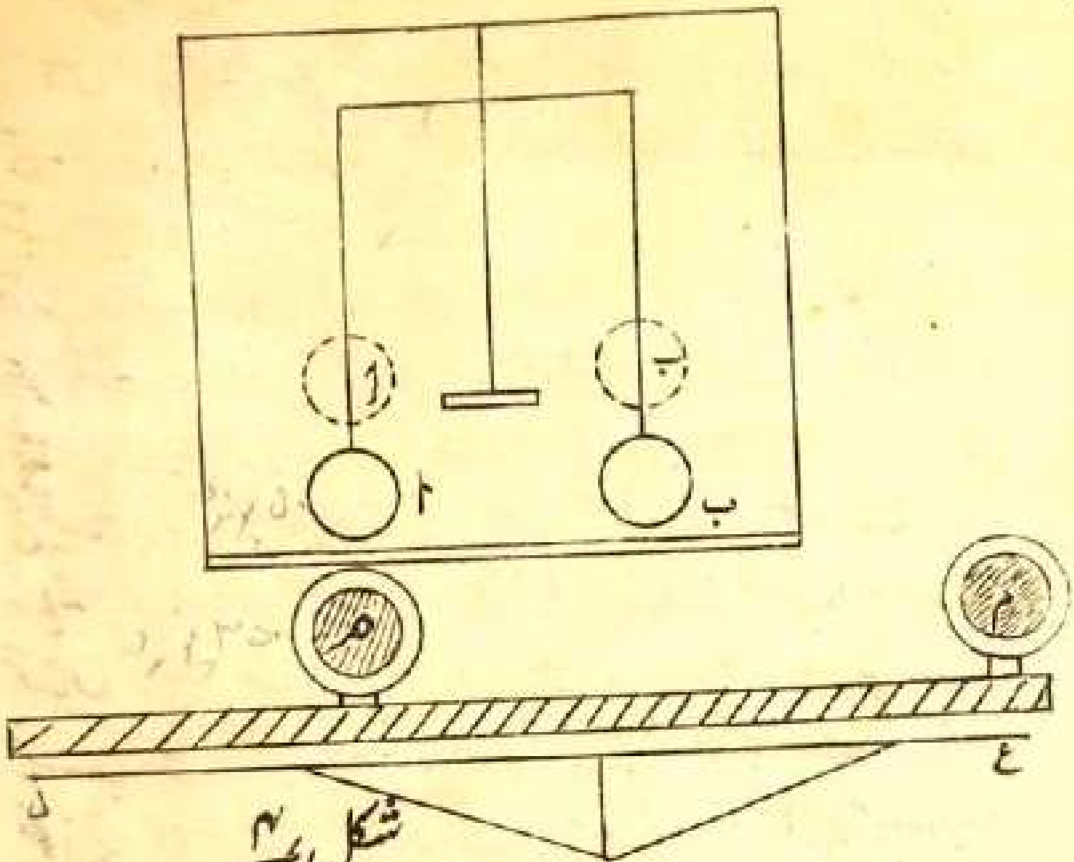
اسطرح جولی نے ث کی قیمت ۵٫۶۹ گرام فی مکعب سمر حاصل کی۔

چونکہ اسطرح ث کی قیمت معلوم ہو چکی ہے اس وجہ سے جہ آسانی سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

اسکے بعد ۱۸۹۶ء میں ریچرڈ اور کریگر مِنسِل نے بھی جولی کی طرح تجربہ کیا اور انہوں نے ث کی قیمت ۵٫۵۱ حاصل کی۔

جہ معلوم کرنے کے لئے پوائنٹنگ کا تجربہ :- شکل ۲ میں طریقہ عمل کی عام ترتیب بتائی گئی ہے۔

ا اور ب دو سیسہ کے گولے ہیں جن میں سے ہر ایک کا وزن ۵۰ پونڈ ہے۔ ان کو ایک مضبوط ترازو کے سروں پر لٹکایا جاتا ہے۔ ترازو کو ایک لکڑی کے بکس میں بند کر دیا جاتا ہے۔



شکل ۴

م ایک بڑا سیسہ کا کرہ ہے جسکا وزن تقریباً ۳۵۰ پونڈ ہے اس کو ایک نالی دار نلی ل ع میں رکھا جاتا ہے۔ حسب ضرورت اس کرہ کو نالی میں لڑھکا کر ۲ کے یا ب کے نیچے لایا جاسکتا ہے۔ م توازن قائم رکھنے والا وزن ہے، ۲ اور م کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ تقریباً ایک فٹ ہوتا ہے۔ جب م ۲ کے نیچے ہوتا ہے تو ۲ پر کشش کا عمل کرتا ہے جس سے اسکا وزن بڑھ جاتا ہے۔

ا اور ب، وہ دو مقامات ہیں جہاں ۲ اور ب، ایک فٹ اور اونچے کر دئے جائیں تو واقع ہوں گے۔ اس صورت میں چونکہ ترازو کی ڈنڈی اور معلق تاروں پر م کی کشش وہی رہتی ہے جو پہلے تھی لہذا ان دو مقاموں پر ۲ اور ب کی کشش میں علی الترتیب فرق لینے سے ڈنڈی وغیرہ کی کشش کے اثرات زائل ہو جاتے ہیں اور صرف فاصلوں کی تبدیلی سے

کشش کا فرق حاصل ہوتا ہے۔

اس طرح پروفیسر پوائنٹنگ نے جہ کی قیمت $۶٫۶۹۸ \times ۱۰^{-۸}$ دریافت کی۔ اب ہم اُن امور پر بحث کرینگے جن کی وجہ سے کلیہ تجاذب میں تغیر واقع ہو سکتا ہے:—

قوت جاذبہ اور واسطہ:— اوپر، قوت جاذبہ کے متعلق جن تجربوں کا ذکر کیا گیا ہے، ان میں تجاذبی اجسام کی کمیتوں کے درمیان ہوائی واسطہ تھا، یہاں یہ سوال پیدا ہوتا ہے کہ واسطہ کی نوعیت کا تجاذبی مستقل کی قیمت پر کوئی اثر بھی ہوتا ہے یا نہیں۔ آسٹن اور تھوئنگ نے اس کو دریافت کرنے کے لئے متعدد تجربے کئے، انہوں نے مختلف اشیا کی تختیاں تجاذبی کمیتوں کے درمیان رکھیں اور یہ دریافت کیا کہ "جہ" کی قیمت پر کوئی اثر نہیں ہوتا اور اگر ہوتا بھی ہو تو مقناطیسیت اور برق میں نفوذ پذیری اور نوعی امالی گنجائش کے اثرات کی بہ نسبت بعید خفیف ہوتا ہے۔

قوت جاذبہ اور کشش کرنے والی کمیتیں:— نیوٹن کے کلیہ کی رو سے کشش کرنے والی کمیتوں کی نوعیت زیادہ اہمیت نہیں رکھتی، صرف کمیت کی مقدار پر، جہ کی قیمت منحصر ہوتی ہے نہ کہ جوہر کی خاصیت پر، یہ ممکن ہے کہ بعض مادہ پر، اسکی کمیت کا مقابلہ کرتے، زیادہ کشش عمل کرتی ہو اور بعض پر کم، کیونڈش کے طریقہ والے تجربوں میں جہ کی قیمت دریافت کرتے وقت، مختلف نوعیت کی اشیا تجاذبی کمیتوں کے طور پر رکھی گئی تھیں مگر جہ کی قیمت میں کوئی فرق نہیں ہوا، اسی طرح کرۂ زمین کی اوسط کثافت کی دریافت میں بھی مختلف نوعیت کی اشیا کو رکھ کر تجربے کئے گئے لیکن عملی طور پر تمام کے لئے نتیجہ ایک ہی حاصل ہوا۔

قوت جاذبہ اور قلمی مادہ:— اکثر صورتوں میں کسی قلمی شے کے طبعی خواص، اسکے اندر مختلف سمتوں میں، مختلف ہوتے ہیں، مثلاً، ان میں

حرارت کی وجہ سے پھیلاؤ مختلف ہوتا ہے، اُن کی موصلیت حرارت یکساں نہیں ہوتی اور ان میں سے نور جب گزرتا ہے تو مختلف سمتوں میں اس کی رفتار بھی مختلف ہوتی ہے۔ اس سے ہم فوراً اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ کسی قلم میں قوت جاذبہ کے خطوط بھی مختلف سمتوں میں غیر مساوی طور پر پھیل جاتے ہیں۔ ڈاکٹر میکینزی⑧ نے امریکہ میں اس ہی کی دریافت کے لئے تجربہ کیا تھا، لیکن نتیجہ کچھ حاصل نہ ہوا، کچھ دنوں بعد پوائنٹنگ اور گرے⑨ نے بھی اس اثر کے معلوم کرنے کے لئے تجربے کئے۔ انہوں نے قسری اہتزاز کے نظریہ کو کام میں لانے کی کوشش اسطرح کی، کہ کوارٹز کا ایک کرہ لیکر، لٹکے ہوئے ایک دوسرے کرہ کے قریب، گھمایا، اگر قوتِ جاذبہ کے خطوط کی تقسیم کوارٹز کے مختلف محوروں پر مختلف ہو تو لٹکے ہوئے اہتزاز کرنے والے کرہ پر ایک جفت عمل کرے گا۔ اگر قسری جفت کا وقت دوران، لٹکے ہوئے نظام کے آزاد وقت دوران کے تقریباً مساوی ہو تو اسکا نتیجہ ایک بڑا اہتزاز ہوگا، لیکن تجربہ سے ایسی کوئی بات نہیں واقع ہوئی جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ قلموں کی صورت میں بھی جہ کی قیمت میں کوئی تبدیلی نہیں واقع ہوتی۔

قوت جاذبہ اور تپش⑨ :- پوائنٹنگ، فلپ اور لنڈالٹ وغیرہ نے یہ معلوم کیا کہ جہ کی قیمت پر تپش کا کوئی اثر نہیں ہوتا۔ بعد میں شا نے ۱۹۱۶ء میں تجربہ سے یہ دریافت کیا کہ جہ کی قیمت، جبکہ کشش کرنے والی کمیتیں گرم کی جاتی ہیں، کسی قدر بڑھ جاتی ہے، لیکن اسکے بعد کے نتائج سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ صفر° م اور ۲۵۰° م کے درمیان جہ کی قیمت عملی طور پر مستقل رہتی ہے۔

نیوٹن کے کلیہ کی صحت⑩ :- متعدد تجربوں سے نیوٹن کا کلیہ تجاذب ثابت ہوچکا ہے لیکن مشاہدات اور نتیجے میں کسی قدر فرق ہو تو اس کی

وجہ یہ ہے کہ کلیہ مذکور تقریباً صحیح ہے۔ اس کلیہ میں دو بڑی دقتیں پیش آتی ہیں۔ اول یہ کہ آئنسٹائین کے "نظریہ اضافیت" کی رو سے کسی شئے کی کمیت اسکی رفتار کے ساتھ متغیر ہوتی ہے اور اس وجہ سے ہمیں شبہ یہ ہونے لگتا ہے کہ نیوٹن کے ضابطے میں درج کرنے کے لئے کونسی قیمت لینی ہوگی۔

دوم یہ کہ "فاصلے" کا مفہوم اتنا سادہ نہیں ہے جتنا کہ عام طور پر خیال کیا جاتا ہے اسکی پیمائش مشاہد کے حالات پر منحصر ہوتی ہے نظریہ اضافیت کی رو سے دو نقطوں کے درمیان فاصلہ تجربہ کرنے والے کے ساتھ متغیر ہوتا رہتا ہے۔

نیوٹن کے کلیہ کی ان دونوں خامیوں سے، مشاہدات اور واقعات کی صحیح قیمتوں کے فرق کی توضیح ہوتی ہے۔ آئنسٹائین نے اپنے نظریہ اضافیت کی بنا پر نیوٹن کے کلیہ کی تصحیح کرنے کی کوشش کی، اس لئے اس تصحیح شدہ کلیہ کو ہم "آئنسٹائین نیوٹنی کلیہ یا اضافیتی کلیۂ تجاذب" سے موسوم کریں گے۔

نور کی شعاع بھی اپنی تیز رفتار کی وجہ سے کچھ کمیت رکھتی ہے اور اس میں، جبکہ وہ کسی طاقتور تجاذبی میدان میں حرکت کر رہی ہو، انصراف کا ہونا ضروری ہے۔ ایسا انصراف اور چنانچہ مبدء نور کا اپنے مقام سے ظاہری طور پر ہٹاؤ آئنسٹائین نیوٹنی کلیہ کی مدد سے، حسابی طور پر بالکل صحیح پیمانہ پر دریافت کیا جا سکتا ہے لیکن صرف نیوٹن کے کلیہ سے نصف ہٹاؤ حاصل ہوتا ہے اسکے متعلق یہاں پر ہم اس سے زیادہ تفصیلی بحث نہیں کر سکتے اسلئے کہ تشفی صرف اس صورت میں حاصل ہوسکتی ہے جبکہ نظریہ اضافیت کا مطالعہ نہایت گہرے طور پر کیا جائے۔ یہاں البتہ اتنا کہا جا سکتا ہے کہ نیوٹن کا "کلیہ" بالکل "صحیح نہیں ہے اور صرف اقل ترین فاصلوں کی صورت میں اس سے کام لیا جا سکتا ہے۔

Chapter III.

(۱) Properties of Matter "Poynting & Thomson" P33 (1922)
(۲) Phil. Trans. 141, 297, (1856)
(۳) Phil. Trans. 83, 388 (1798)
(۴) General Physics for students "Edser" P207, (1926)
(۵) Phil. Trans. A. 182, 565, (1891)
(۶) Phys. Rev. 5 (1897)
(۷) Phys. Rev. 2, (1895)
(۸) Phil. Trans. 192, 245 (1899)
(۹) Properties of Matter "Newman & Searle" P74, (1928)
(۱۰) „ „ „ „ P76 (1928)

چوتھا باب

لچک، مروڑ، کھچاؤ اور مرغولہ دار کمانیاں

تعریفات:۔ ایک متجانس جسم وہ ہے کہ جب دو مساوی مستطیلی ٹکڑے اسمیں سے کاٹے جائیں اور ایک ٹکڑے کے ایسے کنارے جو دوسرے ٹکڑے کے متناظر کناروں کے متوازی ہوں تو بالکل ایک دوسرے کے مماثل ہوں اور آپس میں مطلق تمیز نہ کئے جا سکیں۔ سیب، موم، کوارٹز، شیشہ وغیرہ متجانس اجسام کی مثالیں ہیں۔

کوارٹز کے ایک کرہ کو اگر گرم کیا جائے تو چونکہ وہ ایک سمت میں، دوسری سمت کی نسبت زیادہ پھیلتا ہے اسوجہ سے کرہ نہیں باقی رہتا۔ ایسے اجسام غیر متساوی السموت کہلاتے ہیں۔

ایک ایسا جسم جس کے دو مساوی متشابہ ٹکڑے کسی وضع سے کاٹے جائیں جو بالکل مماثل اور آپس میں تمیز نہ کئے جا سکیں تو وہ متساوی السموت کہلاتا ہے، مثلاً شیشہ متساوی السموت شے ہے جب کسی جسم کی شکل یا حجم میں تبدیلی ہوتی ہے تو کہا جاتا ہے کہ اس میں بگاڑ یا فساد واقع ہو رہا ہے اور یہ تبدیلی، بگاڑ یا فساد کہلاتی ہے۔

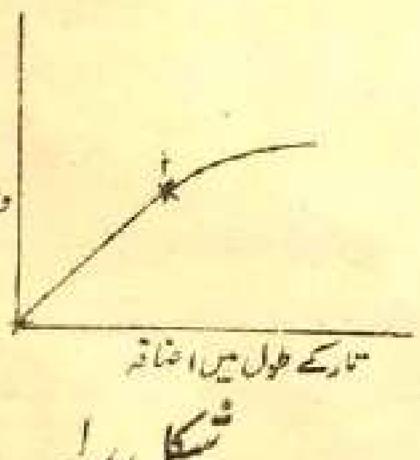
کسی جسم کے دو خطوط جو بگاڑ کے پہلے مساوی اور متوازی تھے، بگاڑ کے بعد بھی مساوی اور متوازی ہیں تو ایسا بگاڑ "متجانس بگاڑ" کہلاتا ہے۔

ایسی تین سمتیں جو کسی جسم میں علی القوائم تھیں اور بگاڑ کے بعد بھی اگر

ایک دوسرے کے علی القوائم رہیں تو یہ بگاڑ کے صدر محورین کہلاتے ہیں۔

ایسا بگاڑ جو کسی جسم کی شکل میں تو تبدیلی پیدا کرتا ہے لیکن جسامت کو نہیں بدلتا جبر کہلاتا ہے۔ لچک دار جسم وہ ہے کہ اگر قوتوں کے اثر سے اسکی جسامت اور حجم میں تبدیلی پیدا ہو جائے تو ان قوتوں کو علیحدہ کر دینے کے بعد جسم مذکور اپنی اصلی حالت پر واپس آجائے۔

اگر ایک تار سے ہم وزن لٹکائیں تو تار کے طول میں اضافہ ہوگا۔ اگر تار لچک دار ہو تو یہ اضافہ طول لٹکائے ہوئے وزن کے متناسب ہوگا۔ اگر وزن کو ہم بتدریج بڑھاتے جائیں تو کسی خاص کلیہ کے تحت طول میں بھی بتدریج اضافہ ہوتا جائے گا اگر وزن ایک خاص حد سے بڑھایا جائے تو ایک ایسا وقت آئے گا کہ تار کے طول میں، ایک بالکل چھوٹے وزن کے اضافہ سے بھی، انتہائی اضافہ ہونے لگے گا۔ ایسے وزن کو کہ جس کے لگانے کے بعد تار میں لچک کے خواص باقی نہ رہیں، اس تار کے "نقطہ مغلوبیت" سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ شکل ۱ کی ترسیم کو دیکھو، نقطہ ا تک پہنچنے تک تار کامل لچک دار رہتا ہے۔



شکل ۱

نوٹ۔ یہاں ہم جو ضابطے اخذ کریں گے اور جن تجربوں کا ذکر کریں گے ان سب میں یہ فرض کر لیا جائے گا کہ جسم اپنی کامل لچک کے خواص کو برقرار رکھتا ہے۔

ہوک کا کلیہ :- لاطینی زبان میں جملہ "UTTENSio SicVis" سے اسکی تعبیر ہوتی ہے یعنی ہم اگر کسی لچک دار چیز کو کھینچیں تو کھنچاؤ، کھینچنے

والی قوت کے متناسب ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ہم ایک ایسا تار لیتے ہیں جسکا طول ل اور تراش عمودی کا رقبہ ا ہے۔ اگر ایک قوت ق لگانے سے تار میں کھچاؤ لَ ہو تو ہوک کا کلیہ یہی ہے کہ لَ $\propto$ ق۔ ینگ نے ہوک کے کلیہ کو اسطرح بیان کیا۔

زور $\propto$ بگاڑ کے یعنی $\frac{\text{زور}}{\text{بگاڑ}} = \text{گ} = \text{مستقل}$

لیکن زور $= \frac{\text{ق}}{\text{ا}}$ اور بگاڑ $= \frac{\text{لَ}}{\text{ل}}$

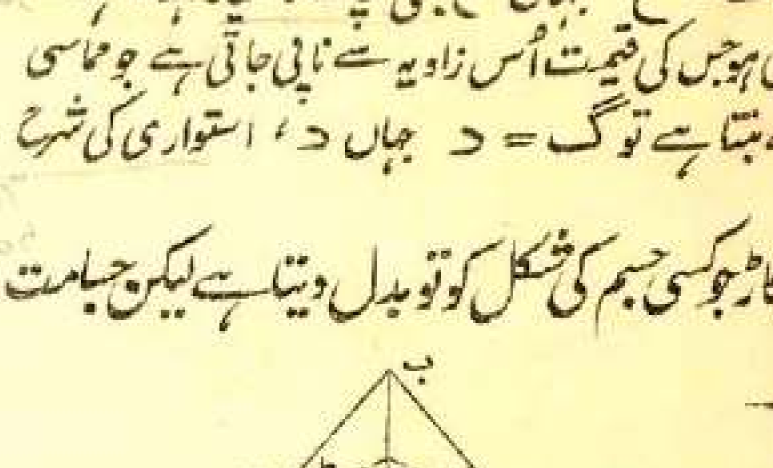
لہذا $\frac{\frac{\text{ق}}{\text{ا}}}{\frac{\text{لَ}}{\text{ل}}} = \frac{\text{ق ل}}{\text{ا لَ}} = \text{گ} = \text{ی}$ فرض کرو

اس ی کو "ینگ کے معیار لچک" سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

بگاڑ سے پہلے کسی جسم کا جو اکائی حجم ہوتا ہے، اس حجم کی کمی اگر بگاڑ ہے تو ایسی صورت میں گ = ح جہاں ح حجمی لچک کا معیار کہلاتا ہے۔

اگر بگاڑ جزی ہو جس کی قیمت اُس زاویہ سے ناپی جاتی ہے جو مماسی زور کی وجہ سے بنتا ہے تو گ = د جہاں د، استواری کی شرح کہلاتا ہے۔

متجانس بگاڑ جو کسی جسم کی شکل کو تو بدل دیتا ہے لیکن جسامت کو نہیں بدلتا۔(۱)



شکل ۲

کسی جسم میں فرض کرو کہ و ا اور و ب دو محور ہیں جن کی سمتوں میں

پھیلاؤ یا سکڑاؤ واقع ہوتا ہے۔

اور نیز یہ بھی فرض کرو و ا = و ب = و اَ = و بَ = ۱

یعنی بگاڑ سے پہلے فرض کرو کہ ا ب اَ بَ ایک مربع ہے بگاڑ کے بعد فرض کرو کہ مربع، ایک متوازی الاضلاع ل ج لَ جَ بن جاتا ہے۔

یہ فرض کرتے ہوئے کہ بگاڑ متجانس ہے

و ا کی سمت میں اضافہ = و ب کی سمت میں کمی

= ن (فرض کرو)

تب و ل = ۱ + ن اور و ج = ۱ − ن

چونکہ (و ل)^2 + (و ج)^2 = (ل ج)^2

∴ (ل ج)^2 = ۲ ن^2 + ۲ .... ≏ ۲

کیونکہ ن کی قیمت بہت ہی چھوٹی ہونے کی وجہ سے ن کے بڑے قوت نماؤں والی رقموں کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

(ا ب)^2 = ۱^2 + ۱^2 = ۲

لہذا ا ب = ل ج

اور اسی طرح اَ بَ = لَ جَ

چونکہ ا ب = √۲ = اَ بَ

∴ ابتدائی رقبہ = √۲ × √۲ = ۲

اور بگاڑ کے بعد جدید رقبہ = ل ج × لَ جَ

≏ √۲ × √۲ = ۲

لہذا رقبہ یوں کہنا چاہیئے کہ جسامت میں کوئی تبدیلی نہیں واقع ہوگی۔

ل ج لَ جَ کو اگر اس طرح گھمایا جائے کہ خط ل ج، ا ب سے

منطبق ہو جائے اور ل ج کو ا ب کی سمت میں اِتنا ہٹایا گیا ہے کہ ج نقطہ ب سے منطبق ہو گیا ہے۔

اس صورت میں ج لَ، ب اَ کے ساتھ جو زاویہ بنائے گا وہ

= ⦣ب ق ج + ⦣ب پ ج = ۲ ط

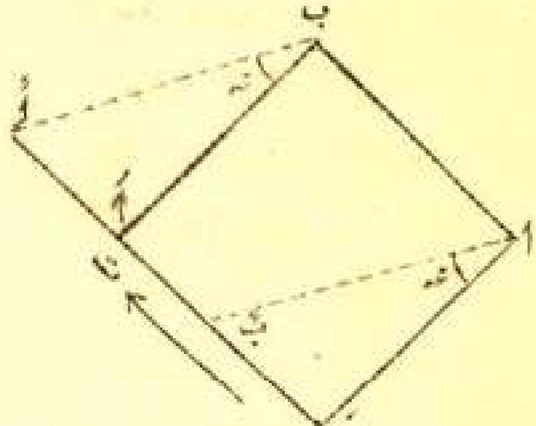
یہی چیز اُسوقت بھی ہوتی اگر ہم ا ب کو قائم رکھتے اور جسم کے اندر کے ہر ایک نقطہ کو ا ب کے متوازی ایک مماسی قوت ت سے اِتنے فاصلہ تک ہٹاتے جو ا ب کے متناسب ہوتا۔

دیکھو شکل ۳ ل ج کو ا ب کی سمت میں گھمانے اور ہٹانے کے بعد اَ بَ، لَ جَ کا نیا مقام ہوگا۔

لہذا ⦣اَ ب اَ = ع

= ۲ ط

زاویہ ع، جزئی زاویہ کہلاتا ہے۔



شکل ۳

شکل ۲ میں ا م ایک ایسا خط کھینچو جو ج ل پر عمود ہو۔

چونکہ ⦣ل پ ا بہت چھوٹا ہے، لہذا

⦣پ ل ا = ⦣پ ا و = ۴۵°

اور دائری پیمانہ میں زاویہ ط = ا م / ا پ

= ا ل جب ⦣پ ل ا / (ط/۲)

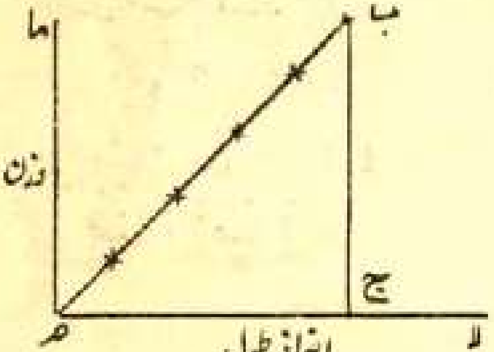
= ا ل = ن

چونکہ ا پ ــــــ ۱/۲ ا ب

لہذا جزئی زاویہ عہ = ۲ طہ = ۲ ن

کام جو بگاڑ پیدا کرنے میں صرف ہوتا ہے ⑦ :-

اگر یہ ہم فرض کر لیں کہ ہوک کا کلیہ صحیح ہے تو تار کے اضافۂ طول کی ترسیم اُس پر لگائے ہوئے متناظر اوزان کے مقابلہ میں جو آئیگی وہ شکل ۴ کے مطابق ہوگی۔



شکل ۴

تار کو ھ سے ج تک کھینچنے میں جو کام ہوا اُس کی تعبیر مثلث ھ ج ب کے رقبہ سے ہوگی اور

یہ = ۱/۲ ھ ج × ج ب

اگر تار کی تراش عمودی کا رقبہ = ا اور تار کا طول = ل

تو زور = ج ب / ا

اور بگاڑ = ھ ج / ل

∴ کام جو ہوا = ۱/۲ × ا × ل × بگاڑ × زور

لیکن ا × ل = تار کے حجم کے

لہذا تار کے فی اکائی حجم میں توانائی = ۱/۲ × زور × بگاڑ

اگر جسم کے ذرات ایک مماسی زور سے آگے کی جانب کھینچے جائیں جیسا کہ شکل ۳ میں دکھایا گیا ہے اور جزئی زاویہ عہ ہو تو اس جسم کی توانائی فی اکائی حجم = ۱/۲ ت عہ اگر کسی کھینچنے والی قوت ق کی سمت میں جو اضافۂ طول ہوتا ہے وہ ن فرض کیا جائے تو ن ایک ایسی سمت میں بھی گھٹاؤ ہوگا جو کھنچاؤ کی سمت کے علی القوائم ہو اور ایسی

صورت میں ق ایک دھکیلنے والی قوت ہوگی۔

لہذا جسم کے فی اکائی حجم کے لئے کھنچاؤ سے جو کام ہوگا وہ

= ½ ق × ن

لہذا جسم کے فی اکائی حجم کیلئے دھکیلنے سے جو کام ہوگا وہ

= ½ ق × ن

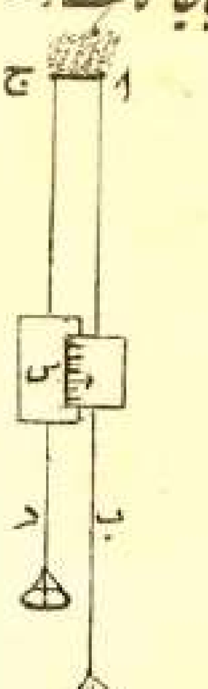
لہذا مجموعی توانائی فی اکائی حجم = ½ ق ن + ½ ق ن = ق ن

∴ ق ن = ½ ت عہ   مگر ہم کو معلوم ہے کہ عہ = ۲ ن

∴ ق = ت

اگر د = استواری کی شرح تو د = ت / عہ = ق / ۲ن

ینگ کا معیار لچک حسب ذیل طریقہ سے دریافت کیا جاتا ہے:-



شکل ۵

ا ب اور ج د دو تار ہیں جو ا اور ج پر مضبوطی کے ساتھ جڑ دئے گئے ہیں، س ایک کسر پیما ہے۔ پہلے دونوں پلڑوں میں جن کا وزن مساوی ہوتا ہے، مساوی باٹ رکھ دئے جاتے ہیں پھر ت پلڑے میں اضافہ وزن ک ج رکھا جاتا ہے اور کسر پیما س کے ذریعہ تار ا ب کا اضافہ طول لَ معلوم کر لیا جاتا ہے اگر ا ب کا ابتدائی طول ل معلوم ہو اور تار کے تراش عمودی کا رقبہ ا ہو تو:-

ینگ کا معیار لچک ی = ک ج ل / ا لَ

ی کی دریافت کے دیگر طریقے آئندہ اس باب میں بیان کئے جائیں گے۔

آواز کی کتابوں میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ سر = √(ح / ثہ)

جہاں ح = واسطہ کی حجمی لچک کا معیار

کثـ = واسطہ کی کثافت

اور سا = آواز کی رفتار اس مادی واسطہ میں

اس سے ح کی قیمت معلوم کی جاسکتی ہے۔

کسی گیس کے لئے نیوٹن نے بائیل کے کلیہ کی مدد سے ثابت کیا تھا کہ

ح = د یعنی دباؤ کے

لیکن لاپلاس نے بعد میں یہ ثابت کر دکھایا کہ ح = لا د

جہاں لا = $\dfrac{\text{مستقل دباؤ کے تحت حرارت نوعی}}{\text{مستقل حجم کے تحت حرارت نوعی}}$

پواساں کی نسبت :- فرض کرو کہ ایک سلاخ جس کی تراش عمودی کا رقبہ اکائی ہے ق قوت سے کھینچی جارہی ہے اور بڑھاؤ یا طول میں اضافہ فی اکائی طول = عہ ق ' جہاں عہ کوئی مستقل ہے

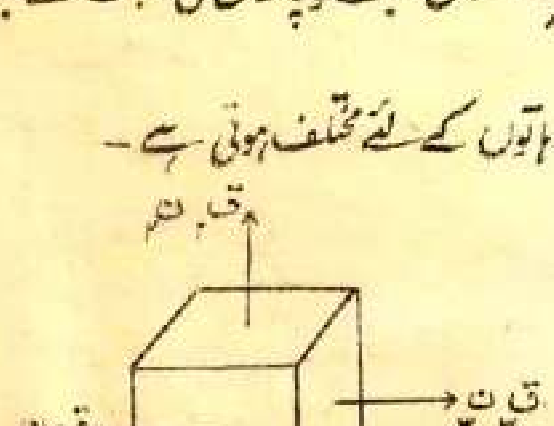
سلاخ جیسی جیسی کھینچتی جائے گی اسکے تراش عمودی کا رقبہ بھی کم ہوتا جائیگا۔
فرض کرو کہ سلاخ کی موٹائی میں فی اکائی طول کمی = بہ ق = گھٹاؤ '
جہاں بہ کوئی مستقل ہے۔

تب $\dfrac{\text{بہ ق}}{\text{عہ ق}} = \dfrac{\text{بہ}}{\text{عہ}}$ ، اس نسبت کو پواسان کی نسبت سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

پواسان کی نسبت مختلف دھاتوں کے لئے مختلف ہوتی ہے۔

ایک مکعب کی شکل میں

تبدیلی :- فرض کرو کہ شکل ۷۶ میں جو مکعب دکھایا گیا ہے اسکے ہر ایک ضلع کا طول اکائی ہے۔



شکل ۷۶

فرض کرو کہ ق$_1$، ق$_2$، ق$_3$ قوتیں فی اکائی رقبہ
مکعب کے ضلع کے دونوں جانب علی الترتیب لا، ما، یا، کی سمتوں
میں عمل کر رہی ہیں اور فرض کرو کہ ن$_1$، ن$_2$، ن$_3$ کھنچاؤ یا اضافہ لا، ما، یا
کی سمتوں میں ہوتا ہے۔

چونکہ مکعب کا ابتدائی حجم = ۱

اور بعد میں اسی مکعب کا حجم = (۱ + ن$_1$)(۱ + ن$_2$)(۱ + ن$_3$)

= ۱ + ن$_1$ + ن$_2$ + ن$_3$ جبکہ ن$_1$، ن$_2$
اور ن$_3$ کی قیمتیں بالکل چھوٹی ہوں۔

لہذا اضافہ حجم = ن$_1$ + ن$_2$ + ن$_3$

= اضافہ طول فی اکائی طول لا کی سمت میں + اضافہ طول فی اکائی
طول ما کی سمت میں + اضافہ طول فی اکائی طول یا کی سمت میں

اب اگر ق$_1$ کی سمت میں کھنچاؤ اور ق$_2$ اور ق$_3$ کی سمت میں گھٹاؤ واقع ہو

تو ن$_1$ = ع ق$_1$ − ب ق$_2$ − ب ق$_3$
= ع ق$_1$ − ب (ق$_2$ + ق$_3$)
اور اسی طرح ن$_2$ = ع ق$_2$ − ب ق$_1$ − ب ق$_3$
= ع ق$_2$ − ب (ق$_1$ + ق$_3$)
اور ن$_3$ = ع ق$_3$ − ب ق$_1$ − ب ق$_2$
= ع ق$_3$ − ب (ق$_1$ + ق$_2$) .... (۱)

اگر ق$_1$ = ق$_2$ = ق$_3$ تو ن$_1$ = ن$_2$ = ن$_3$

∴ ن = ع ق − ۲ ب ق

کھنچاؤ یا گھٹاؤ فی اکائی حجم میں اور اضافہ دباؤ فی اکائی رقبہ میں جو نسبت
ہوتی ہے وہ لچکاؤ کی شرح کہلاتی ہے اور اسکے مقلوب یعنی $\frac{1}{\text{لچکاؤ کی شرح}}$

کو حجمی لچک کے معیار سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

یعنی اگر $\text{ن}_1 = \text{ن}_2 = \text{ن}_3$ اور $\text{ق}_1 = \text{ق}_2 = \text{ق}_3$

$$\text{تو پچکاؤ کی شرح} = \frac{\text{کھنچاؤ یا گھٹاؤ فی اکائی حجم}}{\text{کھینچنے والا زور یا دباؤ فی اکائی رقبہ}} = \frac{3\,\text{ن}_1}{\text{ق}_1}$$

اسلئے، حجمی لچک کا معیار اگر ح فرض کیا جائے تو:۔

$$\text{ح} = \left[\frac{\text{ق}_1}{3\,\text{ن}_1}\right] = \frac{\text{ق}_1}{3(\text{عہ}\,\text{ق}_1 - 2\,\text{بہ}\,\text{ق}_1)}$$

$$= \frac{1}{3(\text{عہ} - 2\,\text{بہ})}$$ بشرطیکہ $\text{ق}_1 = \text{ق}_2 = \text{ق}_3$

اور $\text{ن}_1 = \text{ن}_2 = \text{ن}_3$

اب فرض کرو کہ $\text{ق}_1 = -\text{ق}_2$ اور $\text{ق}_3 =$ صفر یعنی $\text{ن}_1 = -\text{ن}_2$ اور

$\text{ن}_3 =$ صفر

$$\text{تب}\ \text{ن}_1 = \text{عہ}\,\text{ق}_1 + \text{بہ}\,\text{ق}_1 = \text{ق}_1(\text{عہ} + \text{بہ})$$

لیکن استواری کا معیار $= \left[\frac{\text{ق}_1}{2\,\text{ن}_1}\right] =$ فرض کرو د

$$= \frac{\text{ق}_1}{2\,\text{ق}_1(\text{عہ} + \text{بہ})}$$

$$= \frac{1}{2(\text{عہ} + \text{بہ})}$$ بشرطیکہ $\text{ق}_1 = -\text{ق}_2$

اور $\text{ق}_3 =$ صفر

اور ینگ کا معیار لچک ی $= \frac{\text{ق}_1}{\text{ن}_1} = \frac{1}{\text{عہ}}$ بشرطیکہ $\text{ق}_2 = \text{ق}_3 =$ صفر

ح اور د کی اوپر والی مساواتوں کی مدد سے ہم عہ اور بہ کی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں۔

اُن مساواتوں کو حل کرنے سے عہ = (۳ح + د) / (۹ح د) اور بہ = (۳ح − ۲د) / (۱۸ ح د)

حاصل ہوتے ہیں۔

∴ ی = ۱/عہ = ۹ح د / (۳ح + د) اور پواسان کی نسبت بہ/عہ

= مہ فرض کرو = (۳ح − ۲د) / ۲(۳ح + د) حاصل ہوگی۔

اب چونکہ ی = ۹ح د / (۳ح + د)

∴ ۳ح ی + د ی = ۹ح د

یعنی ح(۹د − ۳ی) = د ی ∴ ح = د ی / (۹د − ۳ی) = د ی / ۳(۳د − ی)

∴ مہ = (۳ح − ۲د) / ۲(۳ح + د) = (۳ د ی / ۳(۳د − ی) − ۲د) / ۲(د + ۳ د ی / ۳(۳د − ی))

= ی / ۲د − ۱ .... (۲)

پھر چونکہ مہ = (۳ح − ۲د) / ۲(۳ح + د)

اسلئے ۲مہ(۳ح + د) = ۳ح − ۲د

یعنی ۳ح(۱ − ۲مہ) = ۲د(مہ + ۱)

∴ مہ کی قیمت کو −۱ اور ۱/۲ کے درمیان ہونا چاہیئے۔

اب شکل ۶ پر غور کرو۔ ق۱، ن۱ کے متناسب ہے اور دوسری دو سمتوں میں وہ ن۲ اور ن۳ کے متناسب ہے۔

∴ ق۱ = ک ن۱ + گ (ن۲ + ن۳)

اسیطرح $ق_{۱} = ک\,ن_{۱} + گ\,(ن_{۱} + ن_{۲})$

اور $ق_{۲} = ک\,ن_{۲} + گ\,(ن_{۱} + ن_{۲})$ جہاں ک اور گ مستقل ہیں ……(۳)

اگر $ن_{۲} = ن_{۳} =$ صفر تو $\frac{ق_{۱}}{ن_{۱}} = ک = ی$

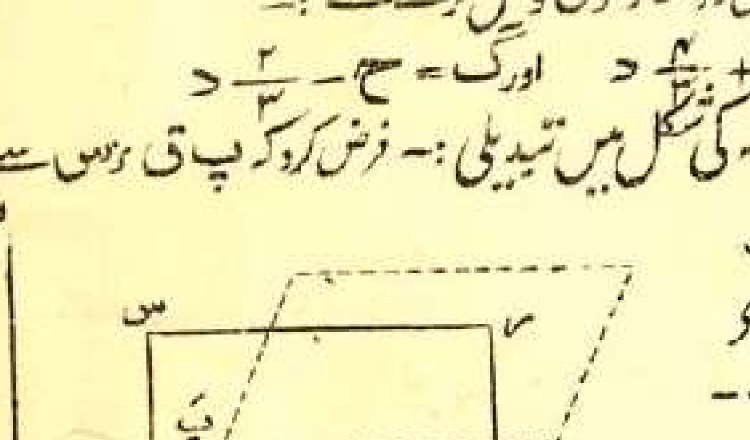
اگر $ن_{۱} = ن_{۲} = ن_{۳}$ تو $\frac{ق_{۱}}{۳\,ن_{۱}} = ح = \frac{ک + ۲گ}{۳}$

اور اگر $ن_{۱} = -ن_{۲}$ اور $ن_{۳} =$ صفر تو $\frac{ق_{۱}}{۲\,ن_{۱}} = د = \frac{ک - گ}{۲}$

اوپر کی آخری دو مساواتوں کو حل کرنے سے :-

$ک = ح + \frac{۴}{۳}\,د$ اور $گ = ح - \frac{۲}{۳}\,د$

ایک مستطیلی حصہ کی شکل میں تبدیلی :- فرض کرو کہ پ ق ر س سے کسی شے کے ایک چھوٹے مستطیل ٹکڑے کی تعبیر ہوتی ہے۔ (دیکھو شکل ۷) نقطہ پ کے محدد فرض کرو کہ لا، ما ہیں اور نقطہ ر کے (لا + لاَ)، (ما + ماَ) ہیں، اس صورت میں پ ق = لاَ اور ق ر = ماَ



شکل ۷

فرض کرو کہ نقطہ پ کا نقل مکان، بگاڑ کی وجہ سے (عہ، بہ) ہوتا ہے

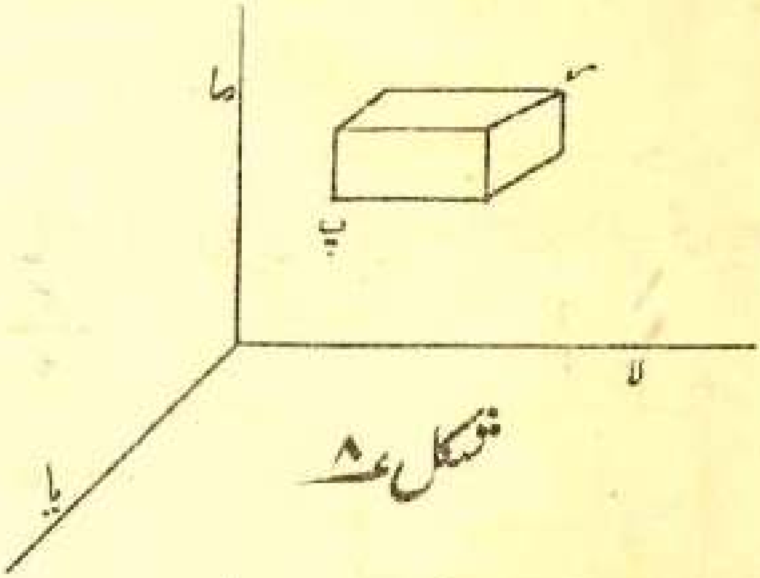
تب نقطہ ق کا نقل مکان $\left(عہ + \frac{فرعہ}{فرلا}\,.\,لاَ\ ،\ بہ + \frac{فربہ}{فرلا}\,.\,لاَ\right)$ ہوگا

اسی طرح نقطہ س کا نقل مکان $= \left(عہ + \frac{فرعہ}{فرما}\,.\,ماَ\ ،\ بہ + \frac{فربہ}{فرما}\,.\,ماَ\right)$

اور نقطہ س کا نقل مکان = $\left(\text{عہ} + \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرلا}}\cdot\text{لا} + \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرما}}\cdot\text{ما}\right.$،

$\left.\text{بہ} + \frac{\text{فربہ}}{\text{فرما}}\,\text{ما} + \frac{\text{فربہ}}{\text{فرلا}}\cdot\text{لا}\right)$

سہ ابعادی حالت میں فرض کرو کہ س کے جدید محدد، پ کا لحاظ کرتے لاَ، ماَ، یاَ ہیں اور تینوں سمتوں میں س کا نقل مکان علی الترتیب عہَ، بہَ، جہَ ہے۔



شکل عہ۸

$$\text{عہَ} = \text{عہ} + \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرلا}}\,\text{لا} + \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرما}}\cdot\text{ما} + \frac{\text{فرعہ}}{\text{فریا}}\cdot\text{یا}$$

$$\text{بہَ} = \text{بہ} + \frac{\text{فربہ}}{\text{فرما}}\,\text{ما} + \frac{\text{فربہ}}{\text{فرلا}}\cdot\text{لا} + \frac{\text{فربہ}}{\text{فریا}}\,\text{یا}$$

$$\text{جہَ} = \text{جہ} + \frac{\text{فرجہ}}{\text{فریا}}\cdot\text{یا} + \frac{\text{فرجہ}}{\text{فرلا}}\cdot\text{لا} + \frac{\text{فرجہ}}{\text{فرما}}\,\text{ما}$$

$$\therefore \text{لاَ} = \text{لا} + \text{عہَ} - \text{عہ} = \text{لا}\left(1 + \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرلا}}\right) + \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرما}}\cdot\text{ما} + \frac{\text{فرعہ}}{\text{فریا}}\cdot\text{یا}$$

$$\text{ماَ} = \text{ما} + \text{بہَ} - \text{بہ} = \frac{\text{فربہ}}{\text{فرلا}}\cdot\text{لا} + \text{ما}\left(1 + \frac{\text{فربہ}}{\text{فرما}}\right) + \frac{\text{فربہ}}{\text{فریا}}\cdot\text{یا}$$

$$\text{یاَ} = \text{یا} + \text{جہَ} - \text{جہ} = \frac{\text{فرجہ}}{\text{فرلا}}\cdot\text{لا} + \frac{\text{فرجہ}}{\text{فرما}}\cdot\text{ما} + \text{یا}\left(1 + \frac{\text{فرجہ}}{\text{فریا}}\right)$$

خالص متجانس بگاڑ اگر واقع ہو رہا ہو تو
بگاڑ کے صدر محور اسی سمت میں برقرار رہتے ہیں لہذا

$$\left.\begin{aligned} \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرما}} &= \frac{\text{فرعہ}}{\text{فریا}} = \text{صفر} \\ \frac{\text{فربہ}}{\text{فرلا}} &= \frac{\text{فربہ}}{\text{فریا}} = \text{صفر} \\ \frac{\text{فرجہ}}{\text{فرلا}} &= \frac{\text{فرجہ}}{\text{فرما}} = \text{صفر} \end{aligned}\right\}$$

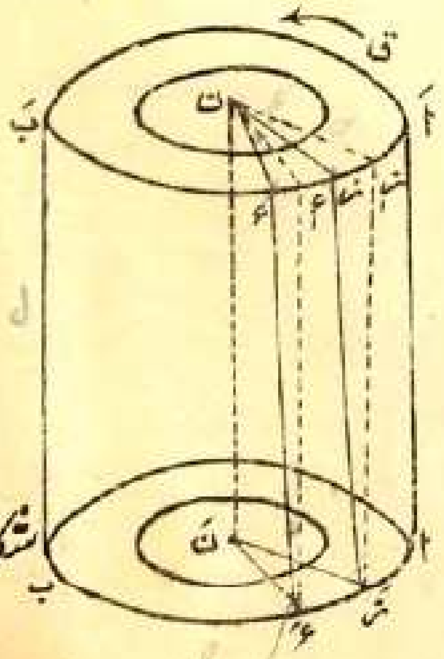
$$\therefore \text{لاَ} = \text{لا}\left(1 + \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرلا}}\right) = \text{لا}\left(1 + \text{ن}_1\right)$$

$$\text{ماَ} = \text{ما}\left(1 + \frac{\text{فربہ}}{\text{فرما}}\right) = \text{ما}\left(1 + \text{ن}_2\right)$$

$$\text{اور یاَ} = \text{یا}\left(1 + \frac{\text{فرجہ}}{\text{فریا}}\right) = \text{یا}\left(1 + \text{ن}_3\right)$$

جہاں ن_1، ن_2، ن_3 لا، ما اور یا سمتوں میں اضافہ طول کو علی الترتیب تعبیر کرتے ہیں۔

ٹھوس اسطوانہ کی مروڑ: شکل ۹ میں ایک اسطوانہ دکھلایا گیا ہے۔



شکل ۹

فرض کرو کہ اس اسطوانے کا طول ل اور اسکا محور ن نَ ہے، اسکی اوپر والی سطح کے کنارہ پر دو نقطے جو ایک دوسرے سے قریب ہوں ع اور ش لو، اور نچلے رخ کی سطح پر بھی دو نقطے عَ اور شَ اسی

طرح لو۔ فرض کرو کہ اسطوانہ کا نچلا حصہ ا ب مضبوطی کے ساتھ جکڑ دیا گیا ہے اور اوپر کے حصہ میں دائری وضع میں ایک جفت عمل کر رہا ہے۔

فرض کرو کہ اسطوانہ مروڑ کی وجہ سے زاویہ عہ مروڑا جاتا ہے، یعنی بالفاظ دیگر، فرض کرو کہ اسطوانہ میں مروڑ = عہ

اب اس اسطوانہ کے حصہ ع ن ن' ع' پر غور کرو۔ نقاط ع ن ن' اب، ع، ن، پر آگئے ہیں۔

لیکن ن' ع' وہیں اپنی پہلی وضع میں قائم ہیں۔

زاویہ مروڑ عہ = ∠ ع ن ع، = ∠ ن سان ن،

اور ع ع، = ص عہ جہاں ص = اسطوانہ کا نصف قطر

اور $\angle$ ع ع' ع، = $\frac{\text{ص عہ}}{\text{ل}}$

فرض کرو کہ مروڑی قوت = س فی اکائی رقبہ = زور۔

چونکہ $\frac{\text{زور}}{\text{بگاڑ}}$ = استواری کا معیار د

∴ زور = س = د × بگاڑ = د × $\frac{\text{ص عہ}}{\text{ل}}$

فرض کرو کہ ع کے اطراف کے ایک چھوٹے ٹکڑے کا رقبہ = ا

لہذا مماسی قوت = $\frac{\text{د ص عہ}}{\text{ل}}$. ا

لہذا محور کے گرد قوتوں کا معیار اثر = $\frac{\text{د ص عہ}}{\text{ل}}$ ا ص = $\frac{\text{د عہ ا ص}^2}{\text{ل}}$

تمام چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں کے معیار اثر کا مجموعہ محور کے گرد =

= $\frac{\text{د عہ}}{\text{ل}}$. مج ا ص^2

لیکن مج ا ص^2 قطبی جمود کا معیار اثر کہلاتا ہے جو فرض کرو = مج

∴ قوتوں کے اثری معیاروں کا مجموعہ = جفت = ق = $\frac{\text{د عہ}}{\text{ل}}$. مج

لیکن کسی اسطوانے کا مج اسکے محور کے گرد = $\frac{\pi\, \text{ص}^4}{2}$

∴ ق = $\frac{\text{د عہ}}{\text{ل}} \cdot \frac{\pi\, \text{ص}^4}{2}$ .... (۴)

اگر ٹھوس سلاخ کی بجائے ہم ایک موٹی نلی لیں جس کے اندرونی اور بیرونی نصف قطر علی الترتیب ص$_1$ اور ص$_2$ ہوں تو اس کو زاویہ عہ میں مروڑنے کے لئے جو جفت ق درکار ہوگا وہ حسب ذیل ہے :-

$$\text{ق} = \frac{\text{د عہ}}{\text{ل}} \cdot \pi \left(\frac{\text{ص}_2^4 - \text{ص}_1^4}{2} \right)$$

اور اسطوانہ کو کسی زاویہ عہ میں مروڑنے کے لئے جو کام مطلوب ہوگا وہ $= \frac{1}{2}$ ق × عہ اسکو ثابت کرنیکا طریقہ بالکل اسی طرح کا ہے جیسا کہ کسی تار میں بگاڑ کی صورت میں پہلے سمجھایا گیا ہے۔

لہذا کام جو کیا گیا یا ایک ٹھوس مروڑی ہوئی سلاخ کی صورت میں توانائی $= \frac{1}{4} \cdot \frac{\text{د عہ}^2 \, \pi \, \text{ص}^4}{\text{ل}}$ اس ٹھوس اسطوانہ کے بجائے فرض کرو کہ ایک تار جس کا طول ل اور نصف قطر ص ہے ایک سرے پر جکڑ دیا گیا ہے اور اسکا دوسرا سرا مروڑا جا رہا ہے۔

$$\text{تب جفت} = \text{ق} = \frac{\text{د عہ}}{\text{ل}} \cdot \frac{\pi \, \text{ص}^4}{2} = \text{ٹ عہ}$$

[جہاں ٹ = پیچیدگی کا معیار فی اکائی زاویہ]

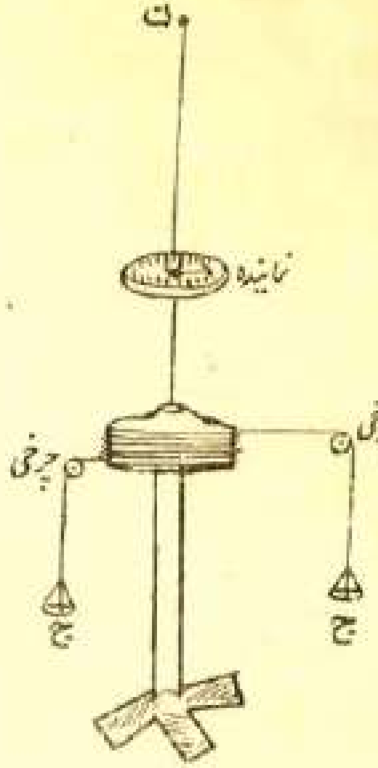
$$\therefore \text{ٹ} = \frac{\text{د} \, \pi \, \text{ص}^4}{2 \, \text{ل}}$$ ، اسطرح ٹ کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہے۔

$$\text{اور د} = \frac{2 \, \text{ق ل}}{\text{عہ} \, \pi \, \text{ص}^4}$$

اسکے ذریعے ہم د کی تعریف کر سکتے ہیں۔

استواری کا معیار $= \frac{2 \, \text{ق}}{\text{عہ}}$ بشرطیکہ اسطوانہ کا طول اکائی اور تراش عمودی کا رقبہ بھی اکائی ہو۔

د کی دریافت کا طریقہ :- ج ج ترازو کے دو پلڑے ایک ڈوری کے ذریعہ جو ایک اسطوانہ پر لپیٹ دی



شکل ۱۰

جاتی ہے (شکل ۱۰) لٹکائے جاتے ہیں۔
یہ اسطوانہ تار کے نچلے سرے پر نصب کیا
جاتا ہے۔ تار کے ایک حصہ پر نمایندہ
لگا دیا جاتا ہے جس کی مدد سے پیمانہ پر
مروڑ کا زاویہ عہ پڑھا جا سکتا ہے۔

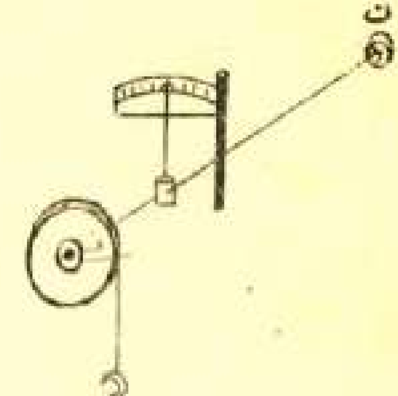
تار کے اوپر کا سرا اس طرح جما دیا گیا
ہے کہ وہ گھوم نہ سکے۔ صرف نچلا سرا
ج ج میں وزن رکھنے سے گھوم سکتا
ہے۔ تجربہ میں دونوں پلڑوں میں مساوی
وزن ک ج رکھے جاتے ہیں اور زاویہ
عہ پڑھ لیا جاتا ہے۔

چونکہ دونوں طرف ہر ایک وزن
ک ج ہے، اسلئے جفت = ۲ ک ج ف

$$= \frac{د\ عہ}{ل} \cdot \frac{\pi\ ص^{4}}{2}$$

جہاں ف اس اسطوانہ کا نصف قطر ہے۔

د معلوم کرنے کا دوسرا طریقہ:-
ایک دائری وضع کی سلاخ کا ایک
سرا ن پر جما دیا جاتا ہے اور
دوسرا سرا۔ ایک پہیہ کے مرکز پر
قائم کیا جاتا ہے (شکل ۱۱) پہیہ
کے گرد مضبوطی کے ساتھ ایک
ڈوری ثابت کر دی جاتی ہے اور



شکل ۱۱

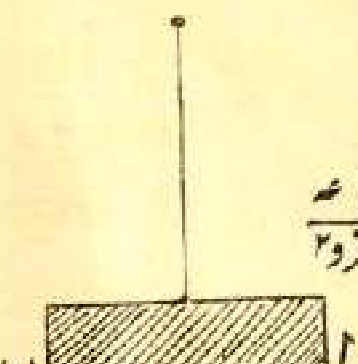
اس ڈوری کے دوسرے سرے پر وزن ک ج لٹکا کر پہیہ جو زاویہ ع گھومتا ہے پیمانہ پر نمائندہ کے ذریعہ پڑھ لیا جاتا ہے۔ چونکہ یہاں صرف ایک ہی وزن ہے، اسلئے جفت = ک ج ف، جہاں ف پہیہ کا نصف قطر ہے۔

$$\therefore \text{ک ج ف} = \frac{\text{د ع}}{\text{ل}} \cdot \frac{\pi\,\text{ص}^4}{2}$$

اس سے د کی قیمت دریافت ہو جاتی ہے۔

یادداشت:— تجربہ میں اس امر کو یاد رکھنا ضروری ہے کہ زاویہ ع کی قیمت دائری پیمانہ میں ہوتی ہے۔ اس لئے ضروری ہے کہ اگر دائری پیمانہ میں تبدیل کرنا ہو تو درجوں کو $\frac{\pi}{180}$ سے ضرب دیا جائے۔

د معلوم کرنے کا تیسرا طریقہ:— ا ب ایک یکساں وضع کی سلاخ ہے جو ایک تار کے نچلے سرے سے آویزاں کی گئی ہے۔ دیکھو شکل ۱۲ تار کا اوپر کا سرا ثابت کر دیا جاتا ہے اور نچلا سرا سلاخ کے بیچ حصہ سے جوڑ دیا گیا ہے۔ اگر سلاخ کو دائری وضع میں اہتزاز میں لایا جائے اور اس کا وقت دوران دریافت کر لیا جائے تو تار کی استواری کا معیار دریافت کیا جا سکتا ہے۔



شکل ۱۲

فرض کرو کہ کسی آن میں ا ب اپنی پہلی وضع سے زاویہ ع گھومتا ہے۔

$$\text{تو جفت} = \text{مج}\,\frac{\text{فز}^2\,\text{ع}}{\text{فز و}^2} = \text{ک ف}^2\,\frac{\text{فز}^2\,\text{ع}}{\text{فز و}^2}$$

$$= \frac{\text{د ع}}{\text{ل}} \cdot \frac{\pi\,\text{ص}^4}{2}$$ جہاں

ف = سلاخ کا گردشی نصف قطر اور ک

= سلاخ کی کمیت

$$\therefore \frac{\text{ف}^{2}\ \text{عہ}}{\text{ف و}^{2}} = \frac{\text{د عہ}}{\text{ل ک ف}^{2}} \cdot \frac{\pi\ \text{ص}^{4}}{2}$$

اسلاخ کے بجائے ایک قرص بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔ قرص کو دائری وضع میں اہتزاز کرنے دو۔ قرص کا مج اس کے مرکز میں سے گزرنے والے محور کے گرد $= \frac{\text{م ص}^{2}}{2}$ جہاں م = کمیت اور ص = نصف قطر

چونکہ یہ سادہ موسیقی حرکت ہے لہذا وقت دوران

$$\text{و} = 2\pi \sqrt{\frac{2\ \text{ک ل ف}^{2}}{\text{د}\ \pi\ \text{ص}^{4}}} \quad \text{.............................} \quad (۵)$$

اس سے د کی قیمت معلوم ہو جاتی ہے۔

اگر سلاخ اسطوانی وضع کی ہو تو ک ف² = مج

$= \text{ک} \left(\frac{\text{ل}_1^{2}}{12} + \frac{\text{ص}_1^{2}}{4} \right)$ جہاں ص_1 = سلاخ کا نصف قطر
اور ل_1 = سلاخ کا طول

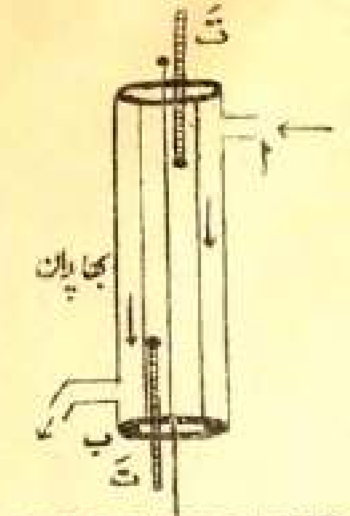
اگر سلاخ مستطیلی شکل کی ہو تو

$\text{مج} = \text{ک} \frac{(\text{ل}_1^{2} + \text{ل}_2^{2})}{12}$ جہاں ل_1 = اس سلاخ کا طول
اور ل_2 = " " عرض

ی، د اور ح میں تپش کی تبدیلی کی وجہ سے اچھی خاصی تبدیلی ہو جاتی ہے اس دوران تجربہ میں تپش کا مستقل رکھنا ضروری ہے۔ ی اور د میں گھٹاؤ، اضافہ تپش کی وجہ سے ہوتا ہے۔ د میں تپش کے لحاظ سے جو تبدیلی ہوتی ہے وہ حسب ذیل مساوات سے ظاہر ہے

$\text{د}_{\text{ت}} = \text{د}_{0} (1 - \text{عہ ت})$ جہاں $\text{د}_{\text{ت}}$ = استواری کا معیار ت° مئی پر اور د_{0} = استواری کا معیار صفر درجہ مئی پر
عہ = استواری کے معیار کی تپش کی قدر

عہ کی قیمت معلوم کرنا ہو تو $و_{ت_۱}$ کی قیمت تپش $ت_۱$ پر اور $و_{ت_۲}$ کی قیمت تپش $ت_۲$ پر معلوم کی جاتی ہے۔ شکل نمبر ۱۳ میں ا ب ایک نلی ہے جسکے درمیان سے تار گزرتا ہے، ا میں سے بھاپ داخل ہوتی ہے اور ب سے باہر نکل جاتی ہے۔ ت اور تَ دو تپش پیما ہیں جن کے مدد سے تار کی اوسط تپش معلوم کی جاسکتی ہے۔



شکل ۱۳

$$و^۲_{ت_۱} = \frac{ن}{د_{ت_۱}}$$ جہاں ن مستقل ہے جو کہ مساوی ہے $\frac{۳۸ ک^۲ ل ف_۱^۲}{۲۲ ص^۲}$

اور $$و^۲_{ت_۲} = \frac{ن}{د_{ت_۲}}$$

$$\therefore \frac{د_{ت_۱}}{د_{ت_۲}} = \frac{و^۲_{ت_۲}}{و^۲_{ت_۱}} = \{ ۱ - عہ (ت_۱ - ت_۲) \}$$

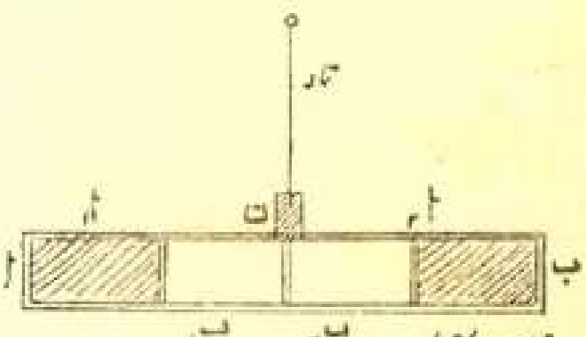
$$\therefore عہ = \frac{\left(۱ - \frac{و^۲_{ت_۲}}{و^۲_{ت_۱}} \right)}{(ت_۱ - ت_۲)}$$

اوپر جو استواری کی دریافت کے طریقے بیان کئے گئے ہیں ان میں یہ اعتراض ہوسکتا ہے کہ چونکہ ص کی قوت چار ہے اس لئے اسکی دریافت میں ذرا سی بھی غلطی، د کی صحیح قیمت میں بہت بڑے فرق کا باعث ہو جاتی ہے۔ جب تک اس سلاخ کا مادہ جو تجربہ میں استعمال کی جاتی ہے متجانس نہ ہو، د کی قیمت حاصل کرنے کے لئے ضابطہ کا استعمال صحیح

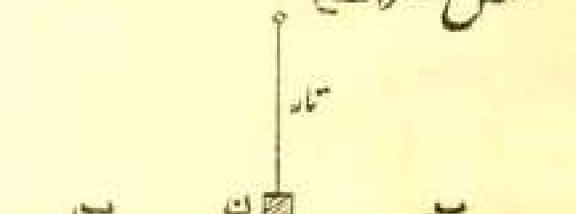
نہیں ہوگا۔ عملاً، سلاخ متجانس نہیں ہوتی۔

نِکل کے لئے، ینگ کے معیار لچک کی تپشی قدر کو پروفیسر ہیریسن نے دریافت کیا۔ اس نے نِکل کے تار کو برقی طریقے سے گرم کرکے، تپش کو تار کی مزاحمت کی رقوم میں، کیلنڈر اور گریفتھ کے پل سے معلوم کیا۔ تپش کو مستقل رکھ کر تناؤ" تار میں پیدا کیا گیا اور طول میں اضافہ ناپ لیا گیا۔ ۰۰ ۴ؐ مئی کی تپش تک اس نے تجربہ کیا اور اس کے بعد اس نے ایک منحنی کھینچا جس میں ینگ کے معیار لچک اور تپش کا تعلق بتایا گیا تھا۔ اس منحنی سے یہ نتیجہ نکلا کہ تپش کے اضافہ سے ینگ کے معیار لچک میں کمی واقع ہوتی ہے۔

میکسول کی سوئی:- شکل ۱۴ میں ا ب ایک کھوکھلی استوانہ نما سلاخ ہے جسکا طول فرض کرو ط کے مساوی ہے اسکا اصول وہی ہے جو پہلے بیان ہوچکا ہے۔ اگر اس کھوکھلی سلاخ ا ب کے جمود کا معیار اثر صحیح طور پر دریافت کر لیا جائے تو وقت دوران معلوم ہوسکتا ہے اور آسانی کے ساتھ دھنی استواری کا معیار دریافت کیا جاسکتا ہے، لیکن پیچوں، آئینہ وغیرہ کی موجودگی سے جسکو شکل میں ن سے ظاہر کیا گیا ہے کھوکھلے استوانہ کا صحیح جمود کا معیار اثر نہیں معلوم ہوسکتا بلکہ اسکی قیمت کچھ بڑھ جاتی ہے



شکل ۱۴ (الف)



شکل ۱۴ (ب)

جس کی وجہ سے تجربہ میں خطا عائد ہوتی ہے۔

میکسول نے ن کی وجہ سے جو خطا ہوتی ہے اس کی صحت کے لئے کھوکھلے اسطوانہ ا ب کے جمود کے معیار اثر کو حسب ذیل تفریق کے عمل سے ساقط کر دیا۔ اگر ن کا صحیح جمود کا معیار اثر ہم کو معلوم ہو جائے تو پھر ا ب کے جمود کے معیار اثر کو ساقط کرنے کی ضرورت نہیں رہتی۔

شکل میں ا۱، ا۲ پیتل کے دو ٹھوس اسطوانے اور ب۱، ب۲ پیتل کے دو کھوکھلے اسطوانے ہیں۔ ان میں سے ہر ایک کا طول = $\frac{1}{4}$ ط اور یہ اسطوانہ ا ب میں آسانی کیساتھ ٹھیک بٹھائے جا سکتے ہیں۔

تجربہ میں شکل ۱۴ (الف) کی طرح ٹھوس اسطوانے ا۱، ا۲ کو ا ب کے بیرونی حصہ میں رکھا جاتا ہے۔ اور ب۱، ب۲ کو اندرونی حصہ میں۔ اس کے بعد ا ب کو اہتزاز میں لا کر ن سے منعکس شعاع اور دوربین وغیرہ کی مدد سے وقت دوران و۱ دریافت کر لیا جاتا ہے اور پھر کھوکھلے اسطوانہ ب۱، ب۲ کو ا ب کے بیرونی حصہ میں اور ا۱، ا۲ کو اندرونی حصہ میں (جیسا کہ شکل ۱۴ (ب) میں دکھلایا گیا ہے) رکھ کر اس صورت میں وقت دوران و۲ معلوم کر لیا جاتا ہے۔ ا۱ یا ا۲ کی کمیت ک۱ معلوم کر لی جاتی ہے اور اسی طرح کھوکھلے اسطوانہ ب۱ یا ب۲ کی کمیت ک۲ بھی دریافت کر لی جاتی ہے۔

فرض کرو کہ کھوکھلے اسطوانہ ا ب کے جمود کا معیار اثر اس محور کے گرد جو تار کا خود محور ہے = مج اور ا۱ یا ا۲ کے جمود کا معیار اثر ایسے محور کے گرد جو اس کے مرکز ثقل میں سے گزر رہا ہو اور تار کے محور کے متوازی ہو = مج۱ اور ب۱ یا ب۲ کے جمود کا معیار اثر اسی طرح کے محور کے گرد = مج۲

لہذا متوازی محوروں کے اصول سے اگر شکل ۱۴ (الف) کی طرح ا۱ اور ا۲

ہوں تو ا_1 یا ا_2 کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد فرض کرو $= \text{مجَ}_1$

$$= \text{مج}_1 + \text{ک}_1 \left(\frac{\text{ط}}{۴} + \frac{\text{ط}}{۸}\right)^2$$

$$= \text{مج}_1 + \text{ک}_1 \left(\frac{۳\text{ط}}{۸}\right)^2$$

∴ ا_1 اور ا_2 دونوں اسطوانوں کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد

$$= ۲\,\text{مجَ}_1 = ۲\,\text{مج}_1 + ۲\,\text{ک}_1 \left(\frac{۳\text{ط}}{۸}\right)^2$$

اور اسی شکل ۱۴ (الف) میں متوازی محوروں کے اصول سے ب_1 یا ب_2 کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد $= \text{مجَ}_2$ فرض کرو

$$= \text{مج}_2 + \text{ک}_2 \left(\frac{\text{ط}}{۸}\right)^2$$

∴ ب_1 اور ب_2 دونوں کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد $= ۲\,\text{مجَ}_2$

$$= ۲\,\text{مج}_2 + ۲\,\text{ک}_2 \left(\frac{\text{ط}}{۸}\right)^2$$

شکل ۱۴ (الف) کی وضع کے لئے اگر مجموعہ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد $= \text{مجَ}$

$$\text{تو}\ \text{مجَ} = \text{مج} + ۲\,\text{مجَ}_1 + ۲\,\text{مجَ}_2 + \underline{\text{مج}} = \text{مج} + ۲\,\text{مج}_1 +$$

$$+ ۲\,\text{ک}_1\left(\frac{۳\text{ط}}{۸}\right)^2 + ۲\,\text{مج}_2 + ۲\,\text{ک}_2\left(\frac{\text{ط}}{۸}\right)^2 + \underline{\text{مج}} \quad \ldots\ldots (۶)$$

جہاں $\underline{\text{مج}}$ = فرض کرو ن کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد

اور اس صورت میں وقت دوران $\text{ف}_1 = ۲\pi\sqrt{\frac{\text{مجَ}}{\text{ثہ}}} \quad \ldots\ldots (۷)$

جہاں ثہ = پیچیدگی کا جفت فی اکائی زاویہ

اب شکل ۱۴ (ب) پر غور کرو

اس صورت میں بھی متوازی محوروں کے اصول سے ا_1 یا ا_2 کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = فرض کرو مجِ_1

$$= \text{مج}_1 + \text{ک}_1 \left(\frac{\text{ط}}{۸}\right)^2$$

∴ دونوں اسطوانوں کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد $= ۲\,\underline{\text{مج}}_{۱}$

$$= ۲\,\text{مج}_{۱} + ۲\,\text{ک}_{۱}\left(\frac{\text{ط}}{۸}\right)^{۲}$$

اسی طرح، متوازی محوروں کے اصول سے اُسی شکل میں $\text{ب}_{۲}$ یا $\text{ب}_{۲}$ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = فرض کرو $\underline{\text{مج}}_{۲}$

$$= \text{مج}_{۲} + \text{ک}_{۲}\left(\frac{\text{ط}}{۸} + \frac{\text{ط}}{۴}\right)^{۲} = \text{مج}_{۲} + \text{ک}_{۲}\left(\frac{۳\text{ط}}{۸}\right)^{۲}$$

∴ دونوں اسطوانوں $\text{ب}_{۲}$، $\text{ب}_{۲}$ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد

$$= ۲\,\underline{\text{مج}}_{۲} = ۲\,\text{مج}_{۲} + ۲\,\text{ک}_{۲}\left(\frac{۳\text{ط}}{۸}\right)^{۲}$$

∴ شکل ۱۲ (ب) کی وضع کیلئے اگر مجموعہ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد $= \text{مج}''$

$$\text{تو}\quad \text{مج}'' = \text{مج} + ۲\,\underline{\text{مج}}_{۱} + ۲\,\underline{\text{مج}}_{۲} + \underline{\text{مج}}$$

$$= \text{مج} + ۲\,\text{مج}_{۱} + ۲\,\text{ک}_{۱}\left(\frac{\text{ط}}{۸}\right)^{۲} + ۲\,\text{مج}_{۲} + ۲\,\text{ک}_{۲}\left(\frac{۳\text{ط}}{۸}\right)^{۲} + \underline{\text{مج}} \quad \ldots\ldots (۸)$$

اور اس صورت میں وقت دوران $\text{ف}_{۲} = ۲\pi\sqrt{\frac{\text{مج}''}{\text{ﮎ}}} \quad \ldots\ldots (۹)$

اوپر کی مساوات (۸) کو مساوات (۶) میں سے تفریق کرنے سے:-

$$\text{مج}' - \text{مج}'' = ۲\,\text{ک}_{۱}\left(\frac{۳\text{ط}}{۸}\right)^{۲} - ۲\,\text{ک}_{۱}\left(\frac{\text{ط}}{۸}\right)^{۲} + ۲\,\text{ک}_{۲}\left(\frac{\text{ط}}{۸}\right)^{۲} - ۲\,\text{ک}_{۲}\left(\frac{۳\text{ط}}{۸}\right)^{۲} =$$

$$= ۲\,\text{ک}_{۱}\left\{\left(\frac{۳\text{ط}}{۸}\right)^{۲} - \left(\frac{\text{ط}}{۸}\right)^{۲}\right\} + ۲\,\text{ک}_{۲}\left\{\left(\frac{\text{ط}}{۸}\right)^{۲} - \left(\frac{۳\text{ط}}{۸}\right)^{۲}\right\}$$

$$= ۲\,\text{ک}_{۱}\cdot\frac{\text{ط}^{۲}}{۸} - ۲\,\text{ک}_{۲}\cdot\frac{\text{ط}^{۲}}{۸} = \frac{\text{ط}^{۲}}{۴}\cdot(\text{ک}_{۱} - \text{ک}_{۲}) \quad \ldots\ldots (۱۰)$$

اب چونکہ ہمکو ک۱، ک۲ اور ط معلوم ہیں اسلئے مجَ ۔ مجً معلوم ہوسکتا ہے۔

مساوات (۷) اور (۹) کو مربع کرنیکے بعد تفریق کرنے سے :۔

$$\text{د}_1^2 - \text{د}_2^2 = \frac{4\pi^2}{\text{ٹ}}\left(\text{مجَ} - \text{مجً}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

مساوات (۱۱) سے چونکہ اب مجَ ۔ مجً کی قیمت معلوم ہے اس لئے ٹ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

$$\text{یعنی ٹ} = \frac{4\pi^2}{\text{د}_1^2 - \text{د}_2^2}\left\{\frac{\text{ط}^2}{4}\left(\text{ک}_1 - \text{ک}_2\right)\right\}$$

$$\text{اور چونکہ جفت جو عمل کر رہا ہے وہ} = \frac{\text{د عہ}}{\text{ل}} \times \frac{\pi\, \text{ص}^4}{2} = \text{ٹ عہ}$$

$$\therefore \text{د} = \frac{2\,\text{ل ٹ}}{\pi\, \text{ص}^4} = \frac{2\,\text{ل}}{\pi\, \text{ص}^4} \times \frac{4\pi^2}{\text{د}_1^2 - \text{د}_2^2}\left\{\frac{\text{ط}^2}{4}\left(\text{ک}_1 - \text{ک}_2\right)\right\}$$

$$= \frac{2\,\text{ل}\,\pi}{\text{ص}^4\left(\text{د}_1^2 - \text{د}_2^2\right)}\left\{\text{ط}^2\left(\text{ک}_1 - \text{ک}_2\right)\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

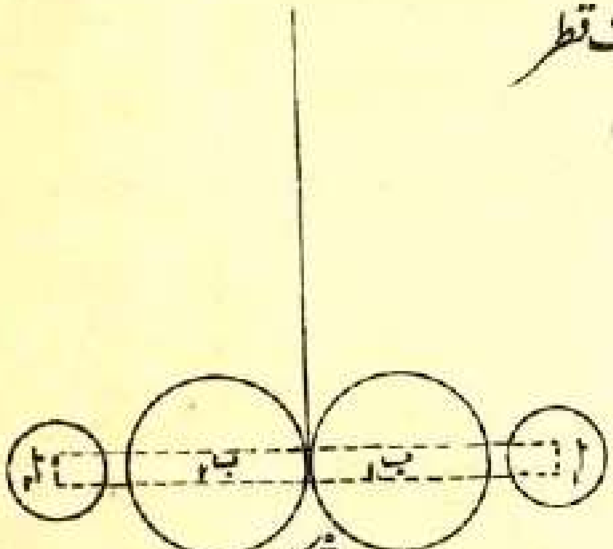
مثال :۔ ایک اسطوانہ نما لمبی سلاخ جسکا طول ط ہے وسطی نقطہ سے ایک تار کے ذریعے لٹکائی گئی ہے اور یہ ا۱، ا۲، ب۱، ب۲ چار مستطیلی ٹھوس کروں کے مرکزوں سے مس کرتی ہوئی گزرتی ہے۔ ا۱ اور ا۲ بالکل مساوی جسامت کے ہیں اور ہر ایک کا نصف قطر ص۱ اور کمیت ک۱ ہے، اور اسی طرح ب۱ اور ب۲ مساوی ہیں اور ان میں سے ہر ایک کا نصف قطر ص۲ اور کمیت ک۲ ہے۔ مروڑ کے تحت سلاخ کا وقت دوران د۱ ہوتا ہے جبکہ ا۱ اور ا۲ میں سے سلاخ کو گزار کر اس کے وسطی حصہ میں (مس کرتے ہوئے) اور ب۱ اور ب۲ کے مرکزوں کو

سلاخ کے سروں پر رکھا جاتا ہے۔ اگر وسطی کروں کے محل سروں کے کروں سے باہم بدل دیئے جائیں تو سلاخ کا وقت دوران و۲ ہو جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس تار کے مادہ کا استواری کا معیار =

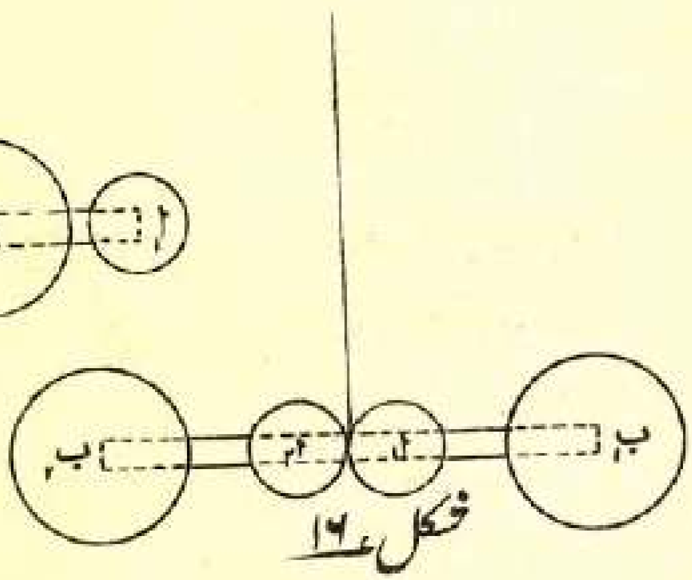
$$= \frac{16\,\pi\,\text{ل}\left\{\text{ک}_1\left(\text{ص}_1^2-\frac{\text{ط}^2}{4}\right)+\text{ک}_2\left(\frac{\text{ط}^2}{4}-\text{ص}_2^2\right)\right\}}{\text{ص}^4\left(\text{و}_1^2-\text{و}_2^2\right)}$$

جہاں ص = تار کا نصف قطر

ل = تار کا طول



شکل ۱۵



شکل ۱۶

حل :- فرض کرو کہ سلاخ کے جمود کا معیار اثر ایک ایسے محور کے گرد جو خود تار کا محور ہے = مج

اور ا۱ یا ا۲ کرہ کا اسکے ایسے محور کے گرد جمود کا معیار اثر جو کرہ کے مرکز ثقل میں سے گزرتا ہو اور تار کے محور کے متوازی ہو فرض کرو = مج

نیز یہ بھی فرض کرو کہ ب۱ یا ب۲ کے جمود کا معیار اثر اس کے ایسے محور کے گرد جو اس کے مرکز ثقل میں سے گزرتا ہو اور تار کے محور

کے متوازی ہو = $\text{مج}_۲$

شکل عـ۱۵ میں جبکہ وقت دوران $\text{د}_۱$ ہو تو $\text{ا}_۱$ یا $\text{ا}_۲$ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد متوازی محوروں کے اصول سے = فرض کرو

$$\overline{\text{مج}_۱} = \text{مج}_۱ + \text{ک}_۱ \text{ص}_۱^۲$$

اور اسی طرح $\text{ا}_۱$ اور $\text{ا}_۲$ دونوں کروں کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = $۲\,\text{مج}_۱ + ۲\,\text{ک}_۱ \text{ص}_۱^۲$

اور اسی شکل میں متوازی محوروں کے اصول سے $\text{ب}_۱$ یا $\text{ب}_۲$ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = (فرض کرو) $\overline{\text{مج}_۲} = \text{مج}_۲ + \text{ک}_۲ \left(\frac{\text{ط}}{۲}\right)^۲$

$\therefore$ $\text{ب}_۱$ اور $\text{ب}_۲$ دونوں کے جمود کا معیار اثر = $۲\,\overline{\text{مج}_۲} = ۲\,\text{ک}_۲\left(\frac{\text{ط}}{۲}\right)^۲ + ۲\,\text{مج}_۲$

شکل عـ۱۵ میں اگر مجموعے کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = مجَ

تو $\text{مجَ} = \text{مج} + ۲\,\overline{\text{مج}_۱} + ۲\,\overline{\text{مج}_۲} + \underline{\text{مج}}$ [جہاں $\underline{\text{مج}}$ = پیچوں وغیرہ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد]

$$= \text{مج} + ۲\,\text{مج}_۱ + ۲\,\text{ک}_۱\text{ص}_۱^۲ + ۲\,\text{مج}_۲ + ۲\,\text{ک}_۲\left(\frac{\text{ط}}{۲}\right)^۲ + \underline{\text{مج}} \quad \text{.......... (۱۳)}$$

اور اس صورت میں

وقت دوران $\text{د}_۱ = ۲\pi\sqrt{\frac{\text{مجَ}}{\text{ﻫ}}}$ .... (۱۴)

اب شکل عـ۱۶ پر غور کرو:-

اس صورت میں بھی متوازی محوروں کے اصول سے $\text{ا}_۱$ یا $\text{ا}_۲$ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = فرض کرو $\underline{\text{مج}_۱} = \text{مج}_۱ + \text{ک}_۱\left(\frac{\text{ط}}{۲}\right)^۲$

∴ دونوں کروں کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد $= 2\,\underline{\text{مج}}_1$

$$= 2\,\text{مج}_1 + 2\,\text{ک}_1\left(\frac{\text{ط}}{2}\right)^2$$

اسی طرح متوازی محوروں کے اصول سے ب₁ یا ب₂ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = فرض کرو $\underline{\text{مج}}_2 = \text{مج}_2 + \text{ک}_2 (\text{ص}_2)^2$

∴ دونوں ب₁ اور ب₂ کے جمود کا معیار اثر $= 2\,\underline{\text{مج}}_2$

$$= 2\,\text{مج}_2 + 2\,\text{ک}_2 \cdot \text{ص}_2^2$$

شکل ۱۶ کے لئے اگر مجموعہ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد $= \text{مج}''$

تو $\text{مج}'' = \text{مج} + 2\,\underline{\text{مج}}_1 + 2\,\underline{\text{مج}}_2 + \underline{\text{مج}}$

$$\text{لہذا}\quad \text{مج}'' = \text{مج} + 2\,\text{مج}_1 + 2\,\text{ک}_1\left(\frac{\text{ط}}{2}\right)^2 + 2\,\text{مج}_2 + 2\,\text{ک}_2\,\text{ص}_2^2 + \underline{\text{مج}} \quad \text{.......(۱۵)}$$

اور اس صورت میں وقت دوران $\text{و}_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\text{مج}''}{\text{ثہ}}}$ ....(۱۶)

اوپر کی مساوات (۱۵) کو (۱۳) میں سے تفریق کرنے سے :-

$$\text{مج}' - \text{مج}'' = 2\,\text{ک}_1\text{ص}_1^2 + 2\,\text{ک}_2\left(\frac{\text{ط}}{2}\right)^2 - 2\,\text{ک}_1\left(\frac{\text{ط}}{2}\right)^2 - 2\,\text{ک}_2\text{ص}_2^2$$

$$= 2\,\text{ک}_1\left(\text{ص}_1^2 - \frac{\text{ط}^2}{4}\right) + 2\,\text{ک}_2\left(\frac{\text{ط}^2}{4} - \text{ص}_2^2\right) \quad \text{.......(۱۷)}$$

اب چونکہ ص₁، ص₂، ک₁، ک₂ اور ط کی قیمتیں معلوم ہیں لہذا $\text{مج}' - \text{مج}''$ کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے۔ اوپر کی مساواتوں (۱۴) اور (۱۶) کو مربع کرنے کے بعد اگر تفریق کریں تو :-

$$\text{و}_1^2 - \text{و}_2^2 = \frac{4\pi^2}{\text{ثہ}}\left(\text{مج}' - \text{مج}''\right) \quad \text{.......(۱۸)}$$

مساوات (۱۸) میں چونکہ $(\text{مج}' - \text{مج}'')$ کی قیمت معلوم ہے اور و₁

اور و_2 بھی معلوم ہیں اس لئے ٹہ معلوم ہوجاتا ہے۔

اب تار پر جو جفت عمل کر رہا ہے وہ

$$= \frac{\text{د عہ}}{\text{ل}} \times \frac{\pi\,\text{صو}^4}{2} = \text{ٹہ عہ} \qquad \text{جہاں عہ = زاویہ انصراف}$$

$$\therefore \text{د} = \frac{2\,\text{ل ٹہ}}{\pi\,\text{صو}^4}$$

$$= \frac{2\,\text{ل}}{\pi\,\text{صو}^4}\left\{\frac{4\pi^2}{\text{و}_1^2-\text{و}_2^2}\left(\text{مج}-\text{مج}\right)\right\}$$

$$= \frac{8\pi\,\text{ل}}{\text{صو}^4\left(\text{و}_1^2-\text{و}_2^2\right)}\left\{2\text{ک}_1\left(\text{ص}_1^2-\frac{\text{ط}^2}{4}\right)+2\text{ک}_2\left(\frac{\text{ط}^2}{4}-\text{ص}_2^2\right)\right\}$$

$$= \frac{16\pi\,\text{ل}}{\text{صو}^4\left(\text{و}_1^2-\text{و}_2^2\right)}\left\{\text{ک}_1\left(\text{ص}_1^2-\frac{\text{ط}^2}{4}\right)+\text{ک}_2\left(\frac{\text{ط}^2}{4}-\text{ص}_2^2\right)\right\}$$

ہندی ربر کے لئے پواساں کی نسبت دریافت کرنیکا طریقہ:۔

ایک گول تراش والے لمبے ٹھوس ہندی ربر کے ٹکڑے کو جس کا قطر تقریباً نصف انچ ہوتا ہے ایک سرے سے باندھ کر لٹکایا جاتا ہے اور اس کے دوسرے سرے پر ایک پلڑے میں بوجھ رکھا جاتا ہے۔ ربر کی طولی سمت میں تقریباً دس مقامات پر نشانات بنائے جاتے ہیں اور ان مقامات پر خردہ پیما پیچ سے ربر کا قطر ہر بوجھ کے لئے جو پلڑے میں رکھا جاتا ہے، ناپ لیا جاتا ہے۔ متحرک خوردبین کی مدد سے ربر کا طول بھی ہر بوجھ کے لئے معلوم کرلیا جاتا ہے۔ اس طرح ہر وزن کے لئے عرضی سکڑاؤ اور طولی اضافہ کی قیمتیں علی الترتیب معلوم کرلی جاتی ہیں۔ عرضی سکڑاؤ کی صورت میں ہر وزن یا بوجھ کے تناظر تقریباً دس پیمائشوں کی اوسط قیمت لی جاتی ہے۔

عرضی سکڑاؤ
———
ابتدائی قطر

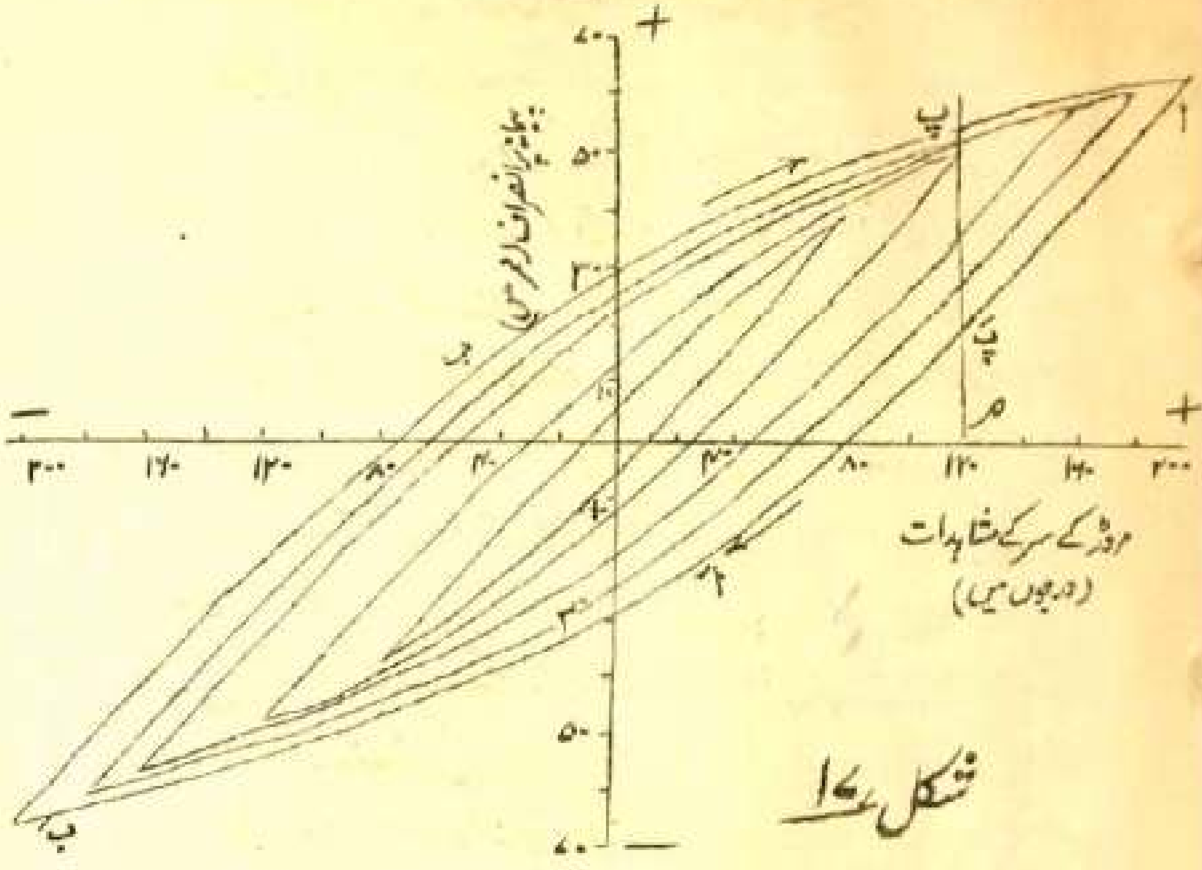
پواسان کی نسبت مہ = ———————

طولی اضافہ
———
ابتدائی طول

اس طرح ہر بوجھ کے لئے مہ کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہے ۔ تمام مشاہدات کو، بوجھ کے ترتیب دینے کے پانچ یا دس منٹ بعد پڑھنا مناسب ہوتا ہے ۔ مہ کی قیمت ربر کی نوعیت پر منحصر ہوتی ہے اور نیز کسی ایک بوجھ کے اضافہ کرنے کی صورت میں جو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں وہ اسی بوجھ کے کمی کرنے کی قیمتوں سے، کسی قدر مختلف ہوتی ہیں۔

مروڑی اختناق :— اگر کوئی تانبے کا تار اس طرح مروڑا جائے کہ مروڑ کا جفت بتدریج بڑھنے لگے تو یہ ثابت ہوا ہے کہ جفت کی قیمت پہلے تو مروڑ کے متناسب، اور ہوک کے کلیہ کے تابع رہتی ہے لیکن جوں جوں زاویہ مروڑ کی قیمت بڑھتی جاتی ہے، مروڑ کا جفت، مروڑ کی بہ نسبت کم ہونے لگتا ہے، اب اگر کسی وقت میں، مروڑ کے جفت کی سمت کو اُلٹا دیا جائے تو کسی دئے ہوئے زاویہ کے لئے، اُلٹی سمت میں مروڑ کا جفت، ابتدائی سمت کے مروڑ کے جفت سے ہمیشہ کم ہوتا ہے (شکل ۷۱ میں پ مر' پ مر سے چھوٹا ہے) لہذا تار کو کسی دئے ہوئے زاویہ میں مروڑے جانے کے لئے جو کام کرنا پڑتا ہے وہ زیادہ ہے بہ نسبت اُس کام کے جوکہ تار اُلٹا مروڑے جاتے ہوئے کرسکتا ہے ۔ اس خاصیت کو "مروڑ کے اختناق" سے تعبیر کیا جاتا ہے کسی بے مروڑے ہوئے تار کو لو اور فرض کرو کہ اولاً وہ ایک زاویہ + طہ درجے کسی سمت میں مروڑا جاتا ہے ۔ پھر اُس کو اُلٹا اتنا مروڑو

کر دہ ایک زاویہ — طہ درجے بنائے اور اس کے بعد پھر پہلی سمت



شکل ۱۷

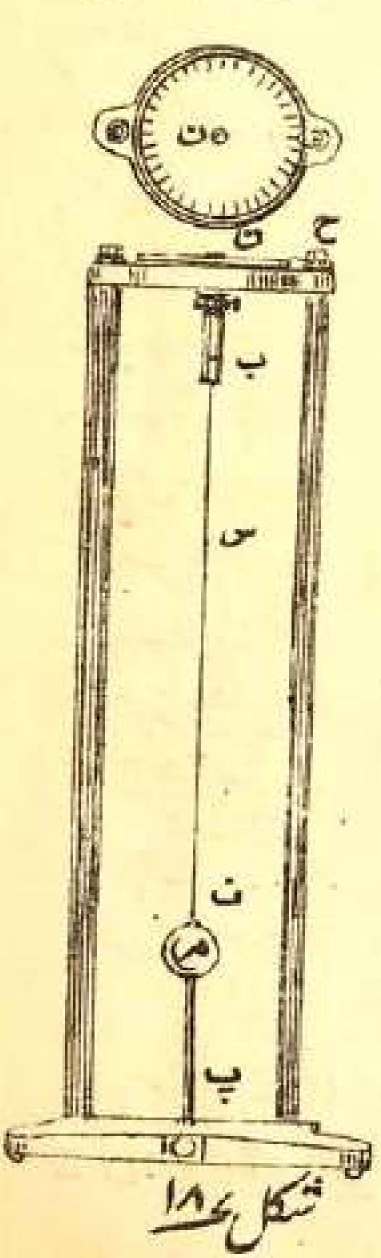
میں مروڑ کر زاویہ + طہ تک لے آؤ۔ تجربہ سے یہ ثابت ہوا ہے کہ مروڑ کا جفت، جبکہ دوسری مرتبہ تار + طہ زاویہ بناتا ہے، پہلی دفعہ کے + طہ زاویے کے مروڑ کی جفت سے مختلف ہوتا ہے۔ لیکن اگر تار کو + طہ اور - طہ کی حد تک مروڑا جائے تو یہ ایک دور ہوگا اور متعدد دور اس طرح مکمل کئے جائیں کہ ہر دور ٹھیک یکساں طریقہ اور بالکل ایک ہی وقت کے وقفوں میں مکمل ہو جائے تو یہ دریافت کیا گیا ہے کہ تار ایک مستقل دَوری حرکت کرنے لگتا ہے جس میں + طہ اور - طہ کے متناظر جفتوں کی خاص خاص قیمتیں ہوتی ہیں اور کسی درمیانی زاویہ طہ کے لئے جفت کی دو قیمتیں ہوتی ہیں، ایک قیمت تار کے - طہ سے + طہ

تک مروڑے جانے کے اور دوسری + طہ ہے - طہ تک مروڑے جانے کے متناظر ہوتی ہے - اس دوری حالت کو شکل ۱۷ میں واضح طور پر دکھلایا گیا ہے -

تار کو ایک مکمل دور تک مروڑنے میں جو کام کیا جاتا ہے اسکی تخمین :-

فرض کرو کہ طہ نیم قطریوں کے مروڑ کے متناظر جو جفت عمل کرتا ہے اسکی قیمت ق ڈائیں سمر ہے -

تب اگر مروڑ کی قیمت میں فرطہ کا اضافہ ہوتا ہو تو جفت جو کام کرتا ہے وہ ق فرطہ کے مساوی ہوگا -



شکل ۱۸

لہذا تار پر ایک مکمل دور میں جو کام ہوا

وہ = ∫ق . فرطہ

= کسی بند حلقہ کے رقبہ کے، جس کی تعبیر اب ب آ سے ہوگی -

ہم اگر اس حلقہ کو عہ نیم قطریان فی سمر کے پیمانہ سے مروڑ کے لئے، اور بہ ڈائین سمر فی سمر کے پیمانہ سے جفت کیلئے مرتسم کریں تو تار پر جو کام کیا جاتا ہے وہ

= عہ . بہ . ۲ ارگ کے، جہاں ۲ بند حلقے کے رقبہ کے مساوی ہے -

عملی تفصیلات :- شکل ۱۸ میں جو آلہ دکھلایا گیا ہے وہ دو تاروں پر مشتمل ہے جس میں سے س تانبے کی ہے اور یہی زیر تجربہ ہے اور دوسری پ پیتل کی ہے جس کے تراش عمودی

کا رقبہ س سے زیادہ اور طول س سے کم ہے اور اسکے لچک کے خواص پہلے سے ہی ایک تجربہ کی مدد سے دریافت کر لئے گئے ہیں۔ دونوں تاروں کو ایک دھاتی کندہ ف میں مضبوطی سے ملاکر جیا دیا جاتا ہے۔ تانبے کے تار کا دوسرا سرا مضبوطی کے ساتھ ایک درجہ دار مروڑ کے راس کے ساتھ باندھ دیا جاتا ہے جس پر مروڑ کا زاویہ پڑھا جا سکتا ہے۔ پیتل کی تار کا سرا آلہ کے قاعدے سے باندھ دیا جاتا ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ کوئی جفت اگر تانبے کے تار پر لچک کی حد سے بڑھ کر عمل کرنا چاہے، تو پیتل کے تار کی مزاحمت کی باعث، ایسا نہیں کر سکتا۔ لہذا، ف جو زاویہ گھومتا ہے اس کو اگر معلوم کر لیا جائے تو مروڑ کا جفت جو پیتل کے تار پر عمل کرتا ہے دریافت کیا جا سکتا ہے اور اس سے تانبے کے تار پر عمل کرنے والا جفت معلوم ہو سکتا ہے۔ کندہ ف کے ساتھ ایک آئینہ م لگا دیا جاتا ہے۔ اس سے اور ایک لیمپ اور پیمانہ کی مدد سے، ف جو زاویہ گھومتا ہے اسکو پڑھا جا سکتا ہے۔ فرض کرو کہ یہ زاویہ = عہ نیم قطری جبکہ پیمانہ پر انصراف لا سمر ہوتا ہے۔ تب چونکہ

$\text{مس}\ 2\,\text{عہ} = \frac{\text{لا}}{\text{ث}}$، $\text{عہ} = \frac{\text{لا}}{2\,\text{ث}}$ نیم قطریوں کے، جہاں ث آئینہ سے پیمانہ کا فاصلہ ہے۔

$$\text{لہذا پیتل کی تار پر جفت} = \text{ق} = \frac{\text{د}\ \text{عہ}}{\text{ل}} \cdot \frac{\pi\,\text{ص}^4}{2}$$

$$= \frac{\pi\,\text{د}\,\text{ص}^4\,\text{لا}}{4\,\text{ث}\,\text{ل}} \quad \text{......} \quad (19)$$

جہاں د = پیتل کی تار کے مروڑ کا معیار

ص = 〃 〃 〃 کا نصف قطر

ل = 〃 〃 〃 کا طول

لہذا تانبے کی تار پر عمل کرنے والا جفت معلوم ہو سکتا ہے۔

د کی دریافت۔ تقریباً پچاس سمر طول کا ایک علیحدہ تار لے کر جو ب

کے نمونہ ہی کا ہونا چاہیئے) اسکے ایک سرے کو مضبوطی سے اس طرح باندھو کہ وہ انتصاباً لٹکنے لگے۔ تار کے دوسرے سرے سے ایک جمودی سلاخ کو باندھ کر تار کی مروڑ کے تحت اس سلاخ کو اہتزاز کرنے دو

اگر و = وقت دوران

مج = سلاخ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد

لَ = اس علیحدہ تار کا طول

$$\text{تو}\quad \text{و} = ۲\pi\sqrt{\frac{۲\,\text{لَ مج}}{\pi\,\text{د ص}^{۴}}}$$

مساوات (۱۹) میں د کی قیمت لکھنے سے

$$\text{ق} = \frac{۲\pi^{۲}\,\text{لَ مج لا}}{\text{ل ث و}^{۲}} \qquad (۲۰)$$

اس ضابطہ سے تانبہ کی تار پر عمل کرنے والے جفت اور پیمانہ پر نقطہ نور کے انصراف کے درمیان تعلق معلوم ہو جاتا ہے۔

اور اس طرح ق کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے۔

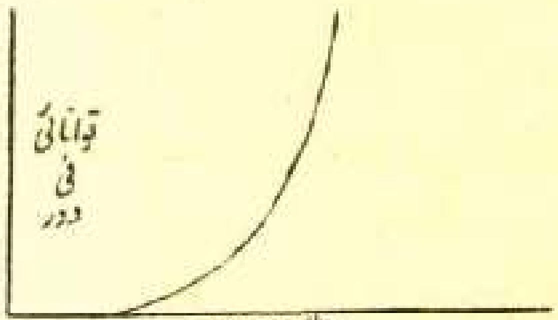
اس تجربہ میں دو مشاہد ملکر کام کرتے ہیں۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ ایک ہی وقت میں، مروڑ کے راس کے اور نور کے نقطہ کے مشاہدات لینے ہوتے ہیں۔ آلہ کو اس طرح ترتیب دیا جاتا ہے کہ تاروں میں ابتدا میں بگاڑ نہیں ہوتا اور مروڑ کا راس صفر پر ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ انتہائی مروڑ کے دَور مثلاً ۲۰۰°، ۱۸۰°، ۱۶۰°، ۱۲۰° وغیرہ زیر امتحان ہیں۔

مروڑ کے راس کو پہلے +۲۰۰° گھمایا جاتا ہے اور پھر ۴۰° کی وقفوں سے کم کرتے ہوئے -۲۰۰° تک لایا جاتا ہے۔ اب اس کی حرکت کی سمت الٹی کر دی جاتی ہے اور ۴۰° کے وقفوں سے مشاہدات دہرائے جاتے ہیں حتیٰ کہ +۲۰۰° تک پھر وہ پہنچ جاتا ہے۔

اس طرح بغیر درمیان میں رُکے ہوئے، متعدد دَور کے مشاہدات لئے جاتے ہیں، حتیٰ کہ دَوری حالت کا حصول پیمانہ پر کے مشاہدات کے مستقل ہونے سے ظاہر ہونے لگتا ہے۔ لیکن بہتر ترکیب یہ ہے کہ مشاہدات شروع کرنے سے قبل تار کو، مروڑ کے متعدد دَوروں میں سے گزرنے دیا جائے۔

اختناق کے حلقے جو طہ = ۲۰۰°، ۱۸۰°، ۱۶۰°، ۱۲۰° وغیرہ قیمتوں کے متناظر ہوں مرتسم کئے جانے چاہئیں اور ان کے رقبہ جات کسی طریقہ سے دریافت کر لئے جائیں۔ ایک منحنی ایسا کھینچا جا سکتا ہے جس میں ہر دَور کی حاصل توانائی اور مروڑ کے انتہائی زاویہ طہ میں تعلق بتایا جا سکتا ہے۔

اس منحنی کو شکل ۱۹ میں دکھلایا گیا ہے۔



شکل ۱۹

مشاہدات کو قلمبند کرنے کا طریقہ اس مثال سے بخوبی واضح ہو جائے گا:—

مروڑ کے راس کے مشاہدات درجوں میں	پیمانہ کے مشاہدات سمر میں	پیمانہ کے مشاہدات سمر میں	پیمانہ کے مشاہدات سمر میں
+ ۱۵۰	۶۹٫۵ ← ۷۸٫۵	۷۸٫۵ ← ۷۹	۷۹ ← ۷۹٫۵
+ ۱۲۵	۵۵٫۵ ۷۵	۶۳٫۳ ۷۵	۶۳ ۷۵
+ ۱۰۰	۴۲ ۷۰	۴۹٫۵ ۷۰	۵۰ ۷۰

۷۵ +	۳۰	۶۲٫۵	۳۶٫۵	۶۴	۳۷	۶۳٫۵
۲۵ +	۹٫۵	۵۰٫۵	۱۳٫۵	۵۰٫۵	۱۳٫۵	۵۰٫۵
صفر	٫۵	۴۲	۳٫۵	۴۲	۴٫۰	۴۲
۲۵ −	−۸	۳۲٫۵	−۵	۳۲٫۵	−۴٫۵	۳۲٫۵
۵۰ −	−۱۴	۲۱	−۱۲	۲۱	−۱۱٫۵	۲۱
۷۵ −	−۲۰	۸٫۵	−۱۸٫۵	۸٫۵	−۱۸	۸٫۵
۱۰۰ −	−۲۵	−۴٫۵	−۲۴	−۵	−۲۳٫۵	−۵
۱۲۵ −	−۲۹٫۵	−۱۸٫۵	−۲۹	−۱۸٫۵	−۲۸٫۵	−۱۸٫۵
۱۵۰ −	−۳۳	−۳۳	−۳۳٫۵	−۳۳٫۵	۳۳٫۵	۳۳٫۵
	←		←		←	

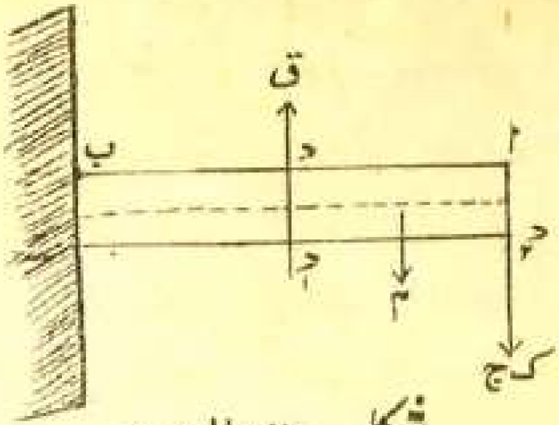
سلاخوں کا خماؤ:— اگر ایک سیدھی سلاخ کو شکل عنـ۲۰ کے مطابق خمایا جائے تو اس کے ریشے اوپر کے حصہ میں کھنچیں گے (یعنی اوپر کے حصہ کے ریشوں کے طول میں اضافہ ہوگا) اور نیچے کے حصہ کے طول گھٹنے لگیں گے۔ اس سلاخ کے ایک حصہ میں ایسی بھی کچھ سطح ہوگی جہاں ریشوں کے طول میں نہ تو اضافہ ہوگا اور نہ کمی، سلاخ کی ایسی سطح "تعدیلی سطح" کہلاتی ہے اور ایک ایسا خط جو اُن تمام چھوٹے چھوٹے ریشوں میں سے جو نہ تو کھنچتے ہیں اور نہ گھٹتے ہیں گزرتا ہے، تعدیلی محور کہلاتا ہے۔ تعدیلی محور کے طول میں سلاخ کے خماؤ کی وجہ سے نہ اضافہ ہوتا ہے اور نہ کمی۔



شکل عنـ۲۰

فرض کرو کہ ایک سلاخ ایسی ہے جسکا ایک سرا دیوار میں قائم کر دیا گیا ہے اور دوسرے سرے سے ایک وزن ک ج لٹکایا گیا ہے دیکھو شکل عنـ۲۱ (الف)۔

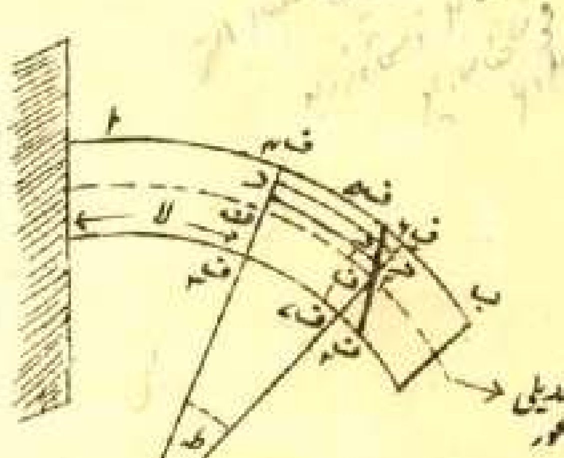
د د کے پاس ایک چھوٹا سا رقبہ تصور کرو۔ چونکہ ایک قوت ک ج
نیچے کی جانب عمل کر رہی ہے



شکل ۲۰ (الف)

اور سلاخ کے ٹکڑے ا د د، د کا وزن م بھی اسی جانب عمل کر رہا ہے۔
لہذا سلاخ کو تعادل کی حالت میں رکھنے کے لئے ایک جزّی قوت ق
کو اوپر کی جانب اسطرح عمل کرنا چاہیئے کہ ق = م + ک ج

اس طرح تمام جزی قوتیں ایک جفت پیدا کرتی ہیں جس کی وجہ سے تمام ریشے سلاخ کے اوپر کے حصہ میں تناؤ کی حالت میں ہیں اور نچلے حصہ میں دباؤ کی حالت میں۔ اس لئے اوپر کے حصہ میں د د کے بائیں جانب ایسی قوتیں عمل کر رہی ہیں جنکا تقاضا سیدھے جانب کے ریشوں کو کھینچنے کا ہے اور سلاخ کے نچلے حصہ میں د د کی بائیں جانب ایسی قوتیں عمل کرتی ہیں جو دہنے جانب کے ریشوں کو دبانے کا تقاضا رکھتی ہیں۔



شکل ۲۱

ان تمام قوتوں کا معیار اثر ایک جفت ہے اور یہ اس جفت کو توازن میں رکھتا ہے جو ک ج اور ق کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے۔ اس جفت کو "خمیدگی کے معیار اثر" سے

تعبیر کیا جاتا ہے۔

شکل ۲۱ میں ایک خمی ہوئی سلاخ دکھلائی گئی ہے۔ ابتدا میں ف$_5$ ف$_3$، ایک فاصلہ تعدیلی محور کے اوپر اس طرح لیا گیا ہے کہ ف$_1$ ف$_2$ کے (جو تعدیلی محور کے نیچے کی جانب ہے) مساوی ہو۔ چونکہ سلاخ خمائی گئی ہے اس لئے اوپر کھنچاؤ کی وجہ سے ف$_5$، ف$_7$ پر چلا جائے گا۔

یعنی اوپر کی جانب اضافۂ طول = ف$_5$ ف$_7$

اور نیچے دباؤ کی وجہ سے ف$_2$، ف$_6$ پر چلا جائے گا یعنی کمی طول = ف$_2$ ف$_6$ لیکن تعدیلی محور ف$_3$ ف (جو مساوی ہے ف$_5$ ف$_4$ = ف$_1$ ف$_2$) اپنی اصلی حالت پر رہتا ہے یعنی اس میں نہ اضافہ طول ہوتا ہے اور نہ کمی۔

اب ایک چھوٹا سا ٹکڑا د د$_1$ طول اور ۱ تراش عمودی کے رقبہ کا تعدیلی محور کے اوپر تصور کرو جبکہ سلاخ خمائی نہیں گئی ہو (اس ٹکڑے کا طول بھی = ف$_3$ ف = ف$_1$ ف$_2$ = ف$_5$ ف$_4$)

سلاخ اگر خمائی جائے تو اس ٹکڑے میں اضافۂ طول = د$_1$ د$_2$

لہٰذا اضافۂ طول فی اکائی طول = $\frac{\text{د}_1\text{د}_2}{\text{د د}_1}$

ف$_7$، ف$_6$ کو اور ف$_5$، ف$_2$ کو ملاؤ اور ان کو اتنا خارج کرو کہ نقطہ ن پر ایک دوسرے کو یہ قطع کریں۔ ٹکڑے ف$_3$ ف کا مرکز انحنا "ن" ہوگا۔

اگر ی = اس سلاخ کے مادہ کا ینگ کا معیار لچک

$$\text{تو ی} = \frac{\text{زور}}{\text{بگاڑ}} = \frac{\frac{\text{قوت}}{1}}{\frac{\text{د}_1\text{د}_2}{\text{د د}_1}} = \frac{\text{قوت} \times \text{د د}_1}{1 \times \text{د}_1\text{د}_2} = \frac{\text{قوت} \times \text{ف}_3\text{ف}_1}{1 \times \text{د}_1\text{د}_2}$$

$$= \frac{\text{قوت} \times \text{ص}}{1 \times \text{ما}}$$ [کیونکہ دونوں مثلث د$_2$ د$_1$ ف$_1$ اور ف$_3$ ف ن متشابہ ہیں] جہاں ص = نصف قطر انحنا،

اور ما = اس ٹکڑے کا فاصلہ تعدیلی محور سے

لہذا قوت = $\frac{\text{ی ا ما}}{\text{ص}}$

∴ اس قوت کا معیار اثر = $\frac{\text{ی ا ما}^2}{\text{ص}}$

ایسی تمام قوتوں کا معیار اثر = $\frac{\text{ی}}{\text{ص}} \sum \text{ا ما}^2$

= جفت جو کہ اُن قوتوں کو توازن میں رکھتا ہے

= خمیدگی کا معیار اثر = م فرض کرو

∴ م = $\frac{\text{ی مج}}{\text{ص}}$ .... (۲۱)

جہاں مج، جمود کا معیار اثر ایسے محور کے گرد ہوگا جو کہ خلا میں سے گزرتا ہے اور کاغذ کے مستوی کے علی القوائم ہے۔

سلاخ جب کبھی خمائی جاتی ہے تو اس کے تراش عمودی کی شکل میں تبدیلی واقع ہوتی ہے۔

اوپر کے ریشوں کے طول کے اضافہ کے ساتھ ساتھ عرضی گھٹاؤ سمتِ اضافہ کے علی القوائم واقع ہوتا ہے۔

مگر ہم کو معلوم ہے کہ $\frac{\text{گھٹاؤ فی اکائی طول}}{\text{بڑھاؤ فی اکائی طول}}$ = مہ

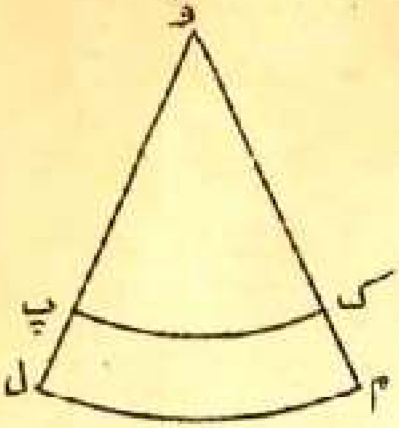
جہاں مہ = پواساں کی نسبت

∴ عرضی تخفیف فی اکائی طول = مہ × بڑھاؤ فی اکائی طول

اسی طرح نچلے ریشوں کے گھٹاؤ کے ساتھ ساتھ عرضی بڑھاؤ بھی واقع ہوتا ہے۔

تراش عمودی کی شکل اگر پہلے مستطیل تھی تو خمائے جانے کے بعد شکل ۲۳ کے مطابق پ ک م ل ہو جائے گی۔

فرض کرو کہ ل م وہ خط ہے جہاں تعدیلی سطح تراش عمودی کو قطع



شکل ۲۲

کرتی ہے۔

تب پ ک کا عرضی گھٹاؤ فی اکائی

طول $= \dfrac{\text{ل م} - \text{پ ک}}{\text{ل م}} =$ بڑھاؤ فی اکائی

طول × سہ

ہم جانتے ہیں کہ اضافہ طول فی اکائی

طول $= \dfrac{\text{ک م}}{\text{ص}} = \dfrac{\text{ہا}}{\text{ص}}$

$\therefore \dfrac{\text{ل م} - \text{پ ک}}{\text{ل م}} = \dfrac{\text{ک م}}{\text{ص}} \times \text{سہ}$

اگر ل پ اور م ک نقطہ وَ پر ملتے ہوں تو پہلے کی طرح

$\dfrac{\text{ل م} - \text{پ ک}}{\text{ل م}} = \dfrac{\text{ک م}}{\text{م وَ}} = \dfrac{\text{ک م}}{\text{ص}} \times \text{سہ}$

$\therefore \text{سہ} = \dfrac{\text{ص}}{\text{م وَ}} = \dfrac{\text{ص}}{\text{صَ}}$ .... (۲۲)

جہاں صَ = تعدیلی سطح کا نصف قطر انحنا اُس مستوی میں جو سلاخ کے طول کے علی القوائم ہو۔

لہذا دونوں نصف قطر انحناؤں میں نسبت، پواساں کی نسبت کے مساوی ہے۔

سلاخ میں توانائی:۔ سلاخ جن ریشوں پر منقسم ہے اُن میں سے ایک ریشہ پر غور کرو۔ ۱۳۵۱

اگر سلاخ کا طول = ل = ریشہ کا طول

اور سا = ریشہ کا تراش عمودی کا رقبہ۔

اب جبکہ ریشہ میں بڑھاؤ یا فساد واقع ہو رہا ہو تو

ہم کو معلوم ہے کہ ریشہ کے فی اکائی حجم میں توانائی

$$= \frac{1}{2}\ (\text{زور} \times \text{بگاڑ})$$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{\text{زور}}{\text{بگاڑ}} \times (\text{بگاڑ})^2$$

$$= \frac{1}{2}\ \text{ی}\ (\text{بگاڑ})^2$$

لہذا پورے ریشہ کی توانائی $= \frac{1}{2}\ \text{ی}\ (\text{بگاڑ})^2 . \text{س ا ل}$

مگر بگاڑ $= \frac{\text{ف}}{\text{ص}}$ جہاں ف = تعدیلی محور سے ریشہ کا فاصلہ اور ص = تعدیلی محور کا نصف قطر انحنا۔ ظاہر ہے کہ توانائی پوری سلاخ میں = ریشوں کی توانائیوں کی حاصل جمع کے

$$= \sum \frac{1}{2}\ \text{ی س ا ل}\ \frac{\text{ف}^2}{\text{ص}^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ \text{ی}\ \frac{\text{ل}}{\text{ص}^2} \sum \text{س ا ف}^2$$

$$= \frac{1}{2}\ \text{ی}\ \frac{\text{ل}}{\text{ص}^2} . \text{مج}$$

جہاں مج = رقبی جمود کا معیار اثر، تعدیلی محور کے گرد

لیکن $\frac{\text{مج ی}}{\text{ص}} = \text{م}$

$\therefore$ سلاخ کے اندر توانائی $= \frac{1}{2} . \frac{\text{ل م}}{\text{ص}}$ .... (۲۳)

کسی سلاخ کے ایک سرے پر وزن رکھا ہوا ہو تو سلاخ میں جھکاؤ یا اُتار۔

شکل ۱۱/۲ پر غور کرو۔ اگر سلاخ کے قائم کردہ نقطہ سے ف تک فاصلہ = لا، اور اگر سلاخ کا وزن نظر انداز کر دیا جائے تو م = ک ج (ل - لا)

جہاں ل سلاخ کے طول کے مساوی ہے اور ک وہ کمیت ہے جو سلاخ کے آزاد سرے پر رکھی ہوئی ہے۔

چونکہ $\frac{1}{\text{ص}} = \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2}$ (اگر خماؤ کم ہو)

$$\therefore \text{ک ج} (\text{ل} - \text{لا}) = \frac{\text{ی}}{\text{ص}} \cdot \text{مج} = \text{ی مج} \times \frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}}$$

[جہاں ما = لا فاصلہ پر اُتار]

اس مساوات کو تکملانے سے :—

$$\text{ک ج} (\text{ل لا} - \frac{\text{لا}^{۲}}{۲}) = \text{ی مج} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{گ}$$ جہاں گ کوئی مستقل ہے۔

لیکن جبکہ $\text{لا} = \text{صفر}$ تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{صفر}$ $\therefore \text{گ} = \text{صفر}$

پھر دوبارہ تکملانے سے :— $\text{ک ج} (\text{ل} \frac{\text{لا}^{۲}}{۲} - \frac{\text{لا}^{۳}}{۶})$

$= \text{ی مج ما} + \text{گ}_{۱}$ جہاں $\text{گ}_{۱}$ = کوئی مستقل

لیکن جبکہ $\text{لا} = \text{صفر}$ تو $\text{ما} = \text{صفر}$ $\therefore \text{گ}_{۱} = \text{صفر}$

دوسرے سرے پر اُتار یا جھکاؤ معلوم کرنے کے لئے $\text{لا} = \text{ل}$ رکھنا چاہیے۔

اب فرض کرو کہ $\text{لا} = \text{ل}$ پر جھکاؤ = ماَ

$$\text{تو ماَ مج ی} = \text{ک ج} (\frac{\text{ل}^{۳}}{۲} - \frac{\text{ل}^{۳}}{۶}) = \frac{\text{ک ج ل}^{۳}}{۳}$$

$$\therefore \text{اُتار ماَ} = \frac{\text{ک ج ل}^{۳}}{۳ \text{ مج ی}} \quad \text{.......... (۲۴)}$$

اس امر کو یاد رکھنا چاہیئے کہ سلاخ کا وزن یہاں نظر انداز کر دیا گیا ہے۔

سلاخ کے مرکز ثقل پر اُتار $\text{لا} = \frac{\text{ل}}{۲}$ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے،

پس اگر ما = سلاخ کے مرکز ثقل کا اُتار

$$\text{تو ما} = \frac{۵}{۴۸} \cdot \frac{\text{ک ج ل}^{۳}}{\text{مج ی}} \quad \text{.......... (۲۵)}$$

یہاں بھی سلاخ کی کمیت نظر انداز کر دی گئی ہے۔

فرض کرو کہ سلاخ کی کمیت م بھی اب زیر بحث ہے

چونکہ سلاخ کی کمیت کی وجہ سے ایک قوت نیچے کی جانب عمل کر رہی ہے۔
اسلئے خمیدگی کا معیار اثر نقطہ ف پر صرف اس کی وجہ سے

$$= \frac{\text{۴(ل - لا)}^{۲}\text{ ج}}{\text{۲ ل}}$$

ہٰذا خمیدگی کا مجموعی معیار اثر $= \text{م} = \text{ک ج (ل - لا)} + \frac{\text{۴ ج (ل - لا)}^{۲}}{\text{۲ ل}}$

$$= \text{ی جم} \frac{\text{فز}^{۲}\text{ ما}}{\text{فز لا}^{۲}}$$

اس کو تکملانے سے :- $\text{ی جم} \frac{\text{فز ما}}{\text{فز لا}} = \text{ک ج} \left(\text{ل لا} - \frac{\text{لا}^{۲}}{۲}\right)$

$$+ \frac{\text{۴ ج}}{\text{۲ ل}} \left(\text{ل}^{۲}\text{ لا} - \text{ل لا}^{۲} + \frac{\text{لا}^{۳}}{۳}\right) + \text{گ} \quad \ldots\ldots (۲۶)$$

(جہاں گ کوئی مستقل ہے)

لیکن جبکہ لا = صفر تو $\frac{\text{فز ما}}{\text{فز لا}}$ = صفر

اس لئے گ = صفر

پھر دوبارہ تکملانے سے :-

$$\text{ی جم ما} = \text{ک ج} \left(\frac{\text{ل لا}^{۲}}{۲} - \frac{\text{لا}^{۳}}{۶}\right) +$$

$$+ \frac{\text{۴ ج}}{\text{۲ ل}} \left(\frac{\text{ل}^{۲}\text{ لا}^{۲}}{۲} - \frac{\text{ل لا}^{۳}}{۳} + \frac{\text{لا}^{۴}}{۱۲}\right) + \text{گَ} \quad \ldots\ldots (۲۷)$$

لیکن جبکہ لا = صفر تو ما = صفر اسلئے مستقل گَ = صفر
سرے پر اتار یا جھکاؤ دریافت کرنیکے لئے لا = ل رکھنا چاہیئے۔

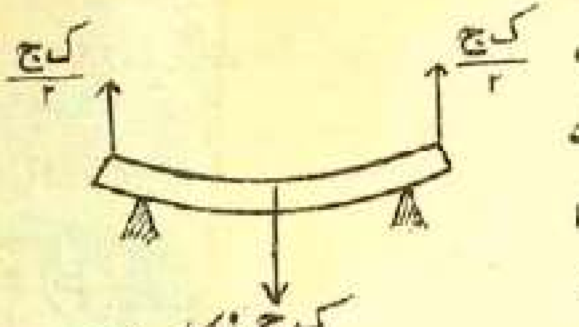
$$\therefore \text{ما} = \frac{\text{ک ج ل}^{۳}}{\text{۳ ی جم}} + \frac{\text{۴ ج ل}^{۳}}{\text{۸ ی جم}} \quad \ldots\ldots (۲۸)$$

چنانچہ مرکز ثقل پر اتار لا = $\frac{\text{ل}}{۲}$ رکھنے سے :-

$$\text{ما} = \frac{۵}{۴۸} \cdot \frac{\text{ک ج ل}^{۳}}{\text{ی جم}} + \frac{۱۷}{۳۸۴} \cdot \frac{\text{۴ ج ل}^{۳}}{\text{ی جم}} \quad \ldots\ldots (۲۹)$$

سلاخ جو دونوں سروں پر سہاری ہوئی ہو اور درمیان میں اس پر وزن رکھا گیا ہو۔

فرض کرو کہ شکل ۲۳ میں جو سلاخ دکھائی گئی ہے اس کے وسط میں ایک وزن ک ج لٹکایا جاتا ہے۔ سلاخ دو دھاریدار کناروں پر رکھی ہوئی ہے۔



شکل ۲۳

ایسی صورت میں سلاخ کے ایک سرے پر اوپر کی جانب $\frac{\text{ک ج}}{2}$ کی قوت عمل کرے گی اور دوسرے سرے پر بھی $\frac{\text{ک ج}}{2}$ کی قوت عمل کرے گی تاکہ تعادل قائم رہے۔

وسطی حصہ کا اُتار دریافت کرنے کے لئے اوپر کے ضابطہ (۲۴) میں ک ج کے بجائے $\frac{\text{ک ج}}{2}$ اور ل کے بجائے $\frac{\text{ل}}{2}$ رکھنا چاہیئے یعنی وسطی حصہ میں اُتار اگر ما' فرض کیا جائے تو

$$\text{ما}' = \frac{\frac{\text{ک ج}}{2}\left(\frac{\text{ل}}{2}\right)^3}{3\,\text{مج ی}} = \frac{\text{ک ج ل}^3}{48\,\text{مج ی}} \quad \ldots\ldots\ldots (30)$$

یہ یاد رکھنا ضروری ہے کہ یہاں بھی سلاخ کا وزن نظر انداز کر دیا گیا ہے۔ سلاخ کے وزن کو نظر انداز نہ کرنے کی صورت میں اور یہ یاد رکھتے ہوئے کہ اس کی کمیت م ہے، پہلے کی طرح سلاخ کے ایک سرے سے لا فاصلہ پر کوئی نقطہ ف تصور کرو۔

لہٰذا نقطہ ف پر خمیدگی کا مجموعی معیار اثر $= \text{ی مج}\ \frac{\text{ف}^2\text{ما}}{\text{ف لا}^2}$

$$= \frac{\text{ک ج} + \text{م ج}}{2}\left(\frac{\text{ل}}{2} - \text{لا}\right) - \frac{\text{م ج}\left(\frac{\text{ل}}{2} - \text{لا}\right)^2}{2\,\text{ل}}$$

اس کو تکملانے سے :- $\text{ی مج}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ک ج} + \text{م ج}}{۲}\left(\frac{\text{ل لا}}{۲} - \frac{\text{لا}^{۲}}{۲}\right) -$

$$- \frac{\text{م ج}}{\text{ل}^{۲}}\left(\frac{\text{ل}^{۲}\,\text{لا}}{۴} - \frac{\text{ل لا}^{۲}}{۲} + \frac{\text{لا}^{۳}}{۳}\right) + \text{گ}$$ [جہاں گ مستقل ہے]

لیکن جبکہ $\text{لا} = $ صفر تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = $ صفر اسلئے $\text{گ} = $ صفر

اسکو دوبارہ تکملانے سے :-

$$\text{ی مج ما} = \frac{\text{ک ج} + \text{م ج}}{۲}\left(\frac{\text{ل لا}^{۲}}{۴} - \frac{\text{لا}^{۳}}{۶}\right) -$$

$$\frac{\text{م ج}}{\text{ل}^{۲}}\left(\frac{\text{ل}^{۲}\,\text{لا}^{۲}}{۸} - \frac{\text{ل لا}^{۳}}{۶} + \frac{\text{لا}^{۴}}{۱۲}\right) + \text{گَ}$$ [جہاں گَ مستقل]

لیکن جبکہ $\text{لا} = $ صفر تو $\text{ما} = $ صفر $\therefore \text{گَ} = $ صفر

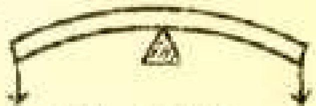
وسطی حصہ پر اُتار دریافت کرنے کیلئے $\text{لا} = \frac{\text{ل}}{۲}$ رکھنا ہوگا۔

لہذا $\text{ماَ} = \frac{\text{ک ج ل}^{۳}}{۴۸\ \text{ی مج}} + \frac{۵\ \text{م ج ل}^{۳}}{۳۸۴\ \text{ی مج}}$ .... (۳۱)

اگر سلاخ کے دونوں سرے آزاد ہوں ⑨ اور اسکا وسطی حصہ کسی سہارے پر لٹکا ہوا ہو۔ دیکھو شکل نمبر ۲۴ تو چونکہ وسطی حصہ پر تمام وزن مجتمع ہوگیا ہے لہذا $\text{ک ج} = -\text{م ج}$ رکھ کر اوپر کی طرح عمل کریں تو

سروں پر خود سلاخ کے وزن م ج کی وجہ سے اُتار $= \frac{۱}{۱۲۸}\cdot\frac{\text{م ج ل}^{۳}}{\text{ی مج}}$

یعنے سلاخ کے وزن کی وجہ سے قوت



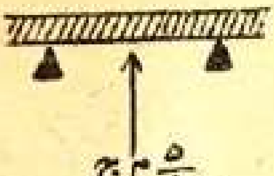
شکل ۲۴

چونکہ مخالف سمت میں عمل کر رہی ہے اس لئے مساوات (۳۱) کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں:-

$$\text{ماَ} = \frac{\text{ک ج ل}^{۳}}{۴۸\ \text{مج ی}} - \frac{۵}{۳۸۴}\cdot\frac{\text{م ج ل}^{۳}}{\text{مج ی}}$$

یہاں اگر ک ج = م ج رکھا جائے تو وہی نتیجہ حاصل ہوگا۔

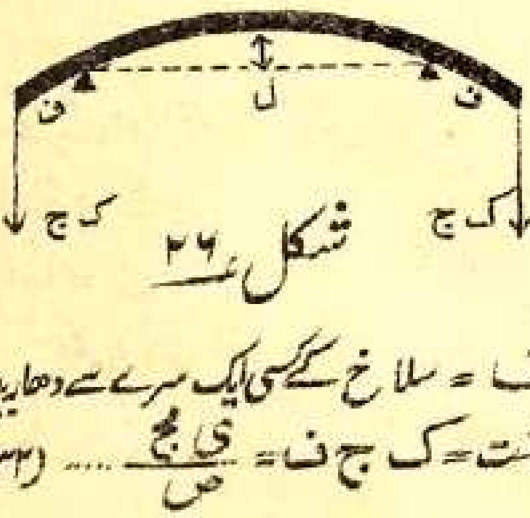
اگر سلاخ کے دونوں سروں کو سہاروں(۱۰) پر ٹکا کر، سلاخ کے درمیانی
حصہ پر اوپر کی جانب ایک قوت د کو عمل کرنے دیا جائے تو مساوات (۳۱)
حسب ذیل ہو جائے گی :-



شکل ۲۵

$$\text{ما} = \frac{5}{384} \cdot \frac{\text{م ج ل}^3}{\text{مج ی}} - \frac{\text{د ل}^3}{48\ \text{مج ی}}$$

اگر ما = صفر تو $\text{د} = \frac{5}{8}\ \text{م ج}$
یعنی سلاخ کے درمیانی حصہ کو اوپر کی طرف
$\frac{5}{8}$ م ج قوت سے ڈھکیلنا ہوگا تاکہ خمادہ یا جھکاؤ صفر ہو۔
اگر سلاخ کے دونوں سرے سہاروں پر ٹکا دئے جائیں اور ہر ایک
سرے پر ک ج وزن لٹکایا جائے (دیکھو شکل ۲۶) تو ایسی صورت میں سلاخ کا
اپنے معمولی مقام سے چڑھاؤ
"ما" حسب ذیل طریقہ
سے معلوم ہوگا :-
فرض کرو کہ ل



شکل ۲۶

= سلاخ کا طول دھاریدار
کناروں کے درمیان اور ف = سلاخ کے کسی ایک سرے سے دھاریدار
کنارہ تک فاصلہ تو ظاہر ہے کہ جفت = $\text{ک ج ف} = \frac{\text{ی مج}}{\text{ص}}$ ..... (۳۲)

لیکن یہ ہم کو معلوم ہے کہ $\text{ما} (2\ \text{ص} - \text{ما}) = \left(\frac{\text{ل}}{2}\right)^2$

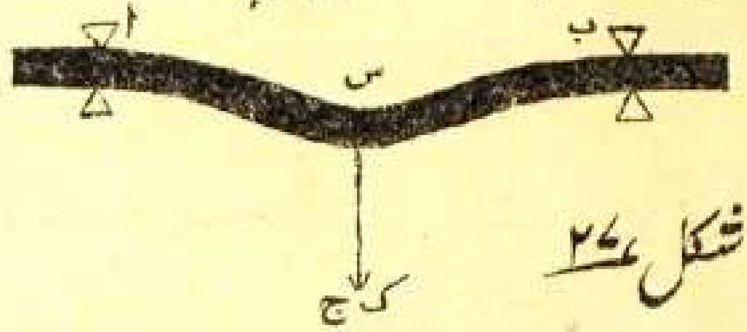
اگر ما کے مقابلہ میں ص بہت بڑا ہو تو $\text{ص} = \frac{\text{ل}^2}{8\ \text{ما}}$

$$\therefore \text{ک ج ف} = \frac{8\ \text{ما ی مج}}{\text{ل}^2}$$

یعنی $\text{ما} = \frac{\text{ک ج ف ل}^2}{8\ \text{ی مج}}$ .... (۳۳)

ایسی سلاخ جو دونوں سروں پر جکڑ دی گئی ہے لیکن درمیان میں اس پر وزن رکھا گیا ہے:-

فرض کرو کہ ا ب ایک سلاخ ہے جو سروں ا اور ب پر جکڑ دی گئی ہے اور س پر وزن رکھا گیا ہے دیکھو شکل نمبر ۲۷۔



شکل ۲۷

ا اور ب پر سہاروں کا عمل سلاخ پر ایک انتصابی قوت اور ایک جفت کے مماثل ہوگا۔ یہاں بھی ہم سلاخ کے وزن کو لٹکائے ہوئے وزن کے مقابلہ میں نظر انداز کئے دیتے ہیں۔ فرض کرد

ا ب = ل

$$\text{سہاروں پر انتصابی قوت} = \frac{\text{ک ج}}{۲}$$

$$\text{جفت م} = \frac{\text{ا س}}{۲} \times \frac{\text{ک ج}}{۲} = \frac{\text{ا س} \times \text{ک ج}}{۴} = \frac{\text{ک ج ل}}{۸}$$

اگر سلاخ ا اور ب پر نہ جکڑی جاتی تو جفت $\left(\frac{\text{ک ج}}{۲} \cdot \text{ا س}\right)$ کے مساوی ہوتا

لیکن چونکہ سلاخ جکڑی ہوئی ہے اسلئے جفت اسکا نصف ہوگا۔

سلاخ کے وزن کو نظر انداز کرتے ہوئے، صرف انتصابی قوت کی وجہ سے س پر اُتار $= \text{ہا} = \frac{\text{ک ج ل}^{۳}}{۴۸\ \text{ی مج}}$

فرض کرو کہ جھکت کی وجہ سے نقطہ س، اپنے افقی مقام سے کوئی فاصلہ ما اوپر ہٹتا ہے اور سلاخ ایک ایسے دائرہ کی شکل میں خم کیا جاتا ہے جس کا نصف قطر ص کے مساوی ہے۔

سادہ علم ہندسہ سے $\text{ا س}^2 = \text{ما}(\text{۲ ص} - \text{ما})$

چونکہ ۲ص کے مقابلہ میں ما بہت چھوٹا ہے

$$\therefore \text{ما} = \frac{\text{ا س}^2}{\text{۲ ص}} \quad \text{یعنے} \quad \text{ما} = \frac{\text{ل}^2}{\text{۸ ص}}$$

$$\text{لیکن } \text{م} = \frac{\text{مج ی}}{\text{ص}} = \frac{\text{مج ی} \times \text{۸ ما}}{\text{ل}^2}$$

$$\therefore \text{ما} = \frac{\text{م ل}^2}{\text{۸ ی مج}} = \frac{\text{ک ج ل}^3}{\text{۶۴ ی مج}}$$

لہذا س پر اُتار جبکہ قوت اور جھکت دونوں عمل کرتے ہیں (۱۱) = حاصل اُتار کے

$$= \text{ما}' - \text{ما} = \frac{\text{ک ج ل}^3}{\text{۴۸ ی مج}} - \frac{\text{ک ج ل}^3}{\text{۶۴ ی مج}}$$

$$= \frac{\text{ک ج ل}^3}{\text{۱۹۲ ی مج}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۳۴})$$

دھاریدار پتی کا خماؤ:۔ جس طرح سلاخوں کی صورت میں عمل کیا گیا تھا پتیوں کی صورت میں بھی تقریباً وہی عمل ہو سکتا ہے لیکن کسی قدر تصحیح کی اس میں ضرورت ہوتی ہے۔

شکل (۲۱) سے واضح ہوگا کہ طولی بگاڑ $\text{ن}_1 = \frac{\text{د}_1\text{د}_2}{\text{د د}_1} = \frac{\text{د}_1\text{د}_2}{\text{ف ف}_1} = \frac{\text{ما}}{\text{ص}} \ldots\ldots (\text{۳۵})$

اور یہ بھی ظاہر ہے کہ عرضی گھٹاؤ $\text{ن}_2 = \text{ن}_1 \times \text{مہ} = \frac{\text{مہ ما}}{\text{ص}} \ldots\ldots (\text{۳۶})$

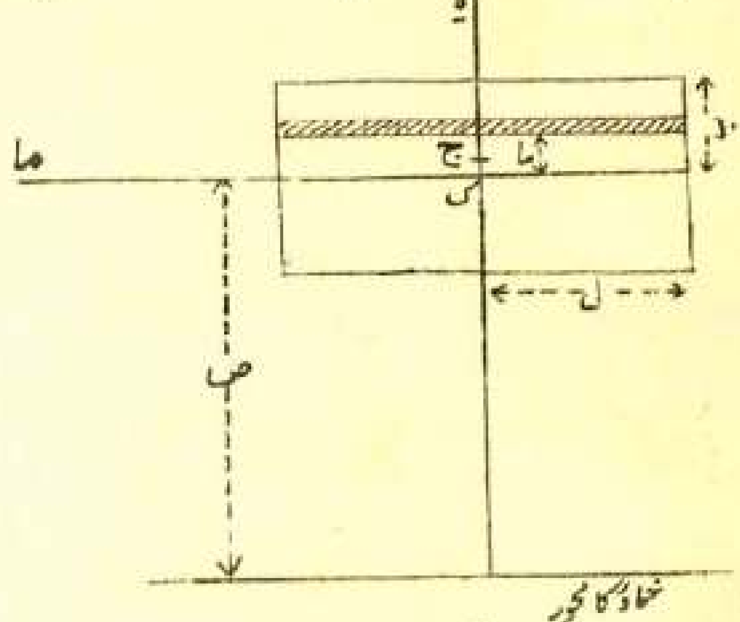
فرض کرو کہ اس ٹکڑے پر طولی زور $= \text{ت} = \frac{\text{قوت}}{\text{رقبہ}}$

∴ اس ٹکڑے پر قوت = ت ا

∴ پوری سلاخ یا پتی کے عرضی مستوی پر حاصل قوت = ∑ ت ا

∴ جفت یا خمیدگی کا معیار اثر = ∑ ت ا ما .... (۳۷)

شکل ۲۸ میں پتی کی تراش بتائی گئی ہے۔ فرض کرو اسکا مرکز ک اور ج مرکز ثقل ہے اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ ک ج = لا اور تراش کا عرض = ۲ ب اور تراش کا طول = ۲ ل



شکل ۲۸

یہاں بھی پہلے کی طرح ایک دھجی تصور کرو جسکا عرض فرما ہے اور جو تعدیلی محور سے ما فاصلہ پر ہے اور اس کے تراش عمودی کا رقبہ = (فرض کرو) ا

فرض کرو کہ اس ٹکڑے پر عرضی وضع میں یعنی ما کی سمت میں زور = تَ

پہلے کی طرح ت = عہ قَ − بہ (قَ + قَ) =

= عہ تَ − بہ مہ تَ

$$= \frac{تَ}{ی} - \frac{تَ\,مہ}{ی}$$

کیونکہ $\frac{1}{عہ}$ = ی اور $\frac{بہ}{عہ}$ = بہ ی = مہ

∴ $\frac{\text{ما}}{\text{ص}} = \frac{1}{\text{ئی}}(\text{ت} - \text{تَ مہ})$ ......(۳۸)

اسی طرح ن۲ = ع تَ − ب ت

$= \frac{1}{\text{ئی}}(\text{تَ} - \text{ت مہ})$ ......(۳۹)

∴ ان دونوں مساواتوں (۳۸) اور (۳۹) سے :-

$\text{ت}(1 - \text{مہ}^2) = \text{ئی}\left(\frac{\text{ما}}{\text{ص}} + \text{مہ ن}_2\right)$ ......(۴۰)

اور $\text{تَ}(1 - \text{مہ}^2) = \text{ئی}\left(\frac{\text{مہ ما}}{\text{ص}} + \text{ن}_2\right)$ ......(۴۱)

اس ٹکڑے پر قوت = ت ۲ ل . فرما

∴ مجموعی قوت (جو تراش عمودی کے علی القوائم ہے) $= \int_{\text{لا}-\text{ب}}^{\text{لا}+\text{ب}} \text{ت ۲ل فرما}$

$$= \int_{\text{لا}-\text{ب}}^{\text{لا}+\text{ب}} \frac{\text{ئی}\left(\frac{\text{ما}}{\text{ص}} + \text{مہ ن}_2\right) \text{۲ل فرما}}{1 - \text{مہ}^2}$$

$$= \left[\frac{\text{ئی ۲ل}}{(1 - \text{مہ}^2)} \left(\frac{\text{۲ب لا}}{\text{ص}} + \text{۲ب مہ ن}_2 \right) \right]$$

اب چونکہ مجموعی قوت (جو تراش عمودی کے علی القوائم ہے) اس قدر خفیف ہے کہ وہ تقریباً صفر کے مساوی ہے۔

لہذا $\frac{\text{۲ب لا}}{\text{ص}} + \text{۲ب مہ ن}_2 = \text{صفر}$

یعنی $\text{ن}_2 = -\frac{\text{لا}}{\text{ص مہ}}$ ......(۴۲)

∴ $\text{ت}(1 - \text{مہ}^2) = \text{ئی}\left(\frac{\text{ما}}{\text{ص}} - \frac{\text{لا}}{\text{ص}}\right)$ ......(۴۳)

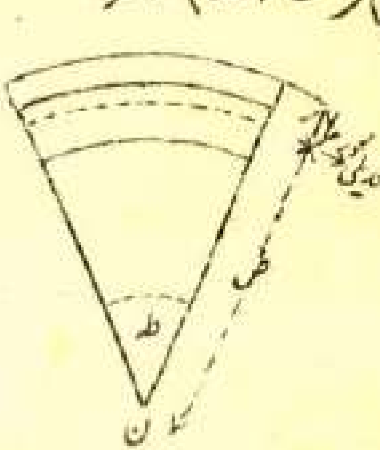
اب دوسری قوت جو اس ٹکڑے کے عرضی وضع میں عمل کر رہی ہے

= تَ (ص + ما) طہ فرما

چونکہ ٹکڑے کا طول = (ص + ما) طہ دیکھو شکل (۲۹)

∴ مجموعی قوت جو کہ ٹکڑے کے
عرضی وضع میں عمل کر رہی ہے $= \int_{لا-ب}^{لا+ب} ت\,(ص + ما)\, ط\, ذما$

$$= \int_{لا-ب}^{لا+ب} \frac{ی\left(مہ \frac{ما}{ص} + ن_۲\right)(ص + ما)}{(۱ - مہ^۲)}\, ط\, ذما$$



شکل ۲۹

= صفر (کیونکہ ناقابل لحاظ ہے)

∴ اس صورت میں $ن_۲$

$$= -مہ \left\{ \frac{لاص + لا^۲ + \frac{ب^۲}{۳}}{ص(ص + لا)} \right\}$$

$$= -\frac{لا}{ص\, مہ}$$

چونکہ یہ لا میں دوم درجہ کی مساوات ہے

$$∴ لا = \frac{ص}{۲} \left\{ -۱ \pm \sqrt{۱ + \frac{۴ مہ^۲ ب^۲}{۳(۱ - مہ^۲) ص^۲}} \right\}$$

اس کی صرف مثبت قیمت لینے سے :—

$لا = \frac{مہ^۲ ب^۲}{۳(۱ - مہ^۲) ص}$ کیونکہ ص کے مقابلہ میں ب بہت چھوٹا ہے۔

چونکہ ب، ص کے مقابلہ میں بہت چھوٹا ہے اس لئے لا بہت چھوٹا ہو گا
یعنی $ن_۲$ بہت ہی چھوٹا ہے۔
اسلئے مساوات (۴۰) سے :—

$$ت(۱ - مہ^۲) = ی\left(\frac{ما}{ص} + مہ\, ن_۲\right) \approx \frac{ی\, ما}{ص}$$

جفت یا خمیدگی کا معیار اثر $= \sum \text{ت ا ما}$

$$= \sum \frac{\text{ی ما}}{\text{ص}(\text{۱} - \text{مہ}^2)} \cdot \text{۲ ا ما}$$

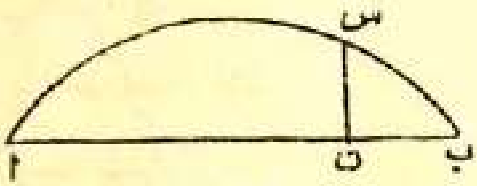
$$= \frac{\text{ی}}{\text{ص}(\text{۱} - \text{مہ}^2)} \sum \text{ا ما}^2$$

$$= \frac{\text{ی مج}}{\text{ص}(\text{۱} - \text{مہ}^2)} \quad \text{.......... (۴۴)}$$

پتیوں کی صورت میں یہ صحیح مساوات ہے۔

لچکدار منحنی[۱۴]:- فرض کرو کہ ایک سلاخ ا ب ایک کمان کی شکل میں خمائی گئی ہے یعنی ا اور ب نقطوں پر ایک ڈوری باندھ دی گئی ہے۔

حصہ س ب کے تعادل پر س پر کے زور اور ڈوری کے تناؤ ت کے تحت غور کرو۔



شکل نمبر ۳۰

اگر ص، س پر نصف قطر انحنا ہو تو:-

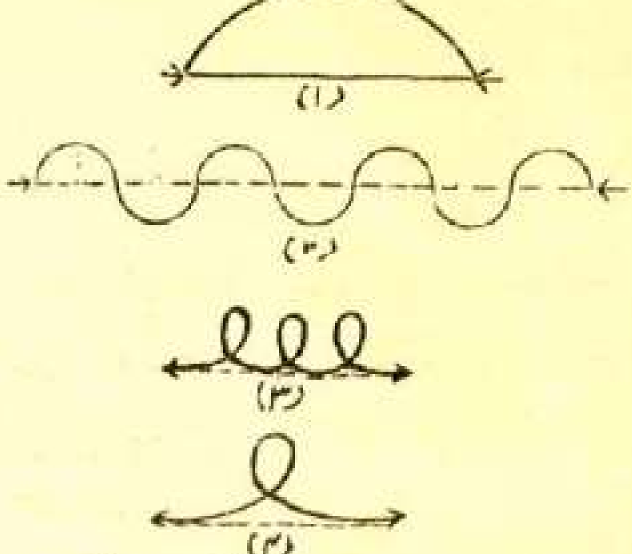
$$\text{جفت} = \text{ت} \times \text{ما} = \frac{\text{ی مج}}{\text{ص}} \quad \text{.......... (۴۵)}$$

جہاں ما = س ن اور ی = سلاخ کے مادے کا ینگ کا معیار لچک اور مج = سلاخ کا سطحی جمود کا معیار اثر ایسے ایک محور کے گرد، جو خماؤ کے مستوی کے علی القوائم ہو اور سلاخ کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔

ظاہر ہے کہ $\frac{\text{۱}}{\text{ص}} \propto \text{ما}$

لہذا وہ منحنی جس میں سلاخ کا مرکزی محور خمایا جاتا ہے ایسا ہوتا ہے کہ کسی نقطہ پر انحنا کے نصف قطر کا مقلوب، سیدھی سلاخ کے مقام سے نقطہ کے فاصلہ کے متناسب ہوتا ہے ایسی خواص کی منحنیاں "لچکدار منحنیوں" کے نام سے تعبیر کی جاتی ہیں۔ اس خاصیت کی منحنیاں مختلف شکلوں میں

ایک گھڑی کی کمانی لیکر اس کے سروں کو ایک ساتھ ڈھکیلنے یا کھینچنے سے بنائی جا سکتی ہیں۔ چند اس قسم کی منحنیوں کی شکلیں ذیل میں دکھائی گئی ہیں (شکل ۳۱)

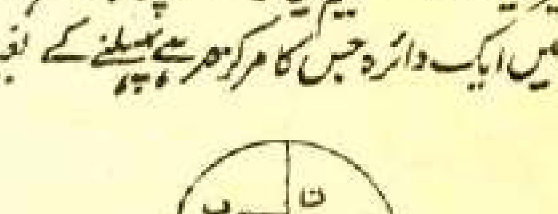


شکل ۳۱

پیکان کے نشانوں کی سمت سے لگائی ہوئی قوت کی سمت ظاہر ہوتی ہے۔

ہم اب یہ ثابت کریں گے کہ منحنی (۱) ایک نقطہ کا راستہ ہے اور یہ نقطہ ایک ایسے دائرے کے مرکز کے قریب واقع ہے جو پھسلنے کے بغیر ایک خط مستقیم میں لڑھکتا چلا جاتا ہے۔

فرض کرو کہ (شکل ۳۲) میں ایک دائرہ جس کا مرکز م ہے پھسلنے کے بغیر یکساں زاویئی رفتار ω سے ایک خط مستقیم ا ب پر لڑھک رہا ہے۔ اور یہ بھی فرض کرو کہ پ ایک نقطہ ہے جو م سے قریب ہے۔ اور خط ا ب سے دائرہ کے تماس کا نقطہ گ ہے۔



شکل ۳۲

پ ن ایک خط ایسا کھینچو جو م گ کے علی القوائم ہو۔ اگر نقطہ پ کی رفتار ر اور اس کے راستہ کا نصف قطر انحناء ص سے تعبیر کئے جائیں تو پ کا اسراع راستہ کے عمود کی سمت میں $= \frac{ر^2}{ص}$

گ کی رفتار صفر ہے۔ اور چونکہ یہ پورا انتظام گ کے گرد گھوم رہا ہے اسلئے پ کی رفتار پ گ کی سمت کے علی القوائم ہے۔

∵ ما = کلا × ف۱ جہاں پ گ = ف۱

پ کا اسراع = م کا اسراع + پ کا اضافی اسراع م کا لحاظ کرتے ہوئے۔

لیکن م یکساں رفتار سے ایک خط مستقیم پر حرکت کرتا ہے جبکہ دائرہ لڑھکتا رہتا ہے لہذا م کا اسراع صفر ہے۔

اور چونکہ م کے گرد پ ایک دائرہ بناتا ہے اس لئے پ کا اضافی اسراع پ م کی سمت میں م کا لحاظ کرتے = ف۲ × کلا² جہاں ف۲ = م پ

لہذا پ کا اسراع اسکے راستہ کے عماد کی سمت میں =

= کلا² ف۲ جم ∠م پ گ

= ما² / ص = کلا² ف۱² / ص

∴ ۱ / ص = ف۲ جم ∠م پ گ / ف۱²

چونکہ پ، م کے بالکل قریب ہے اسلئے ∠م پ گ بہت چھوٹا ہے اور تقریباً ∠پ م ن کے مساوی ہے اور نیز پ گ تقریباً دائرہ کے نصف قطر کے مساوی ہے۔

∴ ۱ / ص = ف۲ (ن م / پ م) / ف۱² = ما / ف۱² = ما / ن² .... (۴۶)

اس سے ظاہر ہے کہ ۱ / ص ∝ ما

نقطہ پ کی حرکت سے جو منحنی بنتا ہے وہ شکل (۴۳) سے ظاہر ہے۔



شکل ۳۳

اس سے واضح ہے کہ کوئی دو نقطوں ا اور ج کے درمیان

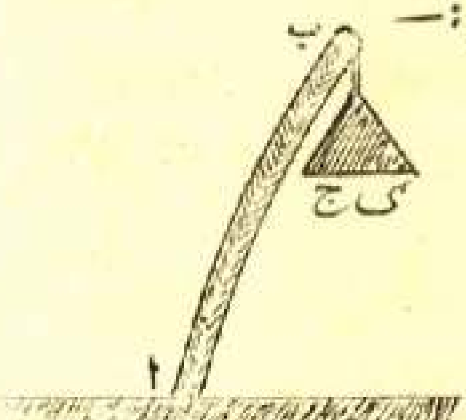
فاصلہ = ۲ π ن

مساوات (۴۵) سے :-

$$ت ما = \frac{ی ج}{ص} = \frac{ی ج ما}{ن^2}$$

$$\therefore ن^2 = \frac{ی ج}{ت} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴۷)$$

ایک ایسی سلاخ جو انتصاباً زمین میں ثابت کی گئی ہو اور اسکے اوپر کے سرے پر وزن رکھا گیا ہو :-



شکل ۳۴

شکل ۳۴ میں ایک سلاخ ا ب دکھلائی گئی ہے جو زمین میں ا پر انتصاباً قائم کی گئی ہے۔

فرض کرو کہ اسکے اوپر کے سرے ب سے ایک وزن ک ج لٹکایا جاتا ہے۔ اگر وزن بہت زیادہ ہو تو سلاخ خم جائے گی، جیسا کہ شکل میں دکھلایا گیا ہے۔ اس سلاخ کی شکل کا (شکل ۳۳) کے منحنی سے مقابلہ کرنے سے ظاہر ہوتا ہے کہ سلاخ کے قاعدہ کے خط اور نقطہ ب کے درمیان فاصلہ = شکل ۳۳ میں ا ج کا $\frac{1}{4}$ فاصلہ

اگر سلاخ کا طول = ل تو تعادل کے لئے

$$ل = \frac{ن \pi}{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{ی ج ما}{ک ج}}$$

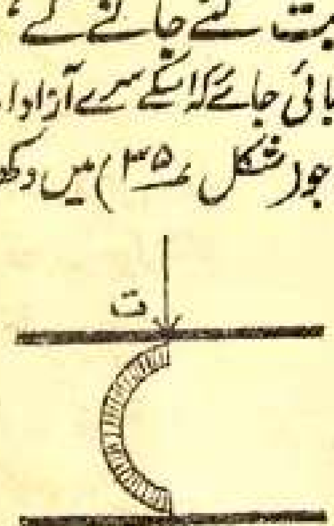
$$\therefore\ \text{ک ج} = \frac{\pi^2\,\text{ی مج}}{4\,\text{ل}^2}$$

یعنی ک ج کو $\frac{\pi^2\,\text{ی مج}}{4\,\text{ل}^2}$ سے کم ہو جانا چاہیئے تاکہ سلاخ خم نہ سکے یا بالفاظ دیگر اگر اس سے ک ج بڑھ جائے تو سلاخ خم جائیگی۔

اگر سلاخ استوانہ نما ہو تو مج = $\frac{\pi\,\text{ب}^4}{4}$ جہاں ب = سلاخ کا نصف قطر۔

چونکہ کوئی سلاخ کسی محدود وزن کو بغیر خمے ہوئے سہار نہیں سکتی اور ل کے بڑھنے سے یہ وزن کم ہوتا جاتا ہے اسلئے ایک دی ہوئی تراش عمودی کی سلاخ، اگر کافی بلند ہو تو صرف اپنے وزن سے خمنے لگے گی، بشرطیکہ یہ فرض کیا جائے کہ سلاخ کا وزن اس کے مرکز پر مجتمع ہو گیا ہے۔ لہذا اگر سلاخ کا وزن خود ک ج کے مساوی ہو جو اس کے درمیانی نقطہ پر عمل کرتا ہوا فرض کیا جاتا ہے، تو ایسی صورت میں تعادل کے لئے، سلاخ کی بلندی کی بھی ایک خاص حد ہوگی۔

لیکن سلاخ، بجائے ایک سرے پر ثابت کئے جانے کے، اگر دونوں سروں سے مساوی طور پر اس طرح دبائی جائے کہ اسکے سرے آزادانہ حرکت کر سکیں، تو سلاخ کی شکل ایسی ہو جائے گی جو (شکل ۳۵) میں دکھلائی گئی ہے۔ اس صورت میں اس کی شکل کو شکل (۳۳) کے منحنی سے مقابلہ کرنے سے ہمکو یہ مساوات حاصل ہوگی:۔



شکل ۳۵

$$\text{ل} = \pi\,\text{ن} = \pi\sqrt{\frac{\text{ی مج}}{\text{ت}}}$$

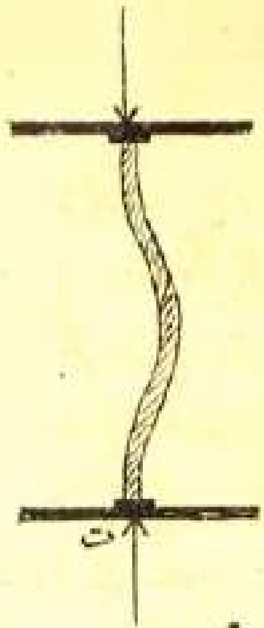
یعنے قوت ت کو $\frac{\pi^2\,\text{ی مج}}{\text{ل}^2}$ سے کم ہونا چاہیئے تاکہ بیشتر کی طرح سلاخ سیدھی رہے۔

اگر سلاخ کے سرے قائم کر دئے جائیں

اور پھر ان کو ایک قوت ت سے دبایا جائے
تو سلاخ شکل (۳۶) اختیار کر لیگی۔
یہاں ایسی مساوات حاصل ہوگی:-

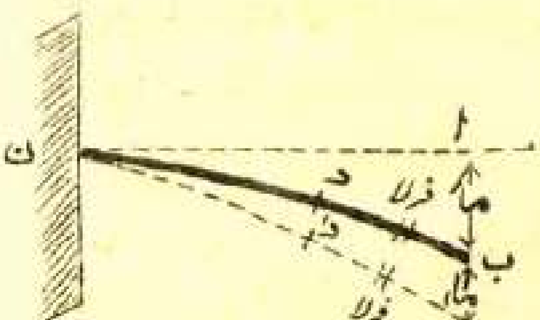
$$ل = ۲\pi ن = ۲\pi \sqrt{\frac{ی\ جھ}{ت}}$$

یعنی اس صورت میں سلاخ کے
تعادل کے لئے ت کو $\frac{۴\pi^{۲}\ ی\ جھ}{ل^{۲}}$
سے کم ہونا چاہیئے۔



شکل ۳۶

سلاخوں کا ارتعاش:- فرض کرو
کہ ایک سلاخ ا ن کا ایک سرا دیوار میں جوڑ دیا گیا ہے اور وہ اُفقی
وضع میں کسی وزن رکھنے کے
قبل قائم رہتی ہے۔ اگر اسکے
سرے پر وزن ک ج رکھا
جائے تو



شکل ۳۷

فرض کرو کہ اُتار =
= ما جو کہ شکل ۳۷ سے
ظاہر ہے۔

تو $ما = \frac{ک\ ج\ ل^{۳}}{۳\ جھ\ ی}$ + (کچھ اور بشرطیکہ ہم اس سلاخ کی کمیت
کو بھی لیں)

فرض کرو کہ اب ایک نیا وزن ک ج آویزاں کرنے کے بعد سلاخ
کا سرا ت پر آجاتا ہے۔
یعنی ک ج کی وجہ سے اُتار = ما + ما۱ (فرض کرو)

تب $\text{ما} + \text{ما}_1 = \dfrac{\text{کَ ج ل}^3}{\text{۳ مج ی}}$ + (کچھ اور، اگر ہم اس سلاخ کی کمیت کو بھی لیں)

اوپر کی دونوں مساواتوں کو تفریق کرنے سے:-

$$\text{مَا} + \text{ما}_1 - \text{ما} = \text{ما}_1 = \frac{(\text{کَ} - \text{ک})\,\text{ج ل}^3}{\text{۳ مج ی}} \quad \ldots\ldots (۴۸)$$

یعنی $\text{کَ ج} - \text{ک ج} = \dfrac{\text{ما}_1\ \text{۳ مج ی}}{\text{ل}^3}$ = وہ قوت جو سلاخ کو تعادل میں لانے کی کوشش کرتی ہے = کمیت × اسراع =

$= \dfrac{\text{ج کَ}}{\text{ج}} \cdot \dfrac{\text{فر}^2\,\text{ما}_1}{\text{فر و}^2}$ یہاں ج کَ سے مراد وہ وزن ڈائینوں میں ہے جو اہتزاز کے وقت رکھا گیا تھا، یعنی کمیت کَ گرام ہے۔

$\therefore \dfrac{\text{فر}^2\,\text{ما}_1}{\text{فر و}^2} = \dfrac{\text{۳ مج ما}_1\ \text{ی}}{\text{کَ ل}^3}$، یہ ایک سادہ موسیقی حرکت ہے، لہذا

$$\text{وقت دوران و} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{کَ ل}^3}{\text{۳ ی مج}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴۹)$$

اب ہم سلاخ کی کمیت کو لیکر بحث کرینگے:-

اگر سلاخ یکساں ہو تو اسکا مرکز ثقل د، درمیانی نقطہ سے تعبیر ہوگا، جب ۱، ب پر آئیگا تو فرض کرو کہ مرکز ثقل د کا اُتار = فہ

اب جبکہ ب، ت پر آئے گا فرض کرو کہ د، دَ پر آگیا یعنے د دَ = فہ فرض کرو

اب سلاخ کو نیچے اُتارنے کے لئے جو کام کیا گیا $= \int_{\text{صفر}}^{\text{ما}_1} (\text{کَ} - \text{ک})\,\text{ج فر ما}_1$

$$= \int_{\text{صفر}}^{\text{ما}} \frac{\text{۳ مج ی ما فرما}}{\text{ل}^{۳}} = \frac{\text{۳ مج ی ما}^{۲}}{\text{۲ ل}^{۳}}$$

∴ پوری توانائی بالقوہ اس سلاخ کی ن ت وضع میں

$$= \frac{\text{۳ مج ی ما}^{۲}}{\text{۲ ل}^{۳}} - \text{کَ ج ما} - \text{م ج فہ} \quad \text{جہاں م} =$$

= سلاخ کی کمیت

لیکن مساوات (۲۹) سے ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{فہَ} = \frac{\text{۵ کَ ج ل}^{۳}}{\text{۴۸ ی مج}} + \frac{۱۷}{۳۸۴} \cdot \frac{\text{م ج ل}^{۳}}{\text{ی مج}}$$

$$\text{اور فہ + فہَ} = \frac{۵}{۴۸} \cdot \frac{\text{کَ ج ل}^{۳}}{\text{ی مج}} + \frac{۱۷}{۳۸۴} \cdot \frac{\text{م ج ل}^{۳}}{\text{ی مج}}$$

$$\therefore \text{فہ} = \frac{۵}{۴۸} \cdot \frac{\text{(کَ - ک) ج ل}^{۳}}{\text{ی مج}} = \frac{۵}{۱۶}\,\text{ما} \quad \ldots\ldots (۵۰)$$

$$\therefore \text{پوری توانائی بالقوہ} = \frac{\text{۳ مج ی ما}^{۲}}{\text{۲ ل}^{۳}} - \text{کَ ج ما} - \frac{۵}{۱۶}\,\text{م ج ما} \quad \ldots\ldots (۵۱)$$

اب ہم اس سلاخ کی توانائی بالفعل ن ت کی وضع میں دریافت کریں گے۔

اس سلاخ میں ایک چھوٹا سا ٹکڑا فرلا طول کا ن سے لا فاصلہ پر تصور کرو۔

اس ٹکڑے کی کمیت = $\frac{\text{م}}{\text{ل}}$ فرلا لہذا اس کی توانائی بالفعل

$$= \frac{۱}{۲} \cdot \frac{\text{م فرلا}}{\text{ل}} \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرو}}\right)^{۲} \quad \ldots\ldots (۵۲)$$

جہاں س سے مراد وہ فاصلہ ہے جو ٹکڑا نیچے اُترا جبکہ ب' مقام دت پر آیا۔ فرض کرو کہ سَ سے مراد وہ فاصلہ ہے جو وہ ٹکڑا نیچے اُترا جبکہ ا مقام دب پر آیا۔ مساوات (۲۷) سے ظاہر ہے کہ

$$\text{سَ} = \frac{\text{کَ ج}}{\text{ی مج}}\left(\frac{\text{ل لا}^2}{2} - \frac{\text{لا}^3}{6}\right) + \frac{\text{م ج}}{\text{ل}^2\,\text{ی مج}}\left(\frac{\text{ل}^2\,\text{لا}^2}{2} - \frac{\text{ل لا}^3}{3} + \frac{\text{لا}^4}{12}\right)$$

$$\text{اور س} + \text{سَ} = \frac{\text{کَ ج}}{\text{ی مج}}\left(\frac{\text{ل لا}^2}{2} - \frac{\text{لا}^3}{6}\right) +$$

$$+ \frac{\text{م ج}}{\text{ل}^2\,\text{ی مج}}\left(\frac{\text{ل}^2\,\text{لا}^2}{2} - \frac{\text{ل لا}^3}{3} + \frac{\text{لا}^4}{12}\right)$$

$$\therefore \text{س} = \frac{(\text{کَ} - \text{ک})\,\text{ج}}{\text{ی مج}}\left\{\frac{\text{ل لا}^2}{2} - \frac{\text{لا}^3}{6}\right\} = \frac{3\,\text{ما}_1}{\text{ل}^3}\left\{\frac{\text{ل لا}^2}{2} - \frac{\text{لا}^3}{6}\right\}$$

∴ اس ٹکڑے کی توانائی بالفعل =

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\text{م فرلا}}{\text{ل}}\left\{\frac{3}{\text{ل}^3}\left(\frac{\text{ل لا}^2}{2} - \frac{\text{لا}^3}{6}\right)\right\}^2\cdot\left(\frac{\text{فر ما}_1}{\text{فر و}}\right)^2$$

∴ پورے سلاخ کی توانائی بالفعل =

$$= \int_{\text{صفر}}^{\text{ل}} \frac{1}{2}\cdot\frac{\text{م فرلا}}{\text{ل}}\cdot\frac{9}{\text{ل}^6}\left(\frac{\text{ل لا}^2}{2} - \frac{\text{لا}^3}{6}\right)^2\left(\frac{\text{فر ما}_1}{\text{فر و}}\right)^2$$

$$= \frac{33}{280}\,\text{م}\left(\frac{\text{فر ما}_1}{\text{فر و}}\right)^2$$

اب چونکہ کمیت کَ' ارتعاش کر رہی ہے لہذا اسکی توانائی بالفعل ن ت وضع میں

$$= \frac{1}{2}\,\text{کَ}\left(\frac{\text{فر ما}_1}{\text{فر و}}\right)^2$$

$$\therefore \text{مجموعی توانائی بالفعل} = \frac{1}{2}\text{ک}\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرو}}\right)^2 + \frac{33}{280}\text{م}\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرو}}\right)^2 \quad ......(۵۳)$$

لیکن بقائے توانائی سے توانائی بالفعل + توانائی بالقوہ = مستقل

$$\therefore \frac{1}{2}\left(\text{ک} + \frac{33}{140}\text{م}\right)\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرو}}\right)^2 +$$

$$+ \frac{3\,\text{مج ی ما}^2}{2\,\text{ل}^3} - \text{ک ج ما} - \frac{5}{16}\text{م ج ما} = \text{مستقل}$$

اس مساوات کو تفرق لینے سے:-

$$\frac{1}{2}\left(\text{ک} + \frac{33}{140}\text{م}\right)2\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرو}}\right)\left(\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرو}^2}\right) +$$

$$+ \frac{3\,\text{مج ی}}{2\,\text{ل}^3}\cdot 2\,\text{ما}\cdot\frac{\text{فرما}}{\text{فرو}} - \text{ک ج}\frac{\text{فرما}}{\text{فرو}} - \frac{5}{16}\text{م ج}\frac{\text{فرما}}{\text{فرو}} = \text{صفر}$$

$$\text{یعنی}\left(\text{ک} + \frac{33}{140}\text{م}\right)\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرو}^2} + \frac{3\,\text{مج ی ما}}{\text{ل}^3} - \left(\text{ک ج} + \frac{5}{16}\text{م ج}\right) = \text{صفر}$$

$$\text{فرض کرو کہ } \frac{3\,\text{مج ی ما}}{\text{ل}^3} - \left(\text{ک ج} + \frac{5}{16}\text{م ج}\right) = \text{عہ}$$

$$\text{تب } \frac{\text{فر}^2\text{عہ}}{\text{فرو}^2} = \frac{3\,\text{مج ی}}{\text{ل}^3}\cdot\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرو}^2} \text{ یعنی } \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرو}^2} = \frac{\text{ل}^3}{3\,\text{مج ی}}\cdot\frac{\text{فر}^2\text{عہ}}{\text{فرو}^2}$$

$$\therefore \left(\text{ک} + \frac{33}{140}\text{م}\right)\frac{\text{ل}^3}{3\,\text{مج ی}}\cdot\frac{\text{فر}^2\text{عہ}}{\text{فرو}^2} + \text{عہ} = \text{صفر}$$

یہ ایک سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے۔

$$\therefore \text{وقت دوران و} = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\text{ک} + \frac{33}{140}\text{م}\right)\text{ل}^3}{3\,\text{مج ی}}} \quad ......(۵۴)$$

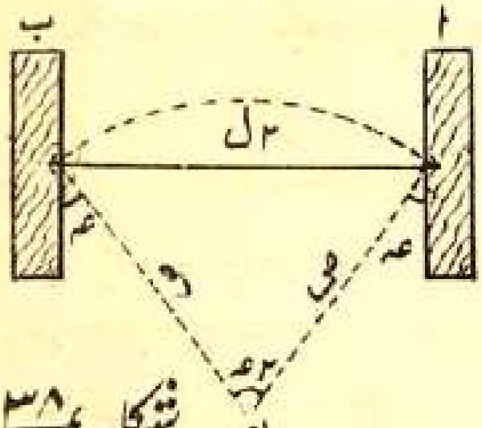
اس مساوات کے ذریعہ ہم کسی سلاخ کے مادے کا ینگ کا معیار لچک آسانی سے معلوم کرسکتے ہیں۔ اگر سلاخ مستطیلی شکل کی ہو تو $\text{مج} = \frac{\text{ب د}^3}{12}$

جہاں ب = سلاخ کا عرض اور د = سلاخ کی گہرائی

(۱۳)

ی اور د کی قیمتیں دریافت کرنیکے لئے سرل کا طریقہ:۔

فرض کرو کہ شکل ۳۸ میں ا اور ب دو بالکل ایک ہی شکل اور ایک ہی وزن کی دو سلاخیں ہیں اور ان کے درمیان ایک موٹے تار کے دونوں سرے قائم کئے گئے ہیں اور دونوں سلاخیں پتلی ڈوریوں کے ذریعے افقی وضع میں (سلاخوں کے) درمیانی نقطوں سے اسطرح لٹکائی گئی ہیں کہ انکے طولوں کی سمتیں ایک دوسرے کی متوازی ہیں۔ اب اگر سلاخوں کو افقی مستوی میں دائری وضع میں اسطرح اہتزاز کرنے دیں کہ انکے سرے پہلے ایک دوسرے کے قریب ہونے لگیں اور بعد میں آزادانہ حرکت کرنے لگیں تو تار میں خماؤ پیدا ہوگا۔ اگر تار کا



شکل ۳۸

طول = ۲ ل اور ہر ایک سلاخ کسی آن میں اپنی پہلی وضع سے زاویہ عہ گھومے تو تار میں جو اسکے خماؤ کے لئے جفت پیدا ہوگا = $\frac{\text{مج ی}}{\text{ص}_\text{ا}}$

جہاں $\text{ص}_\text{ا}$ = نصف قطر انحنا جو تار کے خماؤ کی وجہ واقع ہوا۔

$$\therefore \frac{\text{مج ی}}{\text{ص}_\text{ا}} = \text{ک ف}^{۲} \frac{\text{فر}^{۲}\text{عہ}}{\text{فر و}^{۲}}$$

جہاں ک ف^{۲} = اس سلاخ کے جمود کا معیار اثر ایسے انتصابی محور کے گرد جو اسکے مرکز جاذبیت سے گزرتا ہو۔

$$\therefore \text{ک ف}^{۲} \frac{\text{فر}^{۲}\text{عہ}}{\text{فر و}^{۲}} = \frac{\text{مج ی} \times ۲\,\text{عہ}}{۲\,\text{ل}}$$

یعنی $\frac{\text{فر}^{۲}\text{عہ}}{\text{فر و}^{۲}} = \frac{\text{مج ی عہ}}{\text{ل ک ف}^{۲}}$ ، یہ ایک سادہ موسیقی حرکت ہے۔

$$\therefore \text{وقت دوران } \text{و} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{ل ک ف}^2}{\text{مج ی}}} =$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{4\text{ل ک ف}^2}{\text{ی}\,\pi\,\text{ص}^4}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵۵)$$

جہاں ص = تار کا نصف قطر

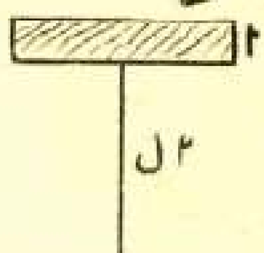
لہذا اسکے ذریعہ تار کے مادے کا ینگ کا معیار لچک معلوم کیا جا سکتا ہے۔
فرض کرو کہ اسکے بعد ایک سلاخ کو اوپر قائم کیا جاتا ہے اور دوسری سلاخ کو اُس ہی تار کے ذریعہ شکل ۳۹ کی طرح لٹکا کر دائری وضع میں اہتزاز کرنے دیا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں تار میں مروڑ پیدا ہوگا۔

مساوات (۵) سے

$$\text{وقت دوران } \text{و}_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2\text{ک ف}^2\text{ل}}{\text{د}\,\pi\,\text{ص}^4}}$$

لیکن اس ضابطہ میں ل = تار کا طول

اگر ۲ ل کو تار کا طول لیا جائے تو $\text{و}_1 = \sqrt{\frac{4\text{ک ف}^2\text{ل}}{\text{د}\,\pi\,\text{ص}^4}}$ ....(۵۶)



شکل ۳۹

اگر ی کی قیمت معلوم ہو جائے تو د معلوم ہو جاتا ہے اور پوا سان کی نسبت = مہ $= \frac{\text{ی}}{2\text{د}} - 1$ آسانی سے دریافت کیجا سکتی ہے۔

مہ، صرف و_1 اور و معلوم ہونے سے بھی دریافت کیا جا سکتا ہے۔

مساوات (۵۵) سے $\text{و}^2 = \frac{4\pi^2\, 4\text{ل ک ف}^2}{\text{ی}\,\pi\,\text{ص}^4}$

$$\therefore \text{ی} = \frac{16\pi^2\,\text{ل ک ف}^2}{\text{و}^2\,\pi\,\text{ص}^4}$$

اور مساوات (۵۶) سے

$$د = \frac{16\, \pi\, ک\, ف^2\, ل}{و_1^2\, \pi\, ص^4}$$

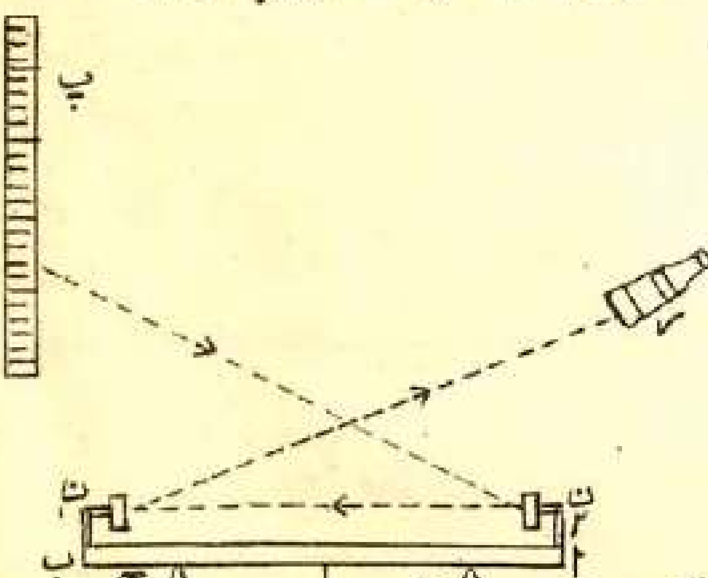
$$\therefore مہ = \frac{ی}{۲د} - ۱ = \frac{و_1^2}{۲و_2^2} - ۱ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵۷)$$

ی کی دریافت سلاخ کے خماؤ سے:۔ کسی سلاخ کے مادہ کا ینگ کا معیار لچک عموماً ایک آسان طریقہ سے دریافت کیا جاتا ہے جس میں سلاخ دونوں سروں پر سہاری جاتی ہے اور وزن اس کے درمیان میں رکھا جاتا ہے۔ مساوات (۳۱) کی مدد سے ی کی قیمت دریافت کیجاتی ہے۔

ایک سوئی کے سرے کو سلاخ کے مرکز پر جما کر اور متحرک خوردبین سے سلاخ کے اُتار کو جبکہ اس کے مرکز پر مختلف اوزان لگائے جائیں، دیکھ کر اُتار کی قیمت دریافت کی جاتی ہے۔

ی کی دریافت کوننگ کے طریقہ سے:۔

شکل نمبر ۴۸ میں ا ب ایک سلاخ ہے جو دو دھاریدار کناروں ج۱ اور ج۲ پر ٹکی ہوئی ہے ن۱ اور ن۲ دو سادہ مستوی آئینے ہیں جو سلاخ کے ساتھ اس کے سروں پر جوڑ دئے جاتے



شکل نمبر ۴۸

ہیں - س ایک دوربین ہے اور پ ایک لکڑی کا انتصابی پیمانہ ہے ۔ وزن ک ج سلاخ کے درمیانی نقطہ پر لگایا جاتا ہے ۔

سلاخ پر وزن لگانے کے پہلے، دوربین کے اندر کے صلیبی یا جلیبیائی تاروں سے پ کا جو خاص نشان منطبق ہوتا ہے اسکو دیکھ لیا جاتا ہے ۔ ظاہر ہے کہ سلاخ پر وزن لگانے کے بعد پیمانہ پ کا کوئی دوسرا نشان صلیبی تاروں سے منطبق ہوگا - اور آئینہ ن$_1$ داہنی جانب اور ن$_2$ بائیں جانب اپنے ابتدائی مقاموں سے مساوی زاوئے بناتے ہوئے خم جائیں گے - فرض کرو کہ آئینے جو زاویئے بناتے ہوئے خم جاتے ہیں وہ طہ کے مساوی ہے - یہ اُس زاویہ کے مساوی ہوگا جو سلاخ کے آزاد سرے خم کر بناتے ہیں - تھوڑی دیر کے لئے اب یہ تصور کرو کہ نور کی شعاعوں کی سمت اُلٹ دی جاتی ہے - جب آئینہ ن$_1$ زاویہ طہ گھومتا ہے تو شعاع منعکس اپنے ابتدائی مقام سے زاویہ ۲ طہ گھوم جائیگی لہذا وہ نقطہ جہاں شعاع منعکس آئینہ ن$_2$ سے ٹکراتی ہے بقدر فاصلہ ۲ طہ ف$_1$ اپنے ابتدائی مقام سے ہٹ جائیگا، جہاں ف$_1$ = دونوں آئینوں کے درمیان فاصلہ ۔

چونکہ آئینہ ن$_2$ بھی زاویہ طہ گھوم جاتا ہے اس لئے ن$_2$ سے منعکس شعاع زاویہ ۴ طہ گھوم جائے گی - لہذا پیمانہ کی درجہ خوانی اس کی وجہ سے ۴ طہ ف$_2$ بدل جائے گی ۔

جہاں ف$_2$ = پ اور ن$_2$ کے درمیانی فاصلہ کے

∴ پیمانہ کے شاہدات کا مجموعی ہٹاؤ جو دوربین میں نظر آئے گا =

= س (فرض کرو)

= ۲ طہ ف$_1$ + ۴ طہ ف$_2$

= ۲ طہ (ف$_1$ + ۲ ف$_2$)

∴ طہ = س / ۲(ف$_1$ + ۲ ف$_2$) .... (۵۸)

اگر سلاخ کا ایک سرا قائم کر دیا جائے اور دوسرے پر وزن لٹکا یا جائے تو مساوات (۲۶) سے ظاہر ہے کہ

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ک ج}}{\text{ی مج}}\left(\text{ل لا} - \frac{\text{لا}^{۲}}{۲}\right)$$ بشرطیکہ سلاخ کا وزن نظرانداز کر دیا جائے

اگر لا = ل رکھا جائے تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ک ج ل}^{۲}}{\text{۲ ی مج}}$

مگر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = اس زاویہ کے مماس کے جو سلاخ خم جاتی ہے = مس ط

$$\therefore \text{مس ط} = \frac{\text{ک ج ل}^{۲}}{\text{۲ مج ی}}$$

لیکن اس صورت میں ک ج = $\frac{\text{ک ج}}{۲}$ اور ل = $\frac{\text{ل}}{۲}$ کے لینا چاہیے

$$\therefore \text{مس ط} = \frac{\text{ک ج ل}^{۲}}{\text{۱۶ مج ی}}$$

اگر اُتار بہت ہی کم ہو تو ط بہت ہی چھوٹا ہوگا۔

اسلئے مس ط $\simeq$ ط

$$\therefore \text{مساوات (۵۸) سے } \text{ط} = \frac{\text{ک ج ل}^{۲}}{\text{۱۶ مج ی}} = \frac{\text{س}}{(\text{ف}_{۱} + \text{۲ ف}_{۲})^{۲}}$$

$$\therefore \text{ی} = \frac{\text{ک ج ل}^{۲}(\text{ف}_{۱} + \text{۲ ف}_{۲})}{\text{۸ س مج}} \qquad \text{(۵۹)}$$

اگر سلاخ مستطیلی وضع کی ہو تو مج = $\frac{\text{ب د}^{۳}}{۱۲}$

جہاں ب = اس سلاخ کا عرض اور د = گہرائی

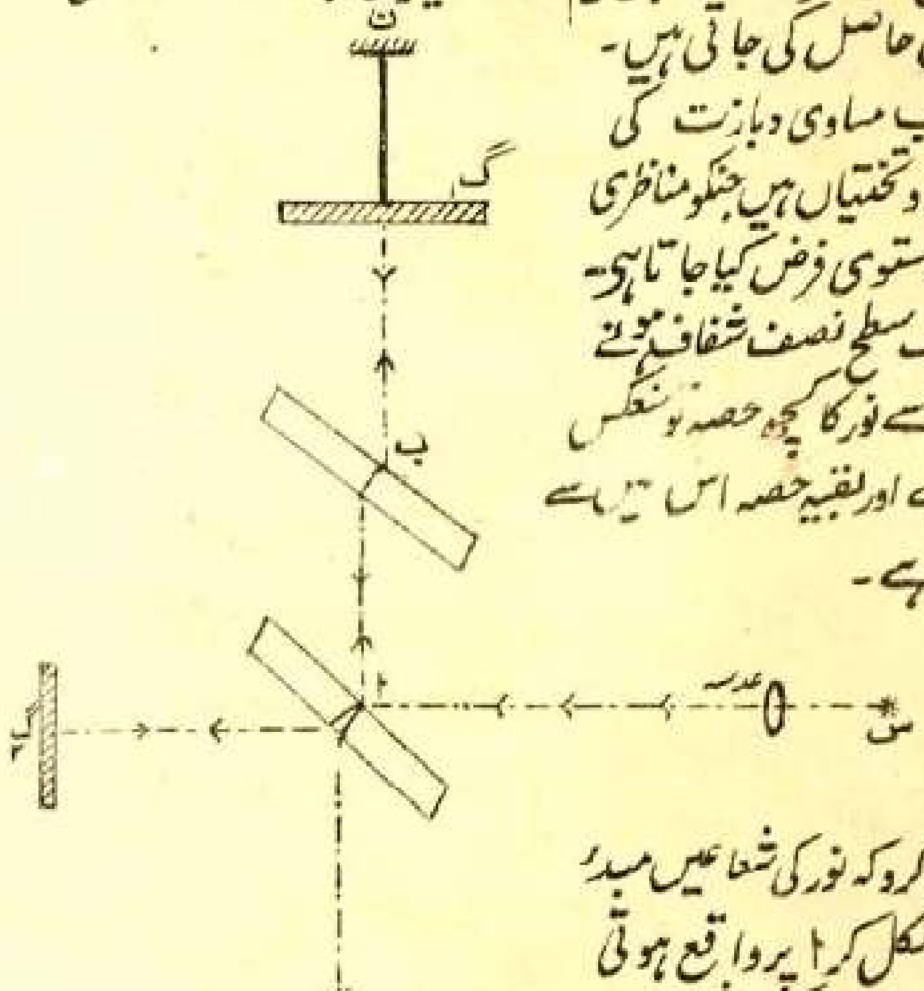
اگر سلاخ اسطوانہ نما ہو تو مج = $\frac{\pi\,\text{ص}^{۴}}{۴}$

جہاں ص = اسکا نصف قطر

ینگ کے معیار لچک کی دریافت (مناظری طریقہ سے)

پہلا طریقہ :- اس طریقہ کی توضیح شکل نمبر ۱۴۱ سے ہوتی ہے۔ اسمیں میکلسن کے طریقہ کے مطابق نیم شفاف تختیوں کی مدد سے تداخلی دھاریاں حاصل کی جاتی ہیں۔

ا اور ب مساوی دبازت کی شیشہ کی دو تختیاں ہیں جنکو مناظری لحاظ سے مستوی فرض کیا جاتا ہے۔ ا کی ایک سطح نصف شفاف ہونے کی وجہ سے نور کا کچھ حصہ تو منعکس ہوجاتا ہے اور بقیہ حصہ اس تختی سے گزر جاتا ہے۔



شکل نمبر ۱۴۱

فرض کرو کہ نور کی شعاعیں مبدء س سے نکل کر ا پر واقع ہوتی ہیں۔ ان میں سے کچھ شعاعیں اوپر کی سطح سے منعکس ہوکر واپس ہوتی ہیں اور ا میں سے گزر کر دوربین کے چشمہ چ میں داخل ہوتی ہیں۔

شعاعوں کا بقیہ حصہ ا سے

منعطف ہوکر ایک دوسرے مستوی آئینہ گ٢ تک جاتا ہے اور پھر اس آئینہ سے منعکس ہوکر ا تک آتا ہے۔ بالآخر یہ شعاعیں بھی چشمہ میں داخل ہوتی ہیں۔ ظاہر ہے کہ ا پر واقع ہونے والی شعاعوں کے پہلے حصہ اور اس دوسرے حصہ میں تداخل ہوگا اور دوربین کے چشمہ میں تداخلی دھاریاں نظر آئیں گی۔ اگر کسی ایک آئینہ اور شیشہ کی تختی ا کا درمیانی فاصلہ بدل دیا جائے تو چشمہ میں دھاریاں ہٹتی ہوئی نظر آئیں گی۔

فرض کرو کہ گ١ کے وسطی حصہ میں ایک چھوٹے تار کا ایک سرا اور اسکا دوسرا سرا ن پر جما دیا جاتا ہے۔ تار کو ہم اگر کسی طریقہ سے کھینچیں تو گ١ نیچے جائے گا اور گ١ اور ا کا درمیانی فاصلہ بدل جائے گا، اسلئے تداخلی دھاریاں بھی ہٹ جائیں گی۔ ان کا نقل مقام ایک ایسے چشمہ کی مدد سے جس کے اندر خردپیما ہو، آسانی سے ناپا جا سکتا ہے۔ اس طرح آئینہ گ١ کی حرکت ١/دس لاکھ سمر تک ناپی جا سکتی ہے۔ یہ طریقہ بے حد حساس ہے اور کیمبرج میں شکسپیر نے اسکو ینگ کے معیار لچک کی دریافت میں استعمال کیا تھا۔

فرض کرو کہ ایک لونی نور جسکا طول موج لہ ہے استعمال کیا جا رہا ہے۔

منور دھاریوں کے لئے راستوں میں تفاوت = ع لہ = لا

(فرض کرو) جہاں ع کوئی صحیح عدد ہے۔

فرض کرو کہ آئینہ گ١ نیچے کی طرف ایک خاص فاصلہ ما تک حرکت کرتا ہے اور اسکی وجہ سے عَ تعداد کی منور دھاریاں نقل مقام کرتی ہیں۔

اس صورت میں راستوں کا تفاوت = (ع + عَ) لہ =

= (فرض کرو) لاَ

چونکہ ۲ اور گ۲ کے درمیان فاصلہ حسب سابق رہا

∴ لَ − ل = ۲ ما = عَ ل

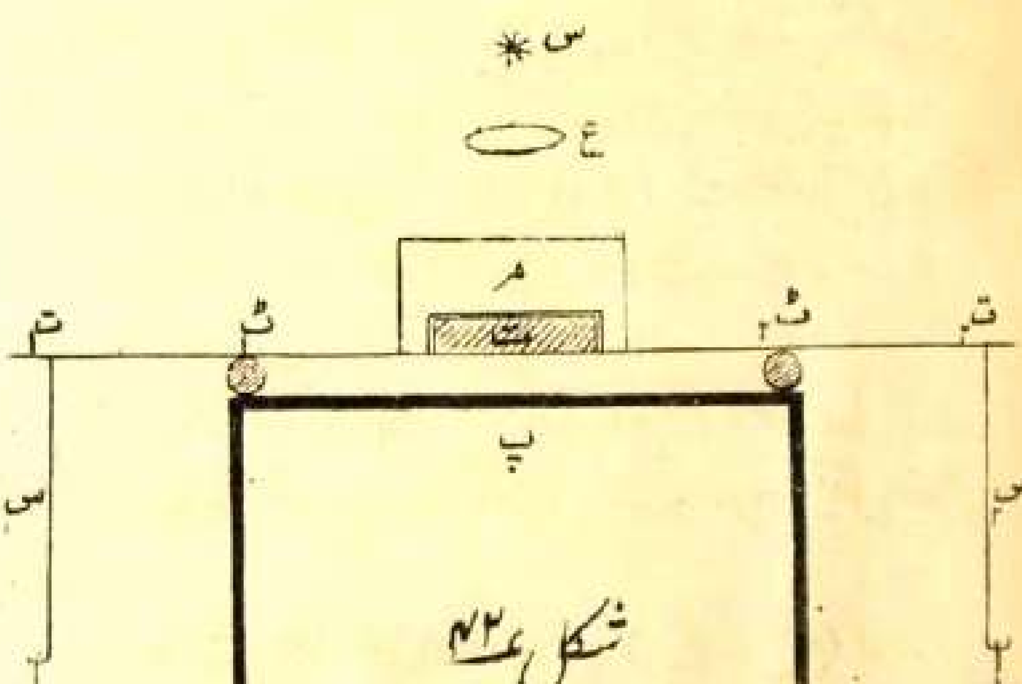
∴ ما = $\frac{\text{عَ ل}}{۲}$ .... (۶۰)

اسکے ذریعہ ما یعنی تار کا اضافۂ طول معلوم کیا جا سکتا ہے۔

اگر کسی سلاخ کے سِرے سہاروں پر ٹکا دئے جائیں اور سلاخ کے درمیانی حصہ میں وزن لٹکایا جائے تو اس طریقہ سے اسکا ٹ تا بھی صحت کے ساتھ دریافت کیا جا سکتا ہے۔

دوسرا طریقہ:— اس طریقہ سے سیشہ کے لئے ینگ کا معیار لچک اور استواری کی شرح دریافت کی جاتی ہے۔

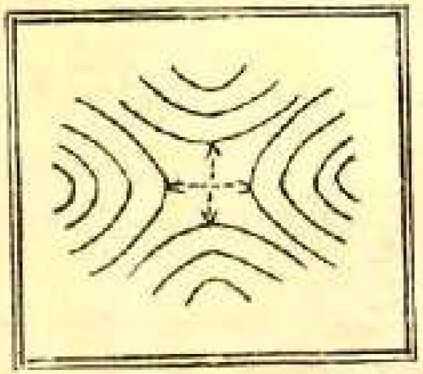
شکل ۴۲ میں ایک لمبی مستطیلی شیشہ کی تختی، دو شیشہ کی نلیوں ٹ۱ اور ٹ۲ پر (جو سخت موم کے ذریعہ لکڑی کے تختہ سے جوڑدی جاتی ہیں) متشاکل طریقہ سے رکھی جاتی ہے، ت۱ اور ت۲ دو چھوٹی شیشہ



شکل ۴۲

کی نلیاں ہیں جس کو لاک سے شیشہ کی تختی کی اوپر والی سطح کے ساتھ جما دیا جاتا ہے اور ان دونوں چھوٹی شیشہ کی نلیوں میں سے تانبے کے تار کے لمبے رکاب نما ٹکڑے گزرتے ہیں جن کو شکل ۴۲ میں س۱ اور س۲ سے تعبیر کیا گیا ہے۔

ت ایک مناظری طور پر مستوی شیشہ کی موٹی تختی ہے جو پہلی تختی کے مرکز پر رکھ دی جاتی ہے۔ شیشہ کا ایک ٹکڑا م افق کے ساتھ ۴۵° بناتے ہوئے، شیشہ کی موٹی تختی ت پر رکھا جاتا ہے۔ ایک چھوٹا آئینہ جو شکل میں نہیں بتایا گیا ایک لوہے کے استادہ کو لگا کر ان سب کے اوپر کسی مناسب زاویہ پر اس طرح رکھا جاتا ہے کہ م سے نیچے منعکس ہونے والی (سوڈیم کے مبدء نور س کی) شعاعوں سے کوئی تداخلی دھاریاں بنیں تو اچھی طرح نظر آسکیں۔ ت اور شیشہ کی تختی کے درمیان ہوا کی پتلی جھلی بن جاتی ہے اور اس کی وجہ سے تداخلی دھاریاں جو شکل ۴۳ میں دکھلائی گئی ہیں پیدا ہوتی ہیں۔ ان کو ایک متحرک خوردبین سے، جو دوربین کی طرح (سامنے ایک عدسہ رکھ کر) استعمال کی جاسکتی ہے، دیکھا جاتا ہے۔ ایک وزن ک ج دونوں رکابوں س۱ اور س۲ پر لگایا جاتا ہے۔ آئینہ اور شیشہ کی موٹی تختی ت کو ایک موزوں مقام پر اس طرح ترتیب دیتے ہیں کہ متحرک دوربین کے ذریعہ دیکھنے سے ہزلولی



شکل ۴۳

شکل کی دھاریاں شیشہ کی تختی اور ت کے درمیان نظر آنے لگیں۔ شیشہ کی تختی کے طولی خماو کی وجہ سے دھاریاں سیدھے اور بائیں جانب اور

عرضی خماؤ کی وجہ سے اوپر اور نیچے کی جانب مقعر ہونے لگتی ہیں۔

مختلف دھاریوں کے قطر، متحرک دوربین سے احتیاط کے ساتھ ناپے جاتے ہیں۔

مساوات (۳۲) سے خمیدگی کا معیار اثر = ک ج × ل = $\frac{\text{ی مج}}{\text{ص}}$

جہاں ۲ل = (ٹ۱ اور ٹ۲ کا درمیانی فاصلہ) ـ (ٹ۱ اور ٹ۲ کا درمیانی فاصلہ)

ص = طولی خماؤ کا نصف قطر انحنا

مج = $\frac{\text{ب ا}^{3}}{12}$ جہاں ب = شیشہ کی تختی کا عرض

ا = 〃 〃 کی گہرائی

اگر ن ویں تداخلی دھاری کا قطر ف ہو تو

$\frac{\text{ف}^{2}}{4}$ = ص ن لہ جہاں لہ = سوڈیم کے نور کا اوسط طول موج

= ۵۸۹۳ × ۱۰ $^{-8}$ سنٹی میٹر

∴ ی = $\frac{\text{ک ج ل ص}}{\text{مج}} = \frac{\text{۳ ک ج ل ف}^{2}}{\text{ن لہ ب ا}^{3}}$ ....(۶۱)

تجربہ میں ف^{2} کو ن کے مقابل مرتسم کرو۔ ایک خطی رشتہ حاصل ہوگا اور اس خط مستقیم کی ڈھال سے کسی خاص وزن کے لئے اسکی اوسط قیمت حاصل ہوگی۔

اس کے بعد ک ج کو $\frac{\text{ن}}{\text{ف}^{2}}$ کی متناظر قیمتوں کے مقابل مرتسم کرو۔ پھر بھی ایک خط مستقیم حاصل ہوگا۔ اس کے ڈھال سے $\frac{\text{ک ج ف}^{2}}{\text{ن}}$ کی اوسط قیمت حاصل ہو جائے گی۔ لہٰذا مساوات (۶۱) میں یہ قیمت لکھنے سے (چونکہ دوسری تمام چیزیں معلوم ہیں) ینگ کے معیار لچک کی قیمت دریافت کی جاسکتی ہے۔

اگر اسی طرح صَ = عرضی خماؤ کا نصف قطر انحنا

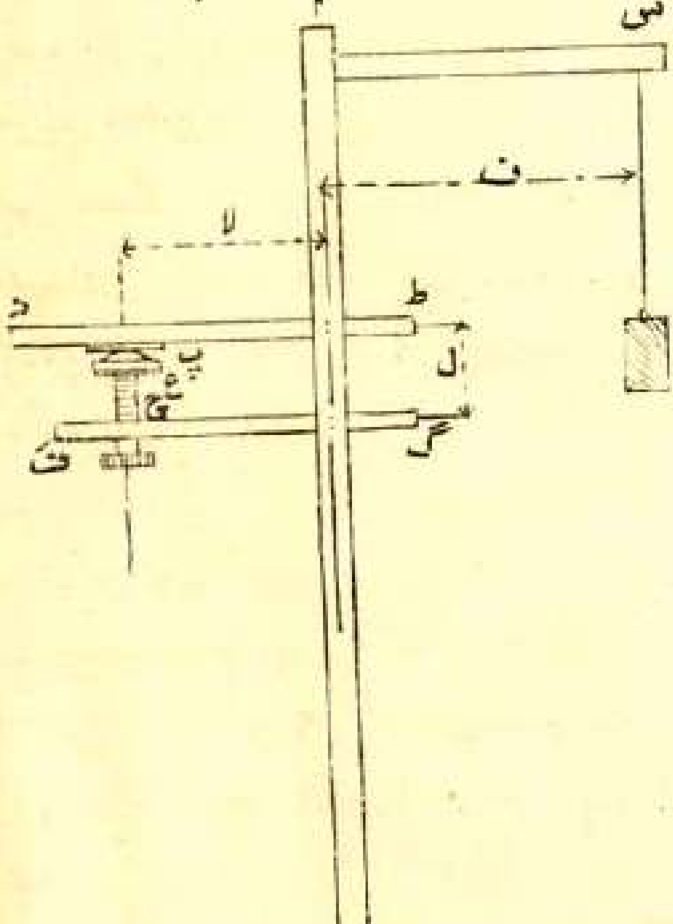
تو صَ نَ لہ = $\frac{\text{فَ}^{2}}{4}$ جہاں فَ = نَ ویں تداخلی دھاری کا قطر

$$\therefore \text{پواسان کی نسبت مہ} = \frac{\text{ص}}{\text{ص}'} = \frac{\text{ف}^2}{\text{ن}} \times \frac{\text{ن}'}{\text{ف}'^2} \quad \ldots\ldots (۶۲)$$

اس سے پواسان کی نسبت معلوم ہو جاتی ہے۔

اب چونکہ ی اور مہ معلوم ہیں اسلئے استواری کی شرح معلوم ہو سکتی ہے۔

تیسرا طریقہ :۔ ایک فولادی سلاخ ا ب جسکے تراش عمودی کی وضع دائری ہے اور جسکے مادّے کے ینگ کا معیار لچک دریافت طلب ہے، ایک بھاری قاعدہ ح میں اس طرح استادہ کی جاتی ہے کہ اس کا محور انتصابی رہتا ہے۔ ایک افقی بازو ا س سلاخ کے اوپر کے سرے کے ساتھ جوڑ دیا جاتا ہے اور اس بازو کے سرے س پر ایک وزن لٹکایا جاتا ہے۔ دیکھو شکل ۴۴ ا ب کے ساتھ مضبوطی سے پکڑی ہوئی دو تختیاں ط د اور گ ق ہیں۔



شکل ۴۴

اوپر والی تختی میں ایک مستوی شیشہ کا ٹکڑا پ پیچوں پر سہارا جاتا ہے (یہ پیچ شکل میں نہیں

دکھلائے گئے ہیں) اور نچلی تختی میں سے ایک پیچ پچ گزرتا ہے جس کے اوپر کے سرے پر ایک مستوی محدب عدسہ ع رکھا ہوا ہوتا ہے۔

اس پیچ کی مدد سے عدسہ ع کو اتنا اوپر ہٹایا جاتا ہے کہ یہ مستوی شیشہ پ کو چھونے لگے۔ اگر تختی اور عدسہ کے نظام کو ایک لو لی نور (ط د کے اوپر اس سے ۴۵° مائل ایک شیشہ کی تختی رکھ کر سوڈیم کے شعلہ کے نور کو منعکس کیا جائے) سے منور کیا جائے تو نیوٹن کے حلقے نظر آئیں گے۔ ان حلقوں کا ایک خوردبین کی مدد سے (جسکا محور پ کے اوپر انتصابی ہو) امتحان کیا جا سکتا ہے تختی پ کو پیچوں کے ذریعہ اتنا ہٹانا چاہیئے کہ یہ عدسہ ع کے بلند ترین نقطہ پر مس کرنے لگے اور پ اور ع کی درمیانی فضا کو بغیر مس کئے حتی الامکان گھٹانا چاہیئے۔ اس پر ہاتھ کا ہلکا سا دباؤ ان حلقوں کو اندر کی جانب بند ہونے پر مجبور کرے گا۔ لیکن یہ عمل اگر واقع نہ ہو تو اس کا مطلب یہ سمجھنا چاہیئے کہ پ اور ع ایک دوسرے کو مس کر رہے ہیں۔ ایسی صورت میں پیچ کو اتنا گھمانا چاہیئے کہ ایک بالکل چھوٹی سی جگہ پ اور ع کے درمیان چھوٹ جائے۔ س پر وزن کو بتدریج بڑھانے کے لئے انتظام ہوتا ہے، اس سے حلقے خوردبین کے میدان نظر میں اتنا آہستہ حرکت کرتے ہیں کہ انکو گِن لیا جا سکتا ہے۔ پھر ایک دئے ہوئے وزن کو بتدریج لگانے سے حلقوں کی وہ تعداد جو مرکز کے پاس غائب ہوتے ہیں گِن لی جا سکتی ہے۔ متبادل طور پر، مرکز پر بننے والے نئے حلقوں کی تعداد جبکہ وزن بتدریج کم کیا جاتا ہے شمار کی جا سکتی ہے۔ اس عمل کو مختلف وزن لگا کر دہرانا چاہیئے۔

فرض کرو کہ وزن جو لگایا جاتا ہے وہ ک، ج کے مساوی ہے
اور ا س = ف اور ط گ = ل اور لا = سلاخ کے محور

اور عدسہ اور تختی کے نقطہ تماس کے درمیان فاصلہ

چونکہ سلاخ کے سرے پر ایک جفت ک ج ف اور قوت ک ج عمل کر رہی ہے۔

لہٰذا جفت جو سلاخ کو خمائے گا اس کی تعبیر $\frac{\text{ی جھ}}{\text{ص}}$ = ک ج ف ہوگی۔ جہاں ص = نصف قطر انحنا

ی = سلاخ کے ینگ کا معیار لچک

جھ = سلاخ کے تراش عمودی کے جمود کا معیار اثر قطر کے گرد

$$= \frac{\pi\ \text{ص}_{\text{۱}}^{\text{۴}}}{\text{۴}}$$

$$\text{لہٰذا}\quad \frac{\text{جھ}}{\text{ص}} = \frac{\text{۴ک ج ف}}{\pi\ \text{ی ص}_{\text{۱}}^{\text{۴}}}$$

ط د اور گ ف تختیوں کے درمیانی زاویہ میں سلاخ کے خماؤ کی وجہ سے اضافہ $\frac{\text{ل}}{\text{ص}}$ ہوگا

یعنی خماؤ کی وجہ سے عدسہ اور تختی کے درمیانی فاصلہ میں اضافہ =

$$= \text{لا} \times \frac{\text{ل}}{\text{ص}} = \frac{\text{۴ک ج ف لا ل}}{\pi\ \text{ی ص}_{\text{۱}}^{\text{۴}}}$$

اور وزن ک ج کی وجہ سے سلاخ کے طول میں فی سمر کمی

$$= \frac{\text{ک ج}}{\text{ی}\ \pi\ \text{ص}_{\text{۱}}^{\text{۲}}}$$

یعنی وزن کی وجہ سے عدسہ اور تختی کے درمیانی فاصلہ میں کمی $= \frac{\text{ک ج ل}}{\text{ی}\ \pi\ \text{ص}_{\text{۱}}^{\text{۲}}}$

لہٰذا عدسہ اور تختی کے درمیانی فاصلہ میں مجموعی اضافہ =

$$= \frac{\text{۴ک ج ف لا ل}}{\pi\ \text{ی ص}_{\text{۱}}^{\text{۴}}} - \frac{\text{ک ج ل}}{\text{ی}\ \pi\ \text{ص}_{\text{۱}}^{\text{۲}}}$$

$$= \frac{\text{ک ج ل}}{\text{ی } \pi \text{ ص}_1^4} \left(\text{۴ ف لا} - \text{ص}_1^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \text{ ن لہ}$$

جہاں ن = ان حلقوں کی تعداد جو غائب ہو جاتے ہیں

لہ = سوڈیم D خطوط کا اوسط طول موج

$$= 5{,}893 \times 10^{-5} \text{ سم}$$

$$\text{لہٰذا ی} = \frac{\text{۲ک ج ل} \left(\text{۴ ف لا} - \text{ص}_1^2 \right)}{\text{ن لہ } \pi \text{ ص}_1^4} \quad \text{.........} (۲۳)$$

اگر ن کو ک کے مقابلہ میں مرتسم کیا جائے تو ایک خط مستقیم حاصل ہوگا جس کے ڈھلاؤ سے ی کی قیمت دریافت کی جاسکتی ہے۔

مرغولہ دار کمانیاں :- ایک ایسی چپٹی مرغولہ دار کمانی پر غور کرو جس کے پیچ قریب قریب لپیٹے گئے ہوں اور جس کے تار کا نصف قطر خود کمانی کے نصف قطر کے مقابلہ میں چھوٹا ہو۔ اس قسم کی کمانی ایک موٹے تار کو مناسب قطر کے اسطوانہ پر اسطرح لپیٹنے سے بنائی جاسکتی ہے کہ تار کا مستوی ہر جگہ اسطوانہ کے محور کے علی القوائم رہے۔ فرض کرو کہ ایسی کمانی کے سرے دو دفعہ علی القوائم خمائے جاتے ہیں جیسا کہ شکل ۴۵ میں ب خ اور ا د سے تعبیر کیا گیا ہے۔ فرض کرو کہ کمانی انتصابی وضع میں ا پر جکڑ دی جاتی ہے اور اسکے نقطہ خ پر وزن ک ج لگایا جاتا ہے۔ اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ ۲ ص = اس اسطوانہ کا قطر جس پر مرغولہ بنایا جاتا ہے۔



شکل ۴۵

اور ۲ ص₁ = خود تار کا قطر۔

اور کمانی کا طول (یہ تصور کرتے ہوئے کہ اسکو کھولکر اگر سیدھا کر دیا جائے) = ل
اور جب وزن کوئی فاصلہ لا نیچے اُترتا ہے تو مروڑ بقدر زاویہ ط واقع ہوتی ہے

$$\text{تب جفت} = \frac{\text{د ط}}{\text{ل}} \cdot \frac{\pi\, \text{ص}_1^4}{2}$$

جہاں د = تار کے مادے کی استواری کی شرح
لیکن اس کے تراش پر جفت = ک ج ص۱

$$\therefore \text{ک ج ص}_1 = \frac{\text{د ط}}{\text{ل}} \cdot \frac{\pi\, \text{ص}_1^4}{2}$$

$$\text{اور وزن کا اُتار} = \text{لا} = \text{ص}_2\,\text{ط} = \frac{2\,\text{ک ج ل ص}_2^2}{\text{د}\,\pi\,\text{ص}_1^4} \quad \text{......(۶۴)}$$

اب ہم اس کمانی کی توانائی بالقوہ دریافت کرینگے :-
کمانی کو ایک چھوٹا فاصلہ فرلا کھینچنے میں جو کام کرنا ہوتا ہے =
= ک ج فرلا

$$\therefore \text{مجموعی کام جو کمانی کو فاصلہ لا تک کھینچنے میں کرنا ہوگا} = \int_{\text{صفر}}^{\text{لا}} \text{ک ج فرلا}$$

$$\text{یعنے کمانی کی توانائی بالقوہ} = \int_{\text{صفر}}^{\text{لا}} \frac{\text{د}\,\pi\,\text{ص}_1^4}{2\,\text{ص}_2^2\,\text{ل}} \cdot \text{لا فرلا} =$$

$$= \frac{\text{د}\,\pi\,\text{ص}_1^4\,\text{لا}^2}{4\,\text{ص}_2^2\,\text{ل}} \quad \text{......(۶۵)}$$

اب ہم اسکی توانائی بالفعل دریافت کرینگے :-
اگر کمانی ایک بہت ہی چھوٹا فاصلہ فرلا ایک بالکل چھوٹے وقت کے وقفہ فرو میں طے کرے تو مرتعش کمیت کی توانائی بالفعل =

$$= \frac{1}{2}\,\text{ک} \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}}\right)^2 \quad \text{......(۶۶)}$$

اس کمانی کے اوپر والے سرے سے س فاصلہ پر ایک چھوٹا سا ٹکڑا فرس تصور کرو۔

اگر اس کمانی کی پوری کمیت م ہو تو اس چھوٹے ٹکڑے کی کمیت $\frac{\text{م فرس}}{\text{ل}}$ ہوگی اور اس کی رفتار $\frac{\text{س}}{\text{ل}} \cdot \frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}}$ ہوگی۔

$\therefore$ اس ٹکڑے کی توانائی بالفعل $= \frac{1}{2} \text{م} \frac{\text{فرس}}{\text{ل}} \cdot \frac{\text{س}^2}{\text{ل}^2} \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}}\right)^2$

اسی طرح اور ٹکڑے لینے سے اس کمانی کی توانائی بالفعل

$$= \int_{\text{صفر}}^{\text{ل}} \frac{1}{2} \left(\text{م} \frac{\text{فرس}}{\text{ل}}\right) \frac{\text{س}^2}{\text{ل}^2} \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{6} \text{م} \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}}\right)^2 \quad \text{.......... (۶۷)}$$

$\therefore$ پوری توانائی بالفعل $= \frac{1}{2} \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}}\right)^2 \left\{\text{ک} + \frac{1}{3}\text{م}\right\}$ ...... (۶۸)

لیکن بقائے توانائی کے مسئلہ سے توانائی بالقوہ +

+ توانائی بالفعل = مستقل

یعنی مساوات (۶۵) اور (۶۸) سے :—

$$\frac{\text{د} \pi \text{ص}^4 \text{لا}^2}{4 \text{ص}^2 \text{ل}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}}\right)^2 \left\{\text{ک} + \frac{1}{3}\text{م}\right\} = \text{مستقل}$$

اس مساوات کو وقت کے لحاظ سے تفرق دینے سے :—

$$\frac{\text{د} \pi \text{ص}^4}{2 \text{ص}^2 \text{ل}} \cdot \text{لا} \cdot \frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}} + \left(\text{ک} + \frac{1}{3}\text{م}\right) \frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}} \cdot \frac{\text{فر}^2 \text{لا}}{\text{فرو}^2} = \text{صفر}$$

$$\text{یعنی} \left(\text{ک} + \frac{1}{3}\text{م}\right) \frac{\text{فر}^2 \text{لا}}{\text{فرو}^2} + \frac{\text{د} \pi \text{ص}^4}{2 \text{ص}^2 \text{ل}} \text{لا} = \text{صفر}$$

یہ ایک سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے

اسلئے وقت دوران

$$\text{و} = ۲\pi \sqrt{\frac{(\text{ک} + \frac{۱}{۲}\text{م})\,۴\,\text{ص}^{۲}\,\text{ل}}{\text{د}\,\pi\,\text{ص}^{۴}}} \quad \ldots\ldots (۶۹)$$

اس طرح کمانی کو انتصابی وضع میں اہتزاز میں لاکر اس کے مادّے کی استواری کی شرح دریافت کی جاسکتی ہے۔

فرض کرو کہ شکل ۴۵ میں بجائے وزن ک ج کو خ پر لٹکانے کے ایک سلاخ کو اس کے درمیانی نقطہ سے افقی وضع میں خ سے لٹکایا جاتا ہے اور سلاخ کمانی کے مستوی میں دائری اہتزاز کرتی ہے۔ اگر سلاخ اپنے ابتدائی مقام سے زاویہ ط گھومے اور کسی چھوٹے وقت کے وقفہ فرو میں زاویہ فرط بنے تو

کمانی کی توانائی بالقوہ = سلاخ کو زاویہ ط گھمانے میں جو کام کیا گیا =

$$= \int_{\text{صفر}}^{\text{ط}} (\text{جفت})\,\text{فرط} = \int_{\text{صفر}}^{\text{ط}} \text{ی}\,\frac{\text{مج}}{\text{ص}}\,\text{فرط}$$

$$= \int_{\text{صفر}}^{\text{ط}} \text{ی}.\frac{\text{مج}.\text{ط}}{\text{ل}}.\,\text{فرط}$$

$$= \frac{\text{ی}.\,\text{مج}\,\text{ط}^{۲}}{۲\,\text{ل}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۷۰)$$

جہاں ی = تار کے مادے کا ینگ کا معیار لچک

$$\text{مج} = \frac{\pi}{۴}.\text{ص}^{۴}$$

اور ص = تعدیلی سطح کا نصف قطر انحنا۔

اب سلاخ کی توانائی بالفعل $= \frac{۱}{۲}\,\text{مَج}\left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرو}}\right)^{۲} \quad \ldots\ldots (۷۱)$

جہاں مَج = سلاخ کے جمود کا معیار اثر انتصابی محور کے گرد،

اب اسی طرح کمانی کے اوپر کے سرے سے مع فاصلہ پر ایک چھوٹا سا

ٹکڑا فرس تصور کرو۔

اس ٹکڑے کی توانائی بالفعل $= \frac{1}{2} \text{م} \frac{\text{فرس}}{\text{ل}} \cdot \frac{\text{س}^2}{\text{ل}^2} \cdot \left(\text{ص}_1 \frac{\text{فرط}}{\text{فرو}}\right)^2$

کیونکہ خطی رفتار $= \frac{\text{ص}_1}{\text{ل}} \times$ زاوی رفتار

$\therefore$ کمانی کی توانائی بالفعل $= \int_{\text{صفر}}^{\text{ل}} \frac{1}{2} \text{م} \frac{\text{فرس}}{\text{ل}} \cdot \frac{\text{س}^2}{\text{ل}^2} \cdot \text{ص}_1^2 \left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرو}}\right)^2$

$$= \frac{1}{6} \text{م} \, \text{ص}_1^2 \left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرو}}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots (72)$$

$\therefore$ مجموعی توانائی بالفعل $= \frac{1}{2} \left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرو}}\right)^2 \left\{ \text{مج} + \frac{1}{3} \text{م} \, \text{ص}_1^2 \right\} \ldots (73)$

اب بقائے توانائی کے مسئلہ سے:-

توانائی بالقوہ + توانائی بالفعل = مستقل

$$\therefore \frac{\text{ی مج ط}^2}{2\text{ل}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرو}}\right)^2 \left\{ \text{مج} + \frac{1}{3} \text{م} \, \text{ص}_1^2 \right\} = \text{مستقل}$$

اس مساوات کو وقت کے لحاظ سے تفرقانے سے:-

$$\frac{\text{ی مج}}{\text{ل}} \text{ط} \cdot \frac{\text{فرط}}{\text{فرو}} + \text{مج} \frac{\text{فرط}}{\text{فرو}} \cdot \frac{\text{فر}^2\text{ط}}{\text{فرو}^2} +$$
$$+ \frac{1}{3} \text{م} \, \text{ص}_1^2 \frac{\text{فرط}}{\text{فرو}} \cdot \frac{\text{فر}^2\text{ط}}{\text{فرو}^2} = \text{صفر}$$

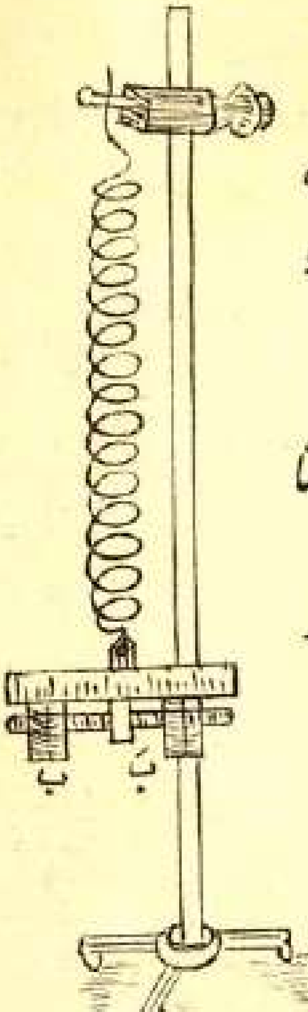
یعنی $\frac{\text{فر}^2\text{ط}}{\text{فرو}^2} \left(\text{مج} + \frac{1}{3} \text{م} \, \text{ص}_1^2 \right) + \frac{\text{ی مج}}{\text{ل}} \text{ط} = \text{صفر}$

یہ ایک سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے۔

$\therefore$ وقت دوران ق $= 2\pi \sqrt{\frac{(\text{مج} + \frac{1}{3} \text{م} \, \text{ص}_1^2)\,\text{ل}}{\text{ی مج}}} \quad \ldots\ldots (74)$

اس طرح کمانی کو دائری وضع میں اہتزاز میں لاکر اس کے مادّے کا ینگ کا معیار لچک معلوم کیا جا سکتا ہے۔

یہ تجربے دلبر فورس کے جمودی جسم کی مدد سے کئے جا سکتے ہیں، ذیل میں ایک نظام کی شکل دکھائی گئی ہے (شکل ۴۶) یہ ایک چپٹی کمانی پر منحصر ہے جسکا ایک سرا جما دیا جاتا ہے اور دوسرے سرے پر دلبر فورس کا بنایا ہوا ایک جمودی جسم جو کمانی کے محور کے لحاظ سے متشاکل ہوتا ہے، لگا دیا جاتا ہے - یہ جسم انتصابی اور زاوئی دونوں ہٹاؤ کے لحاظ سے اہتزار میں لایا جا سکتا ہے -



شکل ۴۶

مساوات (۷۹) اور (۷۴) سے ظاہر ہے کہ:-

$$\bar{و} = ۲\pi\sqrt{\frac{\left(\text{جَ} + \frac{\text{م}\,\text{ص}_{1}^{2}}{۳}\right)\text{ل}}{\frac{\pi\,\text{ی}\,\text{ص}_{2}^{4}}{۴}}}$$

$$\text{اور}\quad و = ۲\pi\sqrt{\frac{\text{ک} + \frac{\text{م}}{۳}}{\frac{\pi\,\text{د}\,\text{ص}_{2}^{4}}{۲\,\text{ل}\,\text{ص}_{1}^{2}}}}$$

زاوئی اہتزازات :- اوپر کے آلہ میں جمودی جسم کی شکل جمود کے معیار اثر کی دریافت کے لئے موزوں نہیں ہے بلکہ اسطرح اسکو بنایا گیا ہے کہ کمانی کے محور کے گرد اسکے جمود کا معیار اثر، دو مساوی پیتل کے اسطوانوں ب، بَ کو محور سے قریب لانے یا دور لے جانے سے بدل دیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ جمود کا معیار اثر مجؔ ہے جبکہ اسطوانوں کی کمیت کے مرکز، محور سے لا سمر کے فاصلہ پر ہوں۔ تب مساوات (۷۴) سے:-

$$\text{و}'^2 = \text{عہ}\left(\text{مج}' + \frac{\text{۴ ص}_1^2}{\text{۳}}\right) \quad \ldots\ldots (\text{۷۵})$$

جہاں عہ اسطوانوں کے تمام مقامات کیلئے مستقل ہے

اسی طرح اگر و_1، و_2، و_3 وغیرہ اوقات دوران ہوں جبکہ محور سے فاصلے لا_1، لا_2، لا_3 وغیرہ اور ان کے متناظر جمود کے اثری معیار مج_1، مج_2، مج_3 وغیرہ ہوں

$$\text{تب}\quad \text{و}_1^2 = \text{عہ}\left(\text{مج}_1 + \frac{\text{۴ ص}_1^2}{\text{۳}}\right) \quad \ldots\ldots (\text{۷۶})$$

$$\text{اور}\quad \text{و}_2^2 = \text{عہ}\left(\text{مج}_2 + \frac{\text{۴ ص}_1^2}{\text{۳}}\right) \quad \ldots\ldots (\text{۷۷})$$

$$\text{اور}\quad \text{و}_3^2 = \text{عہ}\left(\text{مج}_3 + \frac{\text{۴ ص}_1^2}{\text{۳}}\right) \quad \ldots\ldots (\text{۷۸})$$

.... وغیرہ اگر $\text{لا}_1 > \text{لا}_2 > \text{لا}_3$ وغیرہ

مساوات (۷۵) اور (۷۶) سے

$$\frac{\text{و}'^2}{\text{و}'^2 - \text{و}_1^2} = \frac{\text{مج}' + \frac{\text{۴ ص}_1^2}{\text{۳}}}{\text{مج}' - \text{مج}_1}$$

$$\text{یا}\quad \text{مج}' + \frac{\text{۴ ص}_1^2}{\text{۳}} = \frac{\text{و}'^2}{\text{و}'^2 - \text{و}_1^2}\left(\text{مج}' - \text{مج}_1\right)$$

$$= \frac{\text{۲ م}_1\, \text{و}'^2 \left(\text{لا}'^2 - \text{لا}_1^2\right)}{\text{و}'^2 - \text{و}_1^2}$$

چونکہ $\text{مج}' - \text{مج}_1$ = اوپر والے نظام کے جمود کے معیار اثر کی تبدیلی اسطوانوں کو لا' سے لا_1 کے مقام تک تبدیل کرنے کی وجہ سے =

$= \text{۲ م}_1 \left(\text{لا}'^2 - \text{لا}_1^2\right)$ متوازی محوروں کے اصول سے

جہاں ۲ $م_۱$ = اسطوانوں کے کمیتوں کا حاصل جمع

لہٰذا اگر وقت دوران کے مشاہدات، اسطوانوں کے مقامات سے متعدد مساوی فاصلوں کے لئے حاصل کئے جائیں تو ($مج + \frac{۴ صا_۱^۲}{۳}$) کی اوسط قیمت ذیل کی مساوات سے حاصل کی جاسکتی ہے :-

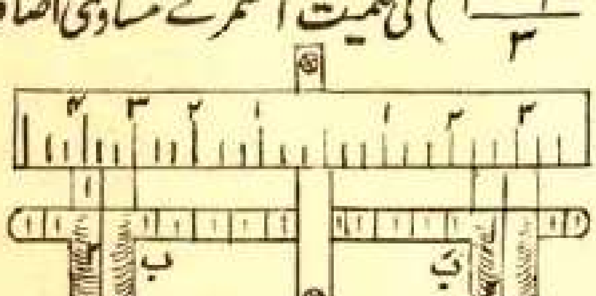
$$مج + \frac{۴ صا_۱^۲}{۳} = \frac{۴م_۱ (لا_۲^۲ - لا_۱^۲) و_۱^۲}{و_۲^۲ - و_۱^۲}$$

$$= \frac{۴م_۱ (لا_۳^۲ - لا_۲^۲) و_۲^۲}{و_۳^۲ - و_۲^۲}$$ وغیرہ وغیرہ

اور مساوات (۴) سے ی کی قیمت دریافت کی جاسکتی ہے۔

ولبرفورس کے جمودی جسم کی وضع مفصل طور پر شکل ۴۷ میں دکھائی گئی ہے۔

تجربہ میں ($مج + \frac{۴ صا_۱^۲}{۳}$) کی قیمت اسم کے مساوی اضافوں سے اسطوانوں کے مقام کو بدل بدل کر، اس درجہ دار پیمانہ پر جو پیچ کے متوازی، اوپر لگا ہوا ہے، لینے سے بسہولت دریافت کی جاسکتی ہے۔ ایک چلر کنی گھڑی سے ہر ایک مقام کے متناظر، ارتعاش کا وقت دوران معلوم کیا جاسکتا ہے۔



شکل ۴۷

چونکہ ٹھوس اسطوانوں کی کمیتیں بالکل مساوی نہیں ہوتیں ان کی کمیتوں کا مجموعہ ۲ $م_۱$ کے مساوی لینا چاہیئے۔ کمانی کی نصف قطر کی قوت ۴ ہونے کی وجہ سے اس کی پیمائش میں بڑی احتیاط چاہیئے۔

تار پر ایک ایک سمر کے فاصلوں پر قطر کے مشاہدات خُردہ پیما پیچ سے لینے چاہئیں، تاکہ ص کی اوسط قیمت حاصل ہو سکے۔ اہتزاز گنتے وقت دوربین کا استعمال بہتر ہوگا۔

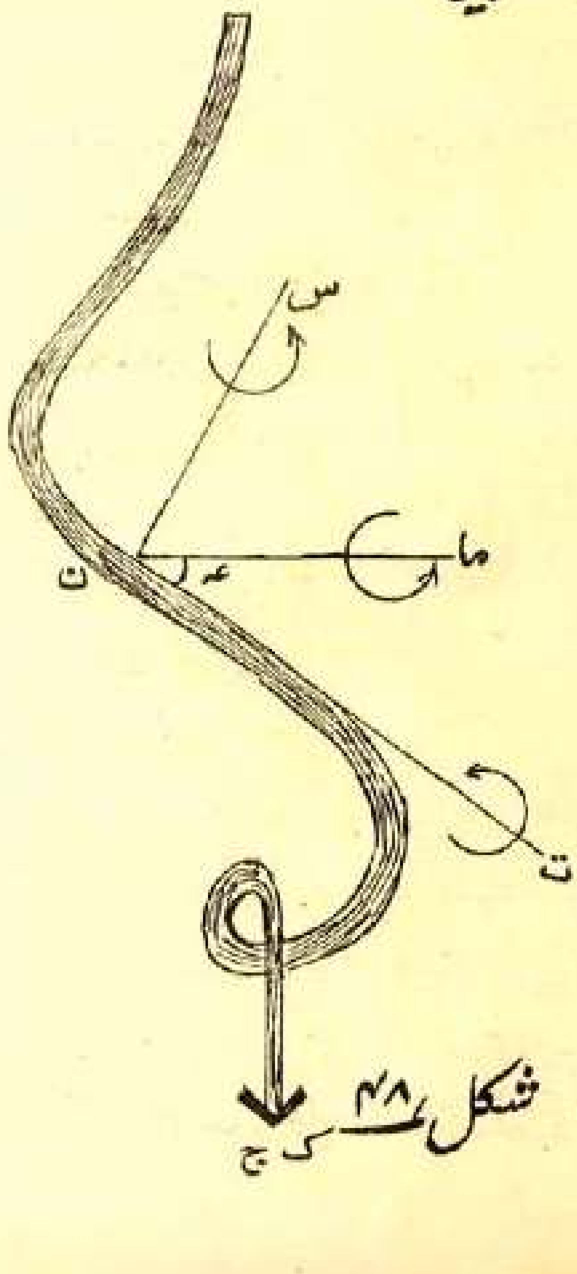
چونکہ انتصابی نقل مقام کی صورت میں وقت دوران کی قیمت اسطوانوں کے ہر متشاکل وضع کے لئے ایک ہی ہوتی ہے اس لئے مساوات (۶۹) کی مدد سے د معلوم ہوجاتا ہے۔

شکل (۱۳) کی طرح کمانی کو بھاپ کی نلی میں رکھ کر ی اور د کی تپشی قدر بھی ہم دریافت کر سکتے ہیں۔

مائل مرغولہ دار کمانی:—

مائل کمانی کا ایک حصہ جو دائری تار سے بنایا گیا ہے شکل ۴۸ میں دکھلایا گیا ہے۔

جب وزن ک ج نیچے کی جانب عمل کرتا ہے تو کمانی میں خماؤ اور مروڑ دونوں واقع ہوتے ہیں اس صورت میں ہم یہ فرض کریں گے کہ وزن ک ج، اس اسطوانہ کے محور کی سمت میں جس پر کہ کمانی لپیٹی جاتی ہے عمل کرتا ہے۔



شکل ۴۸

نقطہ ن کے پاس کمانی کے ایک چھوٹے سے حصہ پر غور کرو۔ یہاں جفت دو سمتوں

ن ت اور ن س میں تحلیل ہو جاتا ہے۔ ن ت، ن کے پاس کمانی کے چھوٹے سے حصہ کے متوازی ہے۔ اور ن س، ن ت پر عمود ہے۔

∴ ن ما اسطوانہ کی تراش عمودی کے مستوی کے متوازی اور ایک افقی خط ہے۔

فرض کرو کہ کمانی کا محور افقی خط ن ما سے زاویہ عہ بناتا ہے۔

اس صورت میں جفت ک ج ص، کے اجزائے تحلیلی ن ت کی سمت میں ک ج ص، جم عہ اور ن س کی سمت میں ک ج ص، جب عہ ہوں گے۔

ک ج ص، جم عہ مروڑی جفت ہے لہذا مروڑ فی اکائی طول =

$$= \frac{\text{۲ک ج ص}_1\text{ جم عہ}}{\text{د }\pi\text{ ص}_2^4} \quad \cdots\cdots (۷۹)$$

اور ک ج ص، جب عہ خماؤ کا جفت ہے لہذا خماؤ فی اکائی طول

$$= \frac{\text{۴ک ج ص}_1\text{ جب عہ}}{\text{ی }\pi\text{ ص}_2^4} \quad \cdots\cdots (۸۰)$$

صرف مروڑ کی حالت پر غور کرو۔ انتصابی سمت میں مروڑ فی اکائی طول

$$= \frac{\text{۲ک ج ص}_1\text{ جم عہ جم عہ}}{\text{د }\pi\text{ ص}_2^4}$$

∴ انتصابی نقل مقام مروڑ کی وجہ سے $= \frac{\text{۲ک ج ص}_1\text{ جم}^2\text{ عہ . ص}_1}{\text{د }\pi\text{ ص}_2^4}$

$$= \frac{\text{۲ک ج ص}_1^2\text{ جم}^2\text{ عہ}}{\text{د }\pi\text{ ص}_2^4} \quad \cdots\cdots (۸۱)$$

اب صرف خماؤ کی حالت پر غور کرو۔ انتصابی سمت میں خماؤ فی اکائی طول

$$= \frac{\text{۴ک ج ص}_{۱}\,\text{جب}^{۲}\,\text{عہ}}{\text{ی}\ \pi\ \text{ص}_{۲}^{۴}}$$

∴ انتصابی نقل مقام خماؤ کی وجہ سے $= \frac{\text{۴ک ج ص}_{۱}\,\text{جب}^{۲}\,\text{عہ}}{\text{ی}\ \pi\ \text{ص}_{۲}^{۴}}$ ..(۸۲)

∴ مجموعی انتصابی نقل مقام فی اکائی طول =

$$= \frac{\text{۲ک ج ص}_{۱}}{\pi\ \text{ص}_{۲}^{۴}} \left\{ \frac{\text{جم}^{۲}\,\text{عہ}}{\text{د}} + \frac{\text{۲ جب}^{۲}\,\text{عہ}}{\text{ی}} \right\}$$

لہٰذا مجموعی انتصابی نقل مقام =

$$= \frac{\text{۲ک ج ص}_{۱}\,\text{ل}}{\pi\ \text{ص}_{۲}^{۴}} \left\{ \frac{\text{جم}^{۲}\,\text{عہ}}{\text{د}} + \frac{\text{۲ جب}^{۲}\,\text{عہ}}{\text{ی}} \right\} \text{.....(۸۳)}$$

انتصابی نقل مقام کے علاوہ زاویٔ نقل مقام بھی واقع ہوگا۔

اگر صرف مروڑ کے جفت پر غور کیا جائے تو افقی زاوئی نقل مقام فی اکائی طول کمانی کے لپیٹے جانے کی سمت میں =

$$= \frac{\text{۲ک ج ص}_{۱}\,\text{جم عہ جب عہ}}{\text{د}\ \pi\ \text{ص}_{۲}^{۴}} \text{............(۸۴)}$$

اگر صرف خماؤ کے جفت پر غور کیا جائے تو افقی زاوئی نقل مقام فی اکائی طول کمانی کے کھلنے کی سمت میں =

$$= \frac{\text{۴ک ج ص}_{۱}\,\text{جب عہ جم عہ}}{\text{ی}\ \pi\ \text{ص}_{۲}^{۴}} \text{............(۸۵)}$$

∴ حاصل افقی زاوئی نقل مقام فی اکائی طول کمانی کے لپیٹے جانے کی سمت میں [12]

$$= \frac{\text{۲ک ج ص}_{۱}\,\text{جم عہ جب عہ}}{\pi\ \text{ص}_{۲}^{۴}} \left\{ \frac{۱}{\text{د}} - \frac{۲}{\text{ی}} \right\} \text{...(۸۶)}$$

اگر $\frac{۱}{د} > \frac{۲}{ی}$ ہے یعنے ی > ۲ د ہے

تو کمانی میں لپیٹے جانے کا تقاضا ہوگا۔

دھاتوں میں ی عموماً ۲ د سے بڑا ہوتا ہے۔

اس لئے دائری تار سے بنی ہوئی کمانی پر جب وزن لٹکایا جاتا ہے تو لپیٹے جانے کا تقاضا ہوتا ہے۔ بعض اشیا کے معیار لچک کی قیمتیں حسب ذیل ہیں:-

نام شے	$\frac{ی}{10^{11}}$	$\frac{د}{10^{11}}$	سم $= \frac{ی}{۲د} - ۱$
المونیم	۷٫۳	۲٫۳۸ — ۳٫۳۶	۰٫۳۴
پیتل	۹٫۷ — ۱۰٫۲	۳٫۴۴ — ۴٫۰۳	۰٫۳ — ۰٫۴
کانسٹنٹن	۱۶٫۳	۶٫۱	۰٫۳۳
تانبہ	۱۰٫۳ — ۱۲٫۹	۳٫۵ — ۴٫۶	۰٫۲۵ — ۰٫۳۵
سونا	۵٫۵ — ۸٫۰	۳٫۹ — ۴٫۲	۰٫۴۲
چاندی	۷٫۰ — ۷٫۹	۲٫۵ — ۲٫۹	۰٫۳۸
لوہا (ڈھلا ہوا)	۹٫۸ — ۱۶	۳٫۵ — ۵٫۳	۰٫۲۳ — ۰٫۳۱
لوہا (پٹا ہوا)	۱۷ — ۲۰	۶٫۶ — ۸٫۳	۰٫۲۸
فولاد	۱۸ — ۲۲	۷٫۹ — ۸٫۹	۰٫۲۵ — ۰٫۳۳
پلاطنیم	۱۵ — ۱۷	۶٫۴ — ۷٫۴	۰٫۲۲
شیشہ	۵٫۴ — ۷٫۸	۱٫۲ — ۲٫۴	۰٫۲۰ — ۰٫۲۴

Chapter IV.

(۱) Properties of Matter "Poynting & Thomson" P66, (1922)
(۲) ,, ,, ,, P70, (1922)
(۳) Text Book of Sound "Barton" P180, (1919)
(۴) Properties of Matter "Wagstaff" P105, (1924)
(۵) Proc. Roy. Soc. 73 P334. Phil. Trans. A 204 I (1904)
(۶) Advanced Practical Physics "Worsnop & Flint" P106, (1927)
(۷) Properties of Matter "Wagstaff" P118 (1924)
(۸) Properties of Matter "Poynting & Thomson" P88, (1922)
(۹) Statics "Lamb" P323 (1924)
(۱۰) ,, ,, P324, (1924)
(۱۱) Properties of Matter "Poynting & Thomson" P94, (1922)
(۱۲) ,, ,, ,, ,, P95, (1922)
(۱۳) Phil Mag. 49, 193 (1900)
(۱۴) Properties of Matter "Newman & Searle" P119 (1928)

پانچواں باب

"حرحرکیات اور بگاڑوں میں تبدیلی" "حرناگزر لچک"

ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی شے کا معیار لچک اس کی تپش پر منحصر ہوتا ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ کسی جسم کی حالت جب تبدیل ہوتی ہے تو ساتھ ہی ساتھ اس کی تپش میں تغیر کا ہونا لازمی ہے کوئی جسم اگر بلند تر تپش پر کم تر تپش کے مقابلہ میں سخت ہو تو اسکے بگاڑ میں اضافہ کرنے سے اس کی تپش میں بھی اضافہ ہوگا، لیکن جسم اگر ایسا ہو کہ بلند تر تپش کے مقابلہ میں کمتر تپش پر اس میں سختی ہو تو بگاڑ میں اضافہ کرنے سے اسکی تپش میں کمی ہوگی۔ مثلاً ربر کی ڈوری کی پھیلاو کی شرح منفی ہے۔ اس ڈوری کو کھینچا جائے تو پہلے کی بہ نسبت یہ گرم ہو جائے گی نکل کے تار کی پھیلاؤ کی شرح مثبت ہوتی ہے اسکو کھینچنے سے یہ پہلے کی نسبت سرد ہو جائے گا۔ اس سردی کے اثر کو آسانی سے دریافت کیا جاسکتا ہے۔ نکل کا ایک موٹا سا تار لیکر لٹکا دیا جائے اور اس کے دونوں سروں کو وٹسٹون پل کے ایک بازو سے جوڑ دیا جائے تو مزاحمت کی رقوم میں اس تار پر وزن لٹکا کر تپش کی کمی دریافت کی جاسکتی ہے۔

لارڈ کلون نے حرحرکیات کی مدد سے سردی اور گرمی کے ان اثرات کا حساب لگایا تھا جو کسی جسم کی بگاڑ میں تغیر و تبدل کرنے سے جسم مذکور میں ظہور پذیر ہوتے ہیں۔ جول (1) کے تجربوں سے اس کی تصدیق بھی ہوتی ہے۔

کسی دھات سے بنے ہوئے ایک تار پر جس کی کمیت اکائی اور تراش عمودی کا رقبہ بھی اکائی ہو غور کرو۔ فرض کرو کہ اسکا طول ل ہے اور اس پر ق تناؤ عمل کر رہا ہے۔ تناؤ کی قیمت میں اضافہ "فرق" سے فرض کرو اس کے طول میں فرل اضافہ ہوتا ہے۔ یعنی جب تناؤ ق + + فرق ہو تو طول ل + فرل ہے۔

چونکہ تار کے طول میں اضافہ ہو رہا ہے لہذا اس پر کام کیا جا رہا ہے اور اس کے لئے تار کے جوہروں میں پھیلاؤ پیدا کرنے کے لئے بیرونی حرارت کی ضرورت ہوگی۔ تپش مستقل رکھی جاتی ہے لیکن تار سے مسلسل حرارت خارج ہونے کی وجہ سے تار سرد ہو جاتا ہے۔

حرحرکیات کے پہلے کلیہ سے:—

فرحہ = فربہ + فرکہ .... (۱)

جہاں فرحہ = حرارت کی وہ مقدار جو خارج ہوتی ہے

فربہ = اندرونی توانائی میں تبدیلی

فرکہ = بیرونی کام جو جبلی طریقہ سے کیا گیا = — ق فرل

لہذا فرحہ = فربہ — ق فرل .... (۲)

چونکہ یہ عمل برعکس بھی ہو سکتا ہے۔

اسلئے حرحرکیات کے دوسرے کلیہ سے:—

فرحہ = ت فرفہ .... (۳)

جہاں ت = تپش مطلق اور فرفہ = ناکارگی میں تبدیلی

مساوات (۳) اور (۲) سے فربہ = ت فرفہ + ق فرل

یعنی فر (بہ — ت فہ — ق ل) =

= — فہ فرت — ل فرق .... (۴)

یہ ایک کامل تفرق ہونے کی وجہ سے:—

$$\left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرق}}\right)_{\text{ت}} = \left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}} \quad \text{یعنی} \quad \left(\text{فرفہ}\right)_{\text{ت}} = \left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}} \text{فرق}$$

$$\text{یعنی} \quad \left(\text{فرحہ}\right)_{\text{ق}} = \text{ت} \left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}} . \text{فرق}$$

$$= \frac{\text{ت ل فرل}}{\text{ل فرت}} . \text{فرق}$$

$$\text{لیکن} \quad \frac{\text{فرل}}{\text{ل فرت}} = \text{عہ} = \text{طولی پھیلاؤ کی شرح}$$

$$\therefore \left(\text{فرحہ}\right)_{\text{ت}} = \text{ت ل عہ فرق} \quad \text{.............} \quad (۵)$$

چونکہ مساوات کے بائیں جانب کی تمام چیزیں کسی دھات کے لئے مثبت ہیں اسلئے اس دھات کے لئے (فرحہ)ت کی قیمت بھی مثبت ہوگی لیکن ربر کے لئے عہ کی قیمت منفی ہے اسلئے (فرحہ)ت بھی منفی ہے۔

$$\text{لیکن} \quad \left(\text{فرحہ}\right)_{\text{ت}} = \text{فرت} \times \text{ن} \times \text{جو} \times ۱$$

جہاں ن = حرارت نوعی

جو = حرارت کا معادل جیلی

فرت = دھاتوں میں تناؤ کے اضافہ سے تپش میں کمی

$$\therefore \text{فرت} = \frac{\text{ت ل عہ فرق}}{\text{ن جو}} \quad \text{.............} \quad (۶)$$

ڈاکٹر جول نے مختلف دھاتوں کو استعمال کرکے اس مساوات کی تصدیق کی۔

مثلاً تانبے کے لئے ت = ۲۷۳ر۲ ، ل = $\frac{۱ر۶}{۸ر۹۵}$

عہ = ۱ر۱۷ × $۱۰^{-۶}$

فرق = ۱ر۰۸ × ۱۰^۹ ، ن = ۰ر۰۹۵

لہذا مساوات (۶) سے فرت = ۰ر۱۵۴ اور تجربہ سے فرت = ۰ر۱۶۴

فرض کرو کہ طول میں فرل اضافہ ہونے سے تپش میں کمی = فرت

تناؤ میں اضافہ فرق = (فرل / ل) . ی جہاں ی = ینگ کا معیار لچک

∴ فرت = (ت عہ ی فرل) / (ن جو) .... (۷)

اگر تار کی تپش میں تغیر = فرت ، جبکہ اسکو گرم یا سرد ماحول سے متاثر کیا جاتا ہے ، تو طول میں تبدیلی = ل عہ فرت

طول میں یہ جو تبدیلی واقع ہوئی ہے اسکا معاوضہ تناؤ میں ایسی تبدیلی کرنے سے ہوگا جس کی مقدار = فرق = (ل ی عہ فرت) / ل

= ی عہ فرت

اسکو مساوات (۷) میں لکھنے سے :-

فرت = (ت (فرق / فرت) فرل) / (ن جو) .... (۸)

مساوات (۸) مساوات (۷) کی طرح عملاً زیادہ نہیں استعمال ہوتی۔

اب تار کی مروڑ کی حالت پر غور کرو - فرض کرو کہ کسی دھات کا بنا ہوا ایک تار ایسا ہے کہ اسکا طول ل اور کمیت اور تراش عمودی کا رقبہ اکائی ہے اور اسپر مروڑ کا جفت ق عمل کر رہا ہے - فرض کرو کہ زاویہ مروڑ طہ بنتا ہے - جفت کی قیمت کو ق + فرق تک بڑھایا جائے تو فرض کرو مروڑ کا زاویہ طہ + فرطہ ہوجاتا ہے - حرحرکیات کے پہلے کلیہ سے

فرحہ = فربہ - ق فرطہ .... (۹)

اور مساوات (۳) اور (۹) سے فربہ = ت فرفہ + ق فرطہ

یعنی فر(بہ - ت فہ - ق طہ) = - فہ فرت - طہ فرق

یہ ایک کامل تفرق ہونے کی وجہ سے:-

$$\therefore \left(\frac{\text{فرضہ}}{\text{فرق}}\right)_{\text{ت}} = \left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}} \text{ یعنی } \left(\text{فرضہ}\right)_{\text{ت}} = \left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}} . \text{فرق}$$

$$\therefore \text{ مساوات (۳) سے } \left(\text{فرحہ}\right)_{\text{ت}} = \text{ت} \left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}} \text{فرق} \quad \text{.....(۱۰)}$$

مگر چوتھے باب میں یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ ق =

$$= \frac{\text{دط}}{\text{ل}} . \frac{\pi \text{ص}^{4}}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{جہاں د = استواری کی شرح اور} \\ \text{ص = تار کا نصف قطر} \end{array} \right.$$

$$\therefore \left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}} = \frac{2\text{ق ل}}{\pi \text{ص}^{4}} . \frac{1}{\text{د}^{2}} . \left(\frac{\text{فرد}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}} =$$

$$= -\frac{\text{ط}}{\text{د}} \left(\frac{\text{فرد}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}} \quad \text{............ (۱۱)}$$

$$\therefore \left(\text{فرحہ}\right)_{\text{ت}} = -\text{ت ط} \frac{\text{فرد}}{\text{د فرت}} . \text{فرق} = -\text{ت ط گہ فرق} \quad \text{..... (۱۲)}$$

جہاں گہ = استواری کی تپشی قدر

اور $\frac{\text{فرد}}{\text{فرت}}$ = دھاتوں کے لئے ایک منفی مقدار، اس لئے $\left(\text{فرحہ}\right)_{\text{ت}}$ مثبت ہوگا۔

$$\therefore \text{فرتا} = \frac{-\text{ت ط گہ فرق}}{\text{ن جو}} \quad \text{............ (۱۳)}$$

جہاں فرتا = مروڑ کے جفت میں اضافہ کی وجہ سے تپش میں کمی۔

اسی طرح سے سردی کا اثر جبکہ جسم کا حجم زیر غور ہو حسب ذیل طریقہ سے دریافت کیا جا سکتا ہے:-

اکائی کمیت کے ایک جسم پر غور کرو جسکا ابتدائی حجم دباؤ ق کے تحت ح ہے۔

فرض کرو کہ دباؤ ق + فرق تک بڑھایا جاتا ہے جس کی وجہ سے

جم ح - فرح ہوجاتا ہے۔

حرحرکیات کے پہلے کلیہ سے :-

فرحہ = فربہ - ق فرح .... (۱۴)

مساوات (۳) اور (۱۴) سے فر(بہ - ت فہ - ق ح) =

= - فہ فرت - ح فرق .... (۱۵)

یہ ایک کامل تفرق ہونے کی وجہ سے :-

(فرفہ / فرق)ت = (فرح / فرت)ق یعنے (فرفہ)ت = (فرح / فرت)ق . فرق

∴ (فرحہ)ت = ت (فرح / فرت)ق فرق = ت/ح (فرح / فرت)ق ح فرق

= ت عہ ح فرق .... (۱۶)

جہاں عہ = حجمی پھیلاؤ کی شرح

∴ فرت = ت ح عہ فرق / ن جو .... (۱۷)

حرناگزار اور ہم تپشی لچک :- جبکہ بگاڑ میں تبدیلی اسقدر تیز واقع ہو کہ حرارت کو باہر نکل جانے کے لئے وقت ہی نہ ملے تو اس وقت کے معیار لچک کو ہم حرناگزار معیار لچک کہتے ہیں۔

اور جب بگاڑ مستقل ہو جیسا کہ معمولی صورتوں میں ہوا کرتا ہے تو ایسا معیار لچک، ہم تپشی کہلاتا ہے۔

ینگ کا حرناگزار معیار لچک :- فرض کرو کہ ہم ایک ایسے تار کی حالت پر غور کر رہے ہیں جس کی کمیت اور تراش عمودی کا رقبہ اکائی ہے، اگر تناؤ کی قیمت میں فرق کا اضافہ کیا جائے اور حرارت یا سردی باہر نکلنے نہ پائے تو طول ل میں اضافہ کے دو وجوہات ہوں گے۔

ایک تو طول میں اضافہ تناؤ ق کی وجہ سے ہوگا اور دوسرا تپش ت کی وجہ سے۔ لہذا ظاہر ہے کہ ل کوئی تفاعل ہے ت اور ق کا

یعنی ل = ف (ق، ت)

$$\therefore \; \text{فل} = \left(\frac{\text{فل}}{\text{فق}}\right)_{\text{ت}} \cdot \text{فق} + \left(\frac{\text{فل}}{\text{فت}}\right)_{\text{ق}} \text{فت}$$

فرض کرو کہ $\left(\frac{\text{فل}}{\text{فق}}\right)_{\text{فہ}}$ سے طول کے تغیر کی تعبیر بلحاظ اضافہ تناؤ حرناگزار حالات کے تحت ہوتی ہے اور $\left(\frac{\text{فل}}{\text{فق}}\right)_{\text{ت}}$ سے طول کے تغیر کی تعبیر بلحاظ اضافہ تناؤ ہم تپشی حالات کے تحت ہوتی ہے اور $\text{ی}_{\text{فہ}}$ = ینگ کا حرناگزار معیار لچک اور $\text{ی}_{\text{ت}}$ = ینگ کا ہم تپشی معیار لچک۔

ایسی صورت میں $\left(\frac{\text{فل}}{\text{فق}}\right)_{\text{ذ}} = \left(\frac{\text{فل}}{\text{فق}}\right)_{\text{ت}} + \left(\frac{\text{فل}}{\text{فت}}\right)_{\text{ق}} \left(\frac{\text{فت}}{\text{فق}}\right)_{\text{فہ}}$ ......(۱۸)

مساوات (۲) اور (۳) سے $\quad$ فر بہ = ت فر فہ + ق فر ل

یعنی فر (بہ − ق ل) = ت فر فہ − ل فر ق

یہ ایک کامل تفرق ہونے کی وجہ سے :-

$$\left(\frac{\text{فت}}{\text{فق}}\right)_{\text{فہ}} = -\left(\frac{\text{فل}}{\text{فہ}}\right)_{\text{ق}} \text{.................. (۱۹)}$$

لہذا مساوات (۱۸) کو ہم یوں لکھ سکتے ہیں :-

$$\left(\frac{\text{فل}}{\text{فق}}\right)_{\text{ذ}} - \left(\frac{\text{فل}}{\text{فق}}\right)_{\text{ت}} = -\left(\frac{\text{فل}}{\text{فت}}\right)_{\text{ق}} \cdot \left(\frac{\text{فل}}{\text{فہ}}\right)_{\text{ق}}$$

$$\text{یعنی}\; \frac{1}{\text{ل}}\left(\frac{\text{فل}}{\text{فق}}\right)_{\text{فہ}} - \frac{1}{\text{ل}}\left(\frac{\text{فل}}{\text{فق}}\right)_{\text{ت}} =$$

$$= -\frac{1}{\text{ل}}\left(\frac{\text{فل}}{\text{فت}}\right)_{\text{ق}} \cdot \left(\frac{\text{فل}}{\text{فت}}\right)_{\text{ق}} \cdot \left(\frac{\text{فت}}{\text{فہ}}\right)_{\text{ق}}$$

$$\text{یعنی}\; \frac{1}{\text{ی}_{\text{فہ}}} - \frac{1}{\text{ی}_{\text{ت}}} =$$

= − (ل/ل) (فرل/فرت)ق ۔ (فرل/فرت)ق ۔ (۱/ل) (فرت/فرفہ)ق =

= − ل عہ² (فرت/فرفہ)ق = − ل عہ² ت (فرت/فرجہ) =

= − ل عہ² ت (فرت/(فرت × ن × جو × ۱)) = − ل عہ² ت / ن جو .... (۲۰)

چونکہ کسی دھات کے لئے اس مساوات کے بائیں جانب کی رقموں کی قیمت منفی ہے اس لئے یٰ فز کی قیمت یٰ تن سے بڑی ہے۔

مثال کی طور پر تانبے کیلئے ل = ۱۱٫۰ سمر ت = ۲۷۳ تپش مطلق

ن = ۰٫۰۹۵، عہ = ۱۷٫۲ × ۱۰^{-۶}

یٰ تن = ۱۲٫۲ × ۱۰^{۱۱} ڈائین فی مربع سمر

اور جو = ۴٫۲ × ۱۰^{۷} ارگ

∴ مساوات (۲۰) سے:

یٰ تن / یٰ فز = ۱ − (یٰ تن ل عہ² ت / ن جو) = ۰٫۹۹۷

لہٰذا دونوں لچک کے معیاروں میں بہت ہی کم فرق ہے۔

حرناگزار استواری کی شرح :—

فرض کرو اکائی کمیت اور اکائی تراش عمودی کا ایک تار لیا جاتا ہے جس کا طول ل ہے۔ اور حرناگزار حالات کے تحت فرض کرو کہ جفت کی قیمت ق سے ق + فرق تک بڑھادی جاتی ہے اور زاویہ مروڑ ط سے ط + فرط ہو جاتا ہے۔

ایسی حالت میں ط، ت اور ق کا کوئی تفاعل ہوگا۔

یعنی ط = ف (ق، ت)

∴ فرط = (فرط/فرق)ت ۔ فرق + (فرط/فرت)ق ۔ فرت

فرض کرو $د_{نہ}$ = حرناگزار استواری کی شرح

اور $د_{ت}$ = ہم تپشی استواری کی شرح

$$\therefore \left(\frac{فرطہ}{فرق}\right)_{نہ} = \left(\frac{فرطہ}{فرق}\right)_{ت} + \left(\frac{فرطہ}{فرت}\right)_{ق} \cdot \left(\frac{فرت}{فرق}\right)_{نہ}$$

یعنے $\frac{1}{د_{نہ}} - \frac{1}{د_{ت}} = \left(\frac{فرطہ}{فرت}\right)_{ق} \cdot \left(\frac{فرت}{فرق}\right)_{نہ}$ .... (۲۱)

لیکن مساوات (۳) اور (۹) سے:—

فربہ = ت فرنہ + ق فرطہ

یعنے فر(بہ − ق طہ) = ت فرنہ − طہ فرق

یہ ایک کامل تفرق ہونے کی وجہ سے:—

$\left(\frac{فرت}{فرق}\right)_{نہ} = -\left(\frac{فرطہ}{فرنہ}\right)_{ق}$ .... (۲۲)

لیکن مساوات (۲۱) اور (۲۲) سے:—

$$\frac{1}{د_{نہ}} - \frac{1}{د_{ت}} = -\left(\frac{فرطہ}{فرت}\right)_{ق} \cdot \left(\frac{فرطہ}{فرنہ}\right)_{ق} =$$

$$= -\left(\frac{فرطہ}{فرت}\right)_{ق} \cdot \left(\frac{فرطہ}{فرت}\right)_{ق} \cdot \left(\frac{فرت}{فرنہ}\right)_{ق}$$

مساوات (۱۱) سے $\left(\frac{فرطہ}{فرت}\right)_{ق}$ کی قیمت اگر لکھی جائے تو

$$\frac{1}{د_{نہ}} - \frac{1}{د_{ت}} = -\frac{طہ^2}{د^2}\left(\frac{فرد}{فرت}\right)^2_{ق} \cdot \left(\frac{فرت}{فرنہ}\right)_{ق} =$$

$$= -طہ^2\left(\frac{فرد}{د\, فرت}\right)^2 \cdot \frac{ت\, فرت}{فرص} = -\frac{طہ\, گ^2\, ت}{ن\, جو}$$

$\therefore \frac{1}{د_{نہ}} - \frac{1}{د_{ت}} = -\frac{طہ\, گ^2\, ت}{ن\, جو}$ .... (۲۳)

اس کو پروفیسر ہارٹن نے پہلی دفعہ ثابت کیا۔

چونکہ کسی دھات کے لئے بائیں جانب کی رقوم کی قیمت اس مساوات میں

منفی ہے۔

لہٰذا $\text{ح}_{\text{ن}}$ کی قیمت $\text{ح}_{\text{ت}}$ سے زیادہ ہوتی ہے۔

لچک کا حرناگزار حجمی معیار:— اوپر کے طریقے کے مطابق لچک کے حرناگزار حجمی معیار اور ہم تپشی حجمی معیار کے درمیان فرق دریافت کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ ایک جسم ایسا لیا جاتا ہے جس کی کمیت اکائی ہے اور اس کے دباؤ میں ق سے ق + فرق تک اضافہ کیا جاتا ہے جس کی وجہ سے اسکا حجم ح سے ح - فرح ہو جاتا ہے۔

پہلے کی طرح یہاں بھی $\text{ح} = \text{ف}(\text{ق}، \text{ت})$

$$\therefore \text{فح} = \left(\frac{\text{فح}}{\text{فق}}\right)_{\text{ت}} \cdot \text{فق} + \left(\frac{\text{فح}}{\text{فت}}\right)_{\text{ق}} \cdot \text{فت}$$

فرض کرو کہ $\text{ب}_{\text{ن}}$ = لچک کا حرناگزار حجمی معیار

اور $\text{ب}_{\text{ت}}$ = ” ” ہم تپشی ”

$$\therefore \left(\frac{\text{فح}}{\text{فق}}\right)_{\text{ن}} \cdot \frac{1}{\text{ح}} - \left(\frac{\text{فح}}{\text{فق}}\right)_{\text{ت}} \cdot \frac{1}{\text{ح}} =$$

$$= \frac{1}{\text{ح}} \left(\frac{\text{فح}}{\text{فت}}\right)_{\text{ق}} \cdot \left(\frac{\text{فت}}{\text{فق}}\right)_{\text{ن}} \quad \ldots\ldots\ldots (۲۴)$$

مساوات (۳) اور (۱۴) سے:—

$$\text{ف}(\text{ب} - \text{ق ح}) = \text{ت فن} - \text{ح فق}$$

یہ ایک مکمل تفرق ہونے کی وجہ سے:—

$$\left(\frac{\text{فت}}{\text{فق}}\right)_{\text{ن}} = -\left(\frac{\text{فح}}{\text{فن}}\right)_{\text{ق}} \quad \ldots\ldots\ldots (۲۵)$$

مساوات (۲۴) اور (۲۵) سے:—

$$\frac{1}{\text{ب}_{\text{ن}}} - \frac{1}{\text{ب}_{\text{ت}}} = -\frac{1}{\text{ح}} \left(\frac{\text{فح}}{\text{فت}}\right)_{\text{ق}} \cdot \left(\frac{\text{فح}}{\text{فن}}\right)_{\text{ق}} =$$

$$= -\frac{1}{\text{ح}}\left(\frac{\text{فح}}{\text{فت}}\right)_{\text{ق}} \cdot \left(\frac{\text{فح}}{\text{فت}}\right)_{\text{ق}} \left(\frac{\text{فت}}{\text{فمہ}}\right)_{\text{ق}} =$$

$$= -\text{ح}\left(\frac{\text{فح}}{\text{ح فت}}\right)^{2}_{\text{ق}} \cdot \text{ت}\left(\frac{\text{فت}}{\text{فحہ}}\right)_{\text{ق}} = -\frac{\text{ح}\ \text{عہ}^{2}\ \text{ت}}{\text{ن جو}}$$

لہذا

$$\frac{1}{\text{ب}_{\text{ف}}} - \frac{1}{\text{ب}_{\text{ت}}} = -\frac{\text{ح}\ \text{عہ}^{2}\ \text{ت}}{\text{ن جو}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲۶)$$

حسب سابق یہاں بھی $\text{ب}_{\text{ف}}$ کی قیمت $\text{ب}_{\text{ت}}$ سے زیادہ ہے۔

مثال کی طور پر پانی کے لئے :-

ت = ۲۷۳° تپش مطلق　　ح = ۱۱ر۰ مکعب سمر

$\text{عہ} = ۵ \times ۱۰^{-۵}$　　ن = ۰ر۰۹۵

$\text{جو} = ۲ر۴ \times ۱۰^{۷}$ ارگ　　$\text{ب}_{\text{ت}} = ۲ر۱ \times ۱۰^{۱۲}$ ڈائین فی مربع سمر

$$\therefore \frac{\text{ب}_{\text{ت}}}{\text{ب}_{\text{ف}}} = 1 - \frac{\text{ب}_{\text{ت}}\ \text{ح}\ \text{عہ}^{2}\ \text{ت}}{\text{ن جو}} = ۰ر۹۶۸$$

Chapter V.

(1) Phil. Trans. 149, 91 (1859)

چھٹا باب

مائعات کے پچکاؤ کی شرح اور تمدیدی طاقت

کسی خاص قیمت کے زور سے کسی مائع کے حجم میں، فی اکائی حجم جو کمی واقع ہوتی ہے وہ اس مائع کی پچکاؤ کی شرح کہلاتی ہے۔

۱۶۶۱ء میں، پانی کے پچکاؤ کو ثابت کرنے کے لئے شہر فلورنس میں، چاندی کے کُروں میں پانی بھر کر کُروں کی شکل میں بگاڑ پیدا کیا گیا تھا مگر یہ تجربہ کچھ کامیاب نہیں ہوا۔ لیکن ۱۷۶۲ء میں کینٹن نامی ایک شخص نے اس امر کو ثابت کرنے میں کامیابی حاصل کی کہ دباؤ سے پانی میں پچکاؤ واقع ہوتا ہے، مگر اس کو بھی پچکاؤ کی شرح کی صحیح قیمت نہیں حاصل ہو سکی۔ بعد میں ماہرین طبیعیات نے مختلف مائعات کے حجموں میں دباؤ سے جو تبدیلی ہوتی ہے اس کی پیمائش کی۔

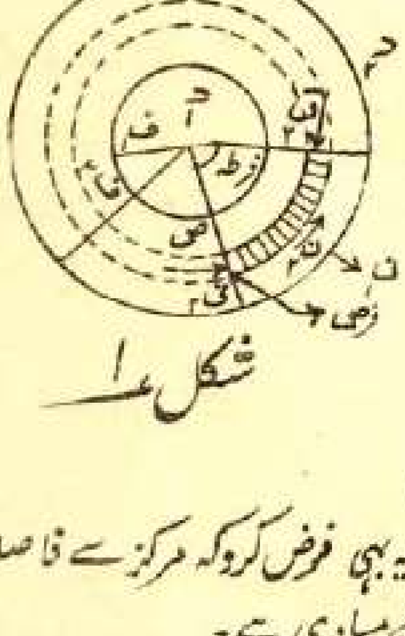
کینٹن نے شیشہ کا بنا ہوا ایک بڑا جوفہ استعمال کیا جس کے ساتھ شیشہ کی ایک تنگ شعری نلی جوڑ دی گئی تھی، پہلے جوفہ اور نلی کے کچھ حصہ میں پارہ بھرا گیا اور پھر جوفہ کو اتنا گرم کیا گیا کہ پھیل کر پارہ پورے جوفہ میں سما گیا۔ اسکے بعد شعری نلی کو بالکل بند کر دیا گیا، سرد ہونے پر پارہ اس میں نیچے اتر آیا۔ پارہ کی سطح پر اس وقت جو دباؤ عمل کر رہا تھا وہ دوران تجربہ کی تپش پر صرف پارہ کا بخاری دباؤ تھا، شعری نلی کے ایک سرے کو توڑ دینے سے، کرۂ ہوائی کے دباؤ پر ہوا اندر داخل ہوئی اور پارہ کی سطح اور نیچے اُتر آئی۔ پارہ کے حجم میں جو کمی فی اکائی حجم، اضافہ دباؤ کے باعث واقع ہوئی اس میں سے کچھ تو شیشے کے جوفہ کے پھیلاؤ سے واقع ہوئی اور کچھ پارے کے پچکاؤ سے۔

اسی تجربہ کو کینٹن نے پانی استعمال کر کے دہرایا اور یہ دریافت کیا کہ پانی کے

حجم میں فی اکائی حجم کمی پارہ کی بہ نسبت زیادہ ہوتی ہے۔ لہذا پانی کے حجم میں فی اکائی حجم کمی کا پانی کے پچکاؤ کی وجہ سے واقع ہونا ضروری ہے۔ پانی کے پچکاؤ کی شرح دریافت کرنے کے لئے اول ہمیں یہ معلوم کرنا ہوگا کہ جو نلی کے حجم اور نلی میں جو حقیقی تبدیلی (انہیں متناظر دباؤ کی وجہ سے) واقع ہوتی ہے وہ کتنی ہے۔

لہذا ہم یہاں کسی قدر تفصیل کے ساتھ اس پر غور کریں گے کہ کسی برتن کے حجم میں جب کہ اس پر اندرونی اور بیرونی دباؤ پڑ رہا ہو حقیقی تبدیلی کیسے واقع ہوتی ہے۔

ایک لمبی اسطوانہ نما نلی کی صورت پر غور کرو جس کے دونوں سرے چپٹے ہوں۔ فرض کرو کہ اس پر بیرونی دباؤ $د_۲$ اور اندرونی دباؤ $د_۱$ عمل کر رہا ہے۔



شکل ۱

ایسے اسطوانہ کی تراش (شکل ۱) میں دکھلائی گئی ہے۔ فرض کرو کہ اسطوانہ کے اندرونی اور بیرونی نصف قطر علی الترتیب $ف_۱$ اور $ف_۲$ ہیں۔ اس کی ایک بالکل چھوٹی دائری دھجی کو لو جس کے نصف قطر ص اور ص + قص ہو اور موٹائی نیچے کی جانب اکائی ہو۔ فرض کرو کہ یہ دھجی مرکز پر ایک بالکل چھوٹا زاویہ قرطہ بناتی ہے اسطوانہ کے اندرونی اور بیرونی دباؤ کے فرق کی وجہ سے یہ بھی فرض کرو کہ مرکز سے فاصلہ ص پر کسی ذرے کا قطری نقل مکان فہ کے مساوی ہے۔

تب ص + قص پر نقل مکان فہ + $\frac{\text{قفہ}}{\text{قص}}$. قص کے مساوی ہوگا۔

$$\therefore \text{قطری سمت میں بگاڑ} = ن_ر = \frac{\left(\text{فہ} + \frac{\text{قفہ}}{\text{قص}} \cdot \text{قص}\right) - \text{فہ}}{\text{قص}} = \frac{\text{قفہ}}{\text{قص}} \quad \ldots\ldots(۱)$$

فرض کرو کہ قطری آڑی سمت میں بگاڑ = $ن_2$ جیسا کہ شکل سے ظاہر ہے۔

$$\text{اور یہ } ن_2 = \frac{2\pi(ص+فہ) - 2\pi ص}{2\pi ص} = \frac{فہ}{ص} \quad .... (2)$$

فرض کرو کہ قطری دباؤ مرکز سے ص فاصلہ پر = $ق_1$ اور ص + فرص فاصلہ پر = $ق_1 + \frac{فرق_1}{فرص} . فرص$، اب چونکہ اس ٹکڑے کے طول ص فرطہ اور (ص + فرص) فرطہ ہوں گے۔

∴ اس چھوٹے ٹکڑے پر حاصل قطری قوت

$$= \left(ق_1 + \frac{فرق_1}{فرص} . فرص\right)(فرص + ص)\, فرطہ - ق_1\, ص\, فرطہ$$

$$= \left(ص \frac{فرق_1}{فرص} . فرص + ق_1\, فرص\right) فرطہ$$

کیونکہ فرص بہت چھوٹا ہے اسلئے $(فرص)^2$ کو نظر انداز کر دیا گیا ہے۔

اب اگر اس ٹکڑے پر قطر کی آڑی سمت میں دباؤ $ق_2$ ہو جیسا کہ شکل سے ظاہر ہے اور جو اس ٹکڑے کے دونوں سروں پر عمل کر رہا ہے تو

$$\text{قطر کی آڑی سمت میں قوت} = 2\, ق_2 . فرص . \frac{فرطہ}{2} = ق_2\, فرص\, فرطہ$$

$$\text{اب تعادل کیلئے } ق_2\, فرص\, فرطہ = \left(ص \frac{فرق_1}{فرص} . فرص + ق_1\, فرص\right) فرطہ$$

$$\therefore ق_2 - ق_1 = ص \frac{فرق_1}{فرص} \quad .... (3)$$

چوتھے باب کی مساوات (۳) سے یہ ہمیں معلوم ہے کہ

$$ق_1 = ک ن_1 + گ (ن_2 + ن_3) \quad .... (4)$$

$$ق_2 = ک ن_2 + گ (ن_1 + ن_3) \quad .... (5)$$

$$ق_3 = ک ن_3 + گ (ن_1 + ن_2) \quad .... (6)$$

اور ان مساواتوں کی مدد سے ہم نے ان مستقلوں کی قیمت حاصل کی تھی۔

یعنی $ک = ب + \frac{۴}{۳} د$ اور $گ = ب - \frac{۲}{۳} د$ جہاں

ب = حجمی معیار تحکّپ اور د = استواری کی شرح

اس صورت میں مساوات (۱)، (۲) اور (۴) کی مدد سے

$$- ق_۱ = ک \frac{فرفہ}{فرص} + گ \left(\frac{فہ}{ص} + ن_۲ \right) \text{ .... } (۷)$$

اور اسی طرح مساوات (۵) اور (۶) کو بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$- ق_۲ = ک \frac{فہ}{ص} + گ \left(\frac{فرفہ}{فرص} + ن_۲ \right) \text{ .... } (۸)$$

$$اور\ ن_۳ = ک ن_۲ + گ \left(\frac{فرفہ}{فرص} + \frac{فہ}{ص} \right) \text{ .... } (۹)$$

مساوات (۸) کو (۷) میں سے تفریق کرنے سے

$$ق_۲ - ق_۱ = (ک - گ) \frac{فرفہ}{فرص} - (ک - گ) \frac{فہ}{ص} \text{ .... } (۱۰)$$

اب مساوات (۷) کو بلحاظ ص تفرقانے اور −ص سے ضرب دینے سے

$$ص \frac{فرق_۱}{فرص} = - ک ص \frac{فر^۲ فہ}{فرص^۲} - گ \frac{فرفہ}{فرص} + گ \frac{فہ}{ص} \text{ .... } (۱۱)$$

اور مساوات (۱۰) اور (۱۱) کو مساوات (۳) میں درج کرنے اور ص سے ضرب دینے سے

$$ص^۲ \frac{فر^۲ فہ}{فرص^۲} + \frac{ص\ فرفہ}{فرص} - فہ = صفر$$

یہ ایک دوسرے رتبہ کی تفرقی مساوات ہے اسلئے اسکا حل :—

$فہ = ج ص^م$ جہاں ج اور م مستقل ہیں

فہ کی قیمت اس تفرقی مساوات میں درج کرنے سے

$$ج ص^۲ م(م-۱) ص^{(م-۲)} + ج ص م ص^{(م-۱)} - ج ص^م = صفر$$

یعنی $م^۲ - ۱ = صفر$ یعنی $م = \pm ۱$

∴ $فہ = ج_۱ ص + \frac{ج_۲}{ص}$ .... (۱۲)

جہاں $ج_۱$ اور $ج_۲$ مستقل ہیں

اس مساوات کو لیمی کی مساوات کہتے ہیں۔

اب مساوات (۷)، (۸) اور (۹) میں ک، گ اور فہ کی قیمتیں درج کریے

$$-ق_۱ = (ب + \frac{۴}{۳} د)(ج_۱ - \frac{ج_۲}{ص^۲}) +$$
$$+(ب - \frac{۲}{۳} د)(ج_۱ + \frac{ج_۲}{ص^۲} + ن_۲)$$

$$-ق_۲ = (ب + \frac{۴}{۳} د)(ج_۱ + \frac{ج_۲}{ص^۲}) +$$
$$+(ب - \frac{۲}{۳} د)(ج_۱ - \frac{ج_۲}{ص^۲} + ن_۲)$$

$$اور\ ق_۳ = (ب + \frac{۴}{۳} د) ن_۲ + (ب - \frac{۲}{۳} د)\ ۲\ ج_۱$$

جبکہ $ص = ف_۱$ تو $ق_۱ = د_۱$ اور جبکہ $ص = ف_۲$ تو $ق_۱ = د_۲$

$$∴ -د_۱ = (ب + \frac{۴}{۳} د)(ج_۱ - \frac{ج_۲}{ف_۱^۲}) +$$
$$+(ب - \frac{۲}{۳} د)(ج_۱ + \frac{ج_۲}{ف_۱^۲} + ن_۲)$$

$$اور\ -د_۲ = (ب + \frac{۴}{۳} د)(ج_۱ - \frac{ج_۲}{ف_۲^۲}) +$$
$$+(ب - \frac{۲}{۳} د)(ج_۱ + \frac{ج_۲}{ف_۲^۲} + ن_۲)$$

اب ان دونوں مساواتوں کی مدد سے

$$ج_۲ = \frac{۱}{۲د} \times \frac{(د_۲ - د_۱) ف_۱^۲ ف_۲^۲}{(ف_۱^۲ - ف_۲^۲)}$$ .... (۱۳)

اور $\dfrac{\text{د}_2\,\text{ف}_2^2-\text{د}_1\,\text{ف}_1^2}{\text{ف}_1^2-\text{ف}_2^2}=\text{ج}_1\left(2\,\text{ب}+\frac{2}{3}\,\text{د}\right)+$

$+\,\text{ن}_2\left(\text{ب}-\frac{2}{3}\,\text{د}\right)$ .... (۱۴)

شکل ۲ کے اسطوانہ پر غور کرو جس کا اندرونی نصف قطر ف_1 اور بیرونی نصف قطر ف_2 ہے۔

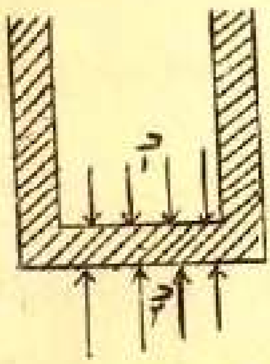
حاصل طولی قوت $=\text{د}_1\,\pi\,\text{ف}_1^2-\text{د}_2\,\pi\,\text{ف}_2^2$

∴ اوسط طولی زور جو کہ محور کے متوازی ہے =

$$=\text{ق}_2=\frac{\text{د}_1\,\pi\,\text{ف}_1^2-\text{د}_2\,\pi\,\text{ف}_2^2}{\pi\,\text{ف}_2^2-\pi\,\text{ف}_1^2}$$

یعنی $\text{ق}_2=\dfrac{\text{د}_1\,\text{ف}_1^2-\text{د}_2\,\text{ف}_2^2}{\text{ف}_2^2-\text{ف}_1^2}=$

$=\left(\text{ب}+\frac{4}{3}\,\text{د}\right)\text{ن}_2+\left(\text{ب}-\frac{2}{3}\,\text{د}\right)2\,\text{ج}_1$ .... (۱۵)



شکل ۲

ہمکو معلوم ہے کہ $\text{ن}_2=\dfrac{\text{ق}_2}{3\,\text{ب}}$

$\therefore\ \text{ن}_2=\dfrac{\text{د}_2\,\text{ف}_2^2-\text{د}_1\,\text{ف}_1^2}{3\,\text{ب}\left(\text{ف}_1^2-\text{ف}_2^2\right)}$ .... (۱۶)

اب ن_2 کی اس قیمت کو مساوات (۱۴) میں درج کرنے سے

$$\frac{\text{د}_2\,\text{ف}_2^2-\text{د}_1\,\text{ف}_1^2}{\text{ف}_1^2-\text{ف}_2^2}=\text{ج}_1\left(2\,\text{ب}+\frac{2}{3}\,\text{د}\right)+$$

$$+\left\{\frac{\text{د}_1\,\text{ف}_1^2-\text{د}_2\,\text{ف}_2^2}{3\,\text{ب}\left(\text{ف}_1^2-\text{ف}_2^2\right)}\right\}\left(\text{ب}-\frac{2}{3}\,\text{د}\right)$$

یعنی $\text{ج}_1=\dfrac{\text{د}_2\,\text{ف}_2^2-\text{د}_1\,\text{ف}_1^2}{2\,\text{ب}\left(\text{ف}_1^2-\text{ف}_2^2\right)}=\text{ن}_2$ .... (۱۷)

اگر $\text{د}_1=\text{د}_2=\text{ق}$ تو $\text{ن}_2=\dfrac{-\text{ق}}{3\,\text{ب}}=\dfrac{\text{فرل}}{\text{ل}}$ جہاں فرل اضافہ طول ہے

$$\therefore \text{ب} = \frac{-\text{ق}}{\text{۳}\,\frac{\text{فرل}}{\text{ل}}} = \text{حجمی معیار لچک}$$

اگر $\text{د}_1 = \text{ق}$ اور $\text{د}_2 = \text{صفر}$ تو $\text{ن}_2 = \frac{\text{فرل}}{\text{ل}} = \frac{\text{ق ف}_1^2}{\text{۳ ب}(\text{ف}_2^2 - \text{ف}_1^2)}$

اگر ٹ = اسطوانہ کی موٹائی تو $\text{ن}_2 = \frac{\text{فرل}}{\text{ل}} = \frac{\text{ق ف}_1^2}{\text{۳ ب ٹ}(\text{ف}_2 + \text{ف}_1)}$

اگر ٹ بمقابلہ ف_1 بہت چھوٹا ہو تو $\text{ن}_2 = \frac{\text{فرل}}{\text{ل}} = \frac{\text{ق ف}_1}{\text{۶ ب ٹ}}$

اسی طریقہ کو میلاک (۱) نے مختلف اشیاء کی ب کی قیمت دریافت کرنے کیلئے استعمال کیا تھا۔ اسطوانہ کا اندرونی دباؤ سکون سیالات کے طریقہ سے لگایا گیا تھا، اور طول میں تبدیلی فی اکائی طول ناپ کر دریافت کر لی گئی تھی لہذا ب کی قیمت اسطوانہ کا نصف قطر اور موٹائی معلوم کرنے سے دریافت کی گئی تھی۔

اگر $\text{د}_2 = \text{ق}$ اور $\text{د}_1 = \text{صفر}$ تو $\text{ن}_2 = \frac{\text{فرل}}{\text{ل}} = \frac{-\text{ق ف}_2^2}{\text{۳ ب}(\text{ف}_2^2 - \text{ف}_1^2)}$

یہاں منفی علامت اس وجہ سے حاصل ہوئی ہے کہ بیرونی دباؤ اسطوانہ کو پچکا دیتا ہے جس کی وجہ سے اسکا طول بڑھ جاتا ہے۔

اب ہم قطری دباؤ ق_1 اور ق_2 کو د_1 اور د_2 وغیرہ کی رقموں میں حاصل کریں گے:-

یہ ہمیں معلوم ہے کہ $-\text{ق}_1 = (\text{ب} + \frac{4}{3}\text{د})(\text{ج}_1 - \frac{\text{ج}_2}{\text{ص}^2}) + (\text{ب} - \frac{2}{3}\text{د})(\text{ج}_1 + \frac{\text{ج}_2}{\text{ص}^2} + \text{ن}_2)$

اور $-\text{ق}_2 = (\text{ب} + \frac{4}{3}\text{د})(\text{ج}_1 + \frac{\text{ج}_2}{\text{ص}^2}) + (\text{ب} - \frac{2}{3}\text{د})(\text{ج}_1 - \frac{\text{ج}_2}{\text{ص}^2} + \text{ن}_2)$

ان دونوں مساواتوں میں ج$_1$ اور ج$_2$ اور ت$_2$ کی قیمتیں درج کرنے سے

$$-\text{ق}_1 = \frac{\text{د}_2\text{ف}_2^2 - \text{د}_1\text{ف}_1^2}{\text{ف}_1^2 - \text{ف}_2^2} - \frac{(\text{د}_2 - \text{د}_1)\text{ف}_1^2\text{ف}_2^2}{\text{ص}^2(\text{ف}_1^2 - \text{ف}_2^2)} \quad \ldots\ldots (18)$$

$$\text{اور} \; -\text{ق}_2 = \frac{\text{د}_2\text{ف}_2^2 - \text{د}_1\text{ف}_1^2}{\text{ف}_1^2 - \text{ف}_2^2} + \frac{(\text{د}_2 - \text{د}_1)\text{ف}_1^2\text{ف}_2^2}{\text{ص}^2(\text{ف}_1^2 - \text{ف}_2^2)} \quad \ldots\ldots (19)$$

اگر د$_2$ = صفر

$$\text{تو} \; -\text{ق}_1 = \frac{-\text{د}_1\text{ف}_1^2}{\text{ف}_1^2 - \text{ف}_2^2} + \frac{\text{د}_1\text{ف}_1^2\text{ف}_2^2}{\text{ص}^2(\text{ف}_1^2 - \text{ف}_2^2)}$$

$$\text{یعنی قطری دباؤ ق}_1 = \frac{\text{د}_1\text{ف}_1^2}{\text{ف}_1^2 - \text{ف}_2^2}\left\{1 - \frac{\text{ف}_2^2}{\text{ص}^2}\right\} \quad \ldots\ldots (20)$$

اسی طرح [illegible] قطری دباؤ

$$\text{ق}_2 = \frac{-\text{د}_1\text{ف}_1^2}{\text{ف}_2^2 - \text{ف}_1^2}\left\{1 + \frac{\text{ف}_2^2}{\text{ص}^2}\right\} \quad \ldots\ldots (21)$$

اب ہم ایک ایسے مائع کی صورت پر غور کریں گے جو ایک اسطوانہ نما برتن میں بچکایا جاتا ہے جب یہ مائع بچکتا ہے تو فرض کرو کہ ص، ص + فہ اور اسطوانہ کا طول ل، ل + فل ہو جاتا ہے۔

یعنی کی مساوات میں ج$_1$ اور ج$_2$ کی قیمتیں درج کرنے سے

$$\text{فہ} = \frac{\text{ص}}{3\text{ب}}\left(\frac{\text{د}_2\text{ف}_2^2 - \text{د}_1\text{ف}_1^2}{\text{ف}_1^2 - \text{ف}_2^2}\right) + \frac{1}{2\text{د}}\left\{\frac{(\text{د}_2 - \text{د}_1)\text{ف}_1^2\text{ف}_2^2}{\text{ص}(\text{ف}_1^2 - \text{ف}_2^2)}\right\}$$

ص = ف$_1$ پر فرض کرو کہ فہ = فہ$_1$

$$\therefore \text{فہ}_1 = \frac{\text{ف}_1}{3\text{ب}}\left(\frac{\text{د}_2\text{ف}_2^2 - \text{د}_1\text{ف}_1^2}{\text{ف}_1^2 - \text{ف}_2^2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2\text{د}}\left\{\frac{(\text{د}_2 - \text{د}_1)\text{ف}_1\text{ف}_2^2}{(\text{ف}_1^2 - \text{ف}_2^2)}\right\} \quad \ldots\ldots (22)$$

فرض کرو کہ برتن کا اندرونی حجم ابتداءً میں $ح_1$ تھا اور دباؤ کے بعد $ح_1 + فرح_1$ ہوگیا۔

تب $ح_1 = \pi ف_1^2 ل$ اور $ح_1 + فرح_1 = \pi (ف_1 + فہ_1)^2 (ل + فرل)$

اب اگر یہ مان لیا جائے کہ فرل اور $فہ_1$ بہت چھوٹے ہیں تو ان کے اونچی طاقت والے رقوم نظر انداز کئے جا سکتے ہیں۔

$$\therefore \frac{فرح_1}{ح_1} \simeq \frac{2 فہ_1}{ف_1} + \frac{فرل}{ل} = \frac{2 فہ_1}{ف_1} + ن_3$$

مساوات (۱۷) اور (۲۲) کی مدد سے :-

$$\frac{فرح_1}{ح_1} = \frac{د_2 ف_2^2 - د_1 ف_1^2}{ب(ف_1^2 - ف_2^2)} + \frac{(د_2 - د_1) ف_2^2}{د(ف_1^2 - ف_2^2)} \quad ....(۲۳)$$

اسی طرح بیرونی حجم کے لئے :-

$$\frac{فرح_2}{ح_2} = \frac{د_2 ف_2^2 - د_1 ف_1^2}{ب(ف_1^2 - ف_2^2)} + \frac{(د_2 - د_1) ف_1^2}{د(ف_1^2 - ف_2^2)} \quad ....(۲۴)$$

پچکاؤ کی شرح دریافت کرنے کے طریقے :- یہاں ریئنو کا وہ طریقہ بیان کیا جائے گا جس کے ذریعہ مائعات کے پچکاؤ کی شرح دریافت کی گئی تھی اگر مساوات (۲۳) میں $د_2 = د_1 =$ ق فرض کریں

تو $\frac{فرح_1}{ح_1} = -\frac{ق}{ب}$ جہاں ب = برتن کے مادہ کا حجمی معیار لچک

اسی طرح مائع کے لئے جو اس برتن میں رکھا گیا ہے

$\frac{فرح}{ح} = -\frac{ق}{بَ}$ جہاں بَ = اس مائع کا حجمی معیار لچک

اب چونکہ برتن اور مائع کا حجم ایک ہی ہے

اس لئے حاصل کمی جو حجم میں واقع ہوگی $= \frac{فرح_1}{ح} - \frac{فرح}{ح}$

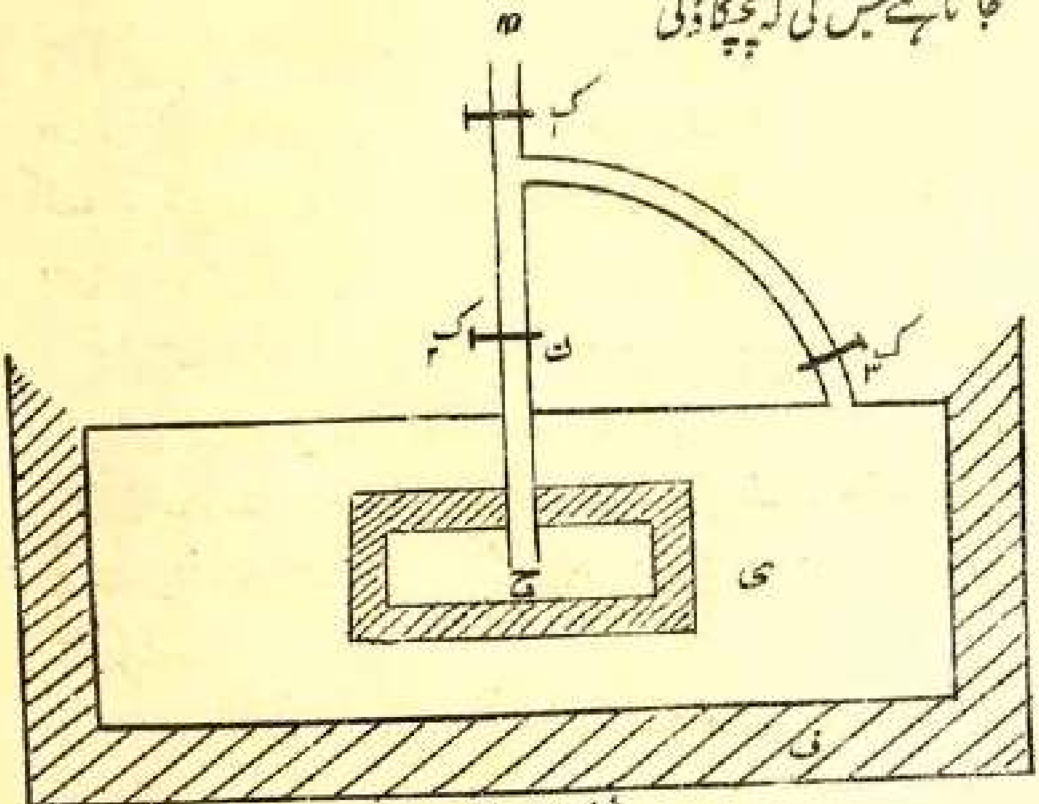
$$= \frac{فرح_1 - فرح}{ح}$$

$$= ق\left(\frac{1}{بَ} - \frac{1}{ب}\right)$$

رینو نے اس طریقہ سے، اندرونی اور بیرونی دباؤ ایک ہی رکھ کر ب کی قیمت دریافت کی۔ اور چنانچہ اسی طرح $\frac{1}{ب}$ یعنی مائع کے پچکاؤ کی شرح دریافت کی گئی۔ اس تجربہ میں ب کا معلوم کرنا ضروری ہے۔

جن آلات کا رینو نے استعمال کیا تھا وہ شکل نمبر ۳ میں بتائے گئے ہیں۔

ج ایک اسطوانہ نما برتن ہے جس میں اس مائع کو رکھا جاتا ہے جس کی کہ پچکاؤ کی



شکل نمبر ۳

شرح دریافت کرنا مطلوب ہوتا ہے۔ اس برتن کو ایک دوسرے برتن ی میں رکھا جاتا ہے اور اس میں پانی بھر دیا جاتا ہے۔ ان سب کو پھر ایک اور بڑے برتن ف میں داخل کیا جاتا ہے جس میں یا تو برف رکھی جاتی ہے یا بھاپ گزاری جاتی ہے۔ اس برتن کو استعمال کرنے کا مقصد صرف یہ ہے کہ تپش مستقل رہے۔ ج میں کا مائع نلی ت کے درجہ دار تے تک پہنچ جاتا ہے، نلی ت کا حجم کسی دو

متوازن نشانوں کے درمیان دریافت کیا جاتا ہے۔ اس کی اس وقت ضرورت نہیں ہوتی جبکہ خود نلی کی درجہ بندی کی گئی ہو ک، ک۲ اور ک۳ ٹونٹیاں ہیں جن کو حسب خواہش کھولا یا بند کیا جاسکتا ہے، ٥ سے پچکی ہوئی ہوا کے ذریعہ دباؤ ڈالا جا سکتا ہے اور اس دباؤ کو داب پیما سے ناپا بھی جا سکتا ہے۔ نلیاں اس طرح ترتیب دی گئی ہیں کہ مناسب ٹونٹیوں کو کھولنے سے دباؤ یا تو صرف ج کے بیرونی جانب عمل کرتا ہے اور اندرونی جانب بالکل نہیں عمل کرتا، یا اس کے برعکس عمل کرتا ہے یا بیک وقت نلی کے بیرونی اور اندرونی دونوں جانب اثر کرتا ہے۔ د۱ کو د۲ کے مساوی رکھتا ہو تو ک۲ اور ک۳ دونوں ٹونٹیاں کھول دیجائیں اور دباؤ کو عمل کرنے دیا جائے۔

اس صورت میں اگر مائع کی سطح ا۱ کے مساوی نیچے اُتر آئے

$$\text{تو}\ \text{ا}_1\,\text{س} = \text{فرح}_1 - \text{فرح}_2 = \text{ح ق}\left(\frac{1}{\text{بَ}} - \frac{1}{\text{ب}_1}\right) \quad \ldots\ldots (۲۵)$$

جہاں س = نلی ت کے تراش عمودی کا رقبہ

لہذا مساوات (۲۵) سے ب کی قیمت دریافت کرنے کے بعد ہم بَ کی قیمت دریافت کر سکتے ہیں اور اس طرح مائع کے پچکاؤ کی شرح دریافت کی جا سکتی ہے۔

اس صورت میں مائع کی سطح کا چڑھاؤ اگر ا۲ کے مساوی ہو اور ق = د۲ اور د۱ = صفر

$$\text{تو}\ \text{ا}_2\,\text{س} = \frac{-\text{ح ق ف}_2^2}{\text{ف}_2^2 - \text{ف}_1^2}\left\{\frac{1}{\text{ب}} + \frac{1}{\text{د}}\right\} \quad \ldots\ldots (۲۶)$$

یہاں بَ اس لئے غائب ہو جاتا ہے کہ اس صورت میں مائع پچکایا نہیں جا رہا ہے اگر مائع کی سطح کا اُتار اس صورت میں = ا۳ اور ق = د۱ اور د۲ = صفر

$$\text{تو}\ \text{ا}_3\,\text{س} = \frac{\text{ح ق}}{\text{ف}_2^2 - \text{ف}_1^2}\left\{\frac{\text{ف}_2^2 - \text{ف}_1^2}{\text{بَ}} + \frac{\text{ف}_1^2}{\text{ب}_1} + \frac{\text{ف}_2^2}{\text{د}}\right\} \quad \ldots\ldots (۲۷)$$

اب مساوات (۲۵) (۲۶) اور (۲۷) سے :-

$$ا_1 س = ا_2 س + ا_3 س$$

$$\therefore ا_1 = ا_2 + ا_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲۸)$$

ریگنو نے اس ضابطہ کی تجربی طور پر تحقیق کی اور اس طرح نظریہ کی صحت کا ثبوت حاصل کیا۔ لیمی کا یہ خیال تھا کہ پواسان کی نسبت سب مادی اشیاء کے لئے $\frac{1}{4}$ کے مساوی ہے۔

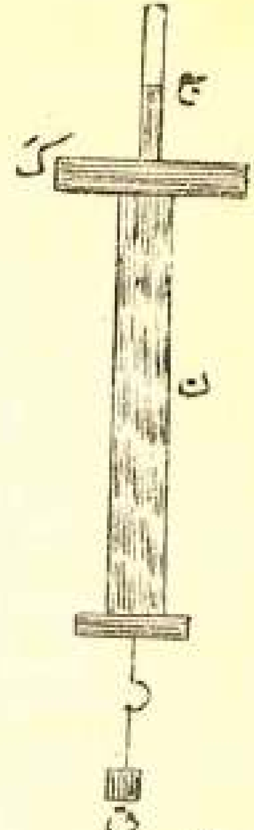
چنانچہ چوتھے باب کی مساوات (۲) سے $د = \frac{3}{5}ب$

اسی بنا پر ریگنو نے مساوات (۲۶) میں د کے بجائے $\frac{3}{5}$ ب رکھ کر ب کی قیمت پہلے تجربہ سے دریافت کی اور اس کے بعد مساوات (۲۵) کی مدد سے ماں کے لئے ب کی قیمت دریافت کی لیکن یہ طریقہ ٹھیک نہیں۔ لیمی کی رائے بعد میں غلط ثابت ہوئی لہذا یہی بہتر ہے کہ ب کی قیمت ایک علیحدہ تجربہ سے دریافت کی جائے اور پھر اس آسان ضابطہ سے ب کی قیمت معلوم کی جائے۔ ب کی قیمت جیسا کہ اوپر بیان ہو چکا ہے میلیک کے طریقے سے بھی دریافت کی جا سکتی ہے مگر جو طریقہ ذیل میں لکھا جاتا ہے وہ اس سے بھی زیادہ آسان ہے۔

شکل ۱۴ میں ت ایک ٹھوس نلی ہے جس کیلئے ب کی قیمت دریافت کرنی ہے۔ یہ نلی ایک اور درجہ دار پتلی نلی ج سے بند کر دی گئی ہے اور اس میں پانی بھرا جاتا ہے ک، ک پر نلی کو اچھی طرح جما دینے کے بعد ایک تناؤ ق لگایا جاتا ہے۔

نلی بڑھتی ہے اور اسکا اندرونی حجم زیادہ ہو جاتا ہے حجم میں یہ اضافہ فرض حج واقع ہوتا ہے وہ پتلی نلی ج میں پانی کے نیچے اتر آنے سے ناپا جاتا ہے۔ نلی کا ابتدائی حجم ح اگر معلوم ہو تو حسب ذیل مساوات سے (جو چوتھے باب میں لی گئی ہے) ب کی قیمت آسانی سے معلوم ہو جاتی ہے :-

$$\frac{زح}{ح_1} = \frac{ق}{۳ب} \quad \text{.........} \quad (۲۹)$$



شکل ۴۲

کسی مائع کے پچکاؤ کی شرح دریافت کرنے کا بہترین طریقہ یہ ہے کہ شکل ۴۲ کے آلات میں پہلے کوئی مائع (مثلاً پارہ) بھر دیا جائے جس کی پچکاؤ کی شرح معلوم ہے اور اس کے بعد جب برتن کے اندرونی اور بیرونی جانب دباؤ ایک ہی ہو تو حجم میں جو ظاہری تبدیلی ہوتی ہے اس کو معلوم کر لیا جائے۔ پھر برتن میں ایسا مائع بھر دیا جائے جس کے پچکاؤ کی شرح دریافت طلب ہے۔ اب اسی طرح حجم کی ظاہری تبدیلی کو دریافت کرلیں جبکہ اندرونی اور بیرونی دباؤ ایک ہی ہو۔

پارہ کی صورت میں جس کے پچکاؤ کی شرح $\frac{1}{بَ}$ معلوم ہے مساوات (۲۵) سے ہمکو یہ مساوات حاصل ہوگی۔

$$اَ\,س = ح\,قَ\left(\frac{1}{بَ} - \frac{1}{ب}\right) \quad \text{.........} \quad (۳۰)$$

جہاں اَ = پارہ کی سطح کا اُتار اور د = قَ = $د_2$

لہذا مساوات (۲۵) اور (۳۰) سے دونوں نامعلوم مقادیر دبا اور دبَ کی قیمتیں دریافت کرلی جاسکتی ہیں:—

آواز کی رفتار کی مدد سے بھی کسی مائع کی پچکاؤ کی شرح دریافت کی جاسکتی ہے۔ آواز کی کسی کتاب سے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ

$$س = \sqrt{\frac{\text{معیار لچک}}{\text{کثافت}}}$$ جہاں س = کسی واسطہ میں آواز کی رفتار۔

مارتھی نے ۴° م اور ۲۵° م پر معیار لچک کی قیمت معلوم کرنے کے بعد پانی کی پچکاؤ کی شرح دریافت کی تھی(۳)۔

دباؤ، تپش اور ارتکاز کا اثر پچکاؤ کی شرح پر:- ٹیٹ نے یہ دریافت کیا کہ کسی مائع کے پچکاؤ کی شرح دباؤ کے بڑھنے سے گھٹنے لگتی ہے(۴)۔ اکثر مائعات کی پچکاؤ کی شرح تپش کے بڑھنے سے بڑھتی ہے۔ گراسی نے تجربہ کرنے کے بعد یہ ثابت کیا کہ پانی کے پچکاؤ کی شرح صفر درجہ مئی اور ۴° مئی کے درمیان اعظم ہوتی ہے(۵)۔ پیگلیانی اور دیگر سائنسدانوں نے یہ ثابت کیا کہ ۶۰° م اور ۷۰° م کے درمیان پانی کے پچکاؤ کی شرح اقل ہوتی ہے(۶)۔ پارہ کے پچکاؤ کی شرح کے لئے ڈی مٹز نے ت° م پر جو مساوات حاصل کی تھی وہ حسب ذیل ہے(۷):-

$$\text{پچکاؤ کی شرح} = 37.4 \times 10^{-7} + 87.7 \times 10^{-10}\,\text{ت}$$

زنگکن اور فینیڈر نے مختلف محلولوں کیلئے پچکاؤ کی شرح دریافت کی تھی، انھوں نے یہ ثابت کیا کہ کسی محلول کی پچکاؤ کی شرح، پانی سے کم ہوتی ہے اور جیسے جیسے محلول کا ارتکاز بڑھتا ہے، پچکاؤ کی شرح بھی کم ہوتی جاتی ہے۔ چند مائعات کے پچکاؤ کی شرح ذیل کی جدول میں دی گئی ہیں:-

مائع	تپش مئی درجوں میں	پچکاؤ کی شرح فی ہوا کے کرہ کا دباؤ
پانی	۴	5.00×10^{-5}
سمندر کا پانی	۱۷٫۵	4.36×10^{-5}
ایتھر	صفر	11.56×10^{-5}
الکحل	صفر	8.28×10^{-5}
تارپین	صفر	5.82×10^{-5}

کلوروفارم	۸٫۵	$۶٫۲۵ \times ۱۰^{-۵}$
زیتون کا تیل	صفر	$۴٫۸۶ \times ۱۰^{-۵}$
گلیسرین	صفر	$۲٫۵۲ \times ۱۰^{-۵}$
پٹرولیم	۱۹٫۲	$۷٫۴۵ \times ۱۰^{-۵}$
پارہ	۴	$۰٫۳۸ \times ۱۰^{-۵}$

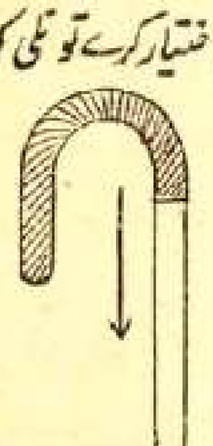
نوٹ۔ اس جدول سے ایک عجیب بات یہ معلوم ہوتی ہے کہ پارہ کے پچکاؤ کی شرح تقریباً پانی کے پچکاؤ کی شرح کی $\frac{۱}{۱۳٫۶}$ گنی ہے۔ یعنی اسکا مطلب یہ ہے کہ پارہ کی پچکاؤ کی شرح پانی کے پچکاؤ کی شرح کی $\frac{۱}{کثافت}$ گنی ہے۔ دیگر صورتوں میں یہ صحیح نہیں ہے۔

مائعات کی تمددی طاقت:- معمولی مشاہدات سے ظاہر ہے کہ مائعات کو علیحدہ حصص میں جدا کرنے کے لئے ایک بالکل چھوٹی قوت کافی ہوتی ہے اور اس سے بادی النظر میں یہ نتیجہ اخذ ہوسکتا ہے کہ ایک مائع کے ذرّوں کے درمیان بہت ہی کم قوت اتصال ہوتی چاہیئے۔ مگر ایسا نہیں ہوتا۔ مائع جب حصص میں تقسیم یا جُدا کیا جاتا ہے تو اس کی علیحدگی ہمیشہ سطح پر سے بہنے کی شکل میں وقوع پذیر ہوتی ہے اور کبھی بھی ایسا نہیں ہوتا کہ اس کے اندرونی حصص کو شکست کرنا پڑے۔ اس کی مثال کاغذ کے ایک ٹکڑے کی سی ہے جس پر تمددی زور لگایا جاتا ہے۔ اس زور کی مزاحمت اگرچیکہ کاغذ ایک حد تک کرسکتا ہے لیکن کاغذ کو کنارے پر سے کتر دیا جائے تو پھر ایک بالکل چھوٹی قوت آسانی سے اسکو پھاڑ سکتی ہے۔

جن مائعات میں سے ہوا بالکل نکال لی جاتی ہے وہ ٹوٹنے کے بغیر معتدبہ کھنچاؤ کی قوت کی مزاحمت کرسکتے ہیں۔ اس کی بہترین مثال بارمیٹا کی نلی کے اوپر

پارہ کے چمٹ جانے سے ملتی ہے۔ ایک بارپیما کی نلی کو، جس میں پارہ بھرا ہوا ہو، احتیاط کے ساتھ جھکا کر انتصابا الٹ دیا جائے تو بعض دفعہ پارہ نلی کے اوپر چمٹ جاتا ہے۔ اگرچہ کہ پارہ کا یہ طول اس طول سے زیادہ ہوتا ہے جس کو طبعی طور پر بارپیما سہار سکتا ہے لیکن پھر بھی نلی میں پارہ رہتا ہے۔ ظاہر ہے کہ اُلٹنے سے، پارہ کے اسطوانہ کے اس زائد طول میں تناؤ ضرور پیدا ہوتا ہے مگر اسطوانہ ٹوٹتا نہیں۔

شکل ۵ میں بتائی ہوئی وضع کی ایک نلی لو اور اسکو پانی اور آبی بخار سے بھرلو۔ پھر پانی کو جوش دے کر اس میں سے احتیاط کے ساتھ تحلیل ہوا کو نکال لو اور نلی کو بند کر دو۔ جب پانی شکل ۵ میں بتایا ہوا مقام اختیار کرے تو نلی کو تیزی کے ساتھ پیکان کی سمت دھکا دے کر حرکت دو۔



شکل ۵

پانی کے اسطوانہ پر گو ایک معتدبہ تناؤ عمل کرتا ہے لیکن اسطوانہ ٹوٹتا نہیں۔ جب کبھی پانی کا اسطوانہ ٹوٹے گا، ہوا کا ایک چھوٹا بلبلہ وہاں ضرور نظر آئے گا اور اسی کی موجودگی اسطوانہ کے ٹوٹنے کی وجہ ہوتی ہے۔

لہذا اگر یہ مطلوب ہو کہ پانی کا اسطوانہ ٹوٹنے کے بغیر ایک بڑے دھکے کو سہار لے تو حتی الامکان پانی میں سے ہوا کے بلبلوں کو نکال دینا ضروری ہے۔

ان مثالوں سے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ پانی، پارہ اور دیگر مائعیات بڑی حد تک ٹوٹنے کے بغیر تمدیدی زور کو سہار سکتے ہیں۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ مائع کے ذرات آپس میں خوب چمٹے ہوئے رہتے ہیں اور ان کو کھینچ کر علیحدہ کرنے کے لئے ایک معتدبہ قوت درکار ہوتی ہے۔

مائعات میں سے ہوا کو بالکل علیحدہ کرنا ایک ایسا مشکل امر ہے کہ اس کی موجودگی کی وجہ سے اس مطلق زور یا تناؤ کی قیمت صحیح طور پر دریافت نہیں

کی جا سکتی جو مائع کے اسطوانہ کو توڑنے کے لئے درکار ہوتا ہے۔ پروفیسر اسبورن رینالڈ نے یہ دریافت کیا ہے کہ پانی ۷۲ء۵ پونڈ فی مربع انچ کے تناؤ کو بغیر ٹوٹے ہوئے سہار سکتا ہے۔

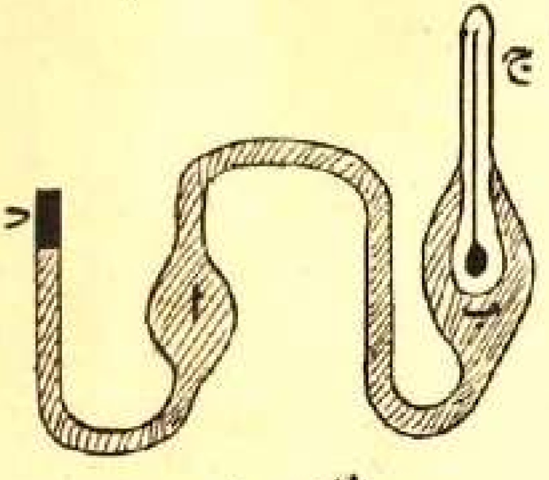
پروفیسر ورتھنگٹن نے یہ معلوم کیا کہ سلفیورک ترشہ ۱۷۳ پونڈ فی مربع انچ اور الکحل ۱۱۷ پونڈ فی مربع انچ کے تناؤ کو سہار سکتا ہے⑤۔ سنہ ۱۹۰۹ء میں ایچ ایچ ڈکسن ایسے طریقہ سے ایک تجربہ کی بنیاد ڈالی جس کو برتھیلو نے ابتدا میں پانی کے تمدیدی زور کو اس کے لچک اور بگاڑ کی رقموں میں دریافت کرنے کے لئے استعمال کیا تھا⑨۔

ایک مضبوط شعری نلی جس کا ایک سرا بند کر دیا گیا تھا ۲۸° م کی تپش کے پانی سے بھری گئی۔ اس کو ۱۸° م تک ٹھنڈا کیا گیا، اور ایک چھوٹا سا ہوا کا بلبلا اس کے اندر داخل کیا گیا۔ اب نلی کو بالکل بند کر دیا گیا۔ نلی کو گرم کرنے سے ہوا بتدریج پانی میں حل ہو گئی اور پوری نلی میں پانی بھر گیا۔ نلی کو جب پھر ۱۸° م تک ٹھنڈا کیا گیا تو پوری نلی میں صرف پانی ہی بھرا ہوا رہا۔ اس سے ظاہر ہے کہ پانی کے حجم میں بگاڑ پیدا ہوا ہوگا اور اسکو ہوا کے بلبلے کے حجم کی اس نسبت سے جو پانی کے حجم کے ساتھ ہوگی، ناپا جا سکتا ہے پانی کے حجمی معیار لچک کی معلوم قیمت سے، پانی کے تمدیدی زور کی قیمت حساب کے ذریعہ حاصل ہو سکتی ہے۔

فرض کرو کہ بہت دیر تک جوش دئے ہوئے پانی سے، جس میں سے ہوا قریب قریب بالکل نکالی جا چکی ہے ہم شعری نلی کو تقریباً بھر دیتے ہیں اور اس کے بقیہ حصہ میں پانی کا بخار موجود ہے اس نلی کو ایک کسی خاص تپش تک گرم کیا جائے تو پوری نلی میں پانی بھر جاتا ہے اور نلی کو سرد کرنے پر پانی کی سطح کچھ دیر تک ٹوٹتی نہیں، لیکن ایک خاص تپش پر فرض کرو کہ اسطوانہ ایک بلند "کلک" کی آواز سے ٹوٹ جاتا ہے اور بخار کا بلبلا پھر نمودار ہوتا ہے۔ بلبلا کے اس

حجم اور پانی کے حجم کی نسبت سے بگاڑ کی پیمائش ہوتی ہے۔ لہذا پانی کے حجمی معیار لچک کی معلوم قیمت سے برتھیلو نے پانی کے اس تمدیدی زور کی قیمت معلوم کی جس کو بغیر ٹوٹے ہوئے پانی کا اسطوانہ سنبھال سکتا ہے۔

پروفیسر ورڈنگٹن نے اس طریقہ کو پیش نظر رکھ کر اس میں ترمیم کی۔ شکل ۶ میں ج ایک شعری نلی ہے جسکا ایک سرا ناقص کی شکل کا جوفہ ہے۔ اس میں پارہ اور ا اور ب میں مائع ڈالا جاتا ہے۔ د ہوا کا یا بخار کا ایک بلبلہ ہے۔



شکل ۶

یہ ظاہر ہے کہ جب مائع تناؤ کی حالت میں رہتا ہے (جیسا کہ ڈکسن کے تجربہ میں تھا) تو ناقصی جوفہ پھیلتا ہے اور پارہ کا سوت شعری نلی میں نیچے اتر جاتا ہے۔ اسکے اتار کی مقدار سے پہلے کی طرح بگاڑ کی قیمت دریافت کی جا سکتی ہے، اور اس طرح تمدیدی زور دریافت کیا جا سکتا ہے۔ اس طریقہ سے ورڈنگٹن نے پانی اور الکحل کی حجمی معیار لچک کی قیمتیں بھی دریافت کی ہیں۔ (۱)

سطحی تناؤ کے باب میں تمدیدی طاقت کا تفصیلی بیان دیا جائیگا۔

Chapter VI.

(١) Proc Roy. Soc. A. 74 P50 (1904)
(٢) Memoires de l'Institut, 21 429 (1847)
(٣) Properties of Matter "McEwen" P162 (1923)
(٤) Properties of Matter "Tait" P190, (1885)
(٥) Properties of Matter "Newman & Searle" P131 (1928)
(٦) ,, , ,, P131 (1928)
(٧) Properties of Matter 'Poynting & Thomson" P122, (1922)
(٨) ,, ,, ,, P123, (1922)
(٩) General Physics for Students "Edser" P282 (1926)
(١٠) Phil, Trans. A. P. 355 (1892)

ساتواں باب

مائعات کا سطحی تناؤ

مائعات میں سالماتی اندرونی قوتوں کی موجودگی، ان مظاہر کا باعث ہوتی ہے جن کو سطحی تناؤ سے تعبیر کیا جاتا ہے متعدد مشاہدات سے اس امر کا پتہ چلتا ہے کہ مائع کی سطح ایک ایسی جھلی کی طرح عمل کرتی ہے جو تنی، پھیلی ہوئی اور لچک دار ہو۔ مائع کی سطح کا عمل حسب ذیل مشاہدات سے واضح ہوگا :—

جب پارہ کا ایک قطرہ کسی شیشہ کی تختی یا دھاتی سطح پر ڈالا جاتا ہے تو بجائے پھیل جانے کے ایک جا جمع ہو جاتا ہے، اس کی گہرائی کئی ممر کی ہو سکتی ہے۔ پانی کا قطرہ بھی کسی چکنائی دار تختی پر اسی طرح عمل کرتا ہے اور پھیلنے کے بجائے مجتمع ہو کر ایک جا قائم ہو جاتا ہے۔

سطح کو جو مائعات بھگوتے ہیں وہ پھیل جاتے ہیں اور جو سطح کو نہیں بھگوتے وہ متذکرہ بالا طریقہ سے ایک جا جمع ہو جاتے ہیں۔ یہ عمل صرف ان کے وزن کی قوتوں پر مبنی نہیں ہوتا بلکہ دیگر قوتوں مثلاً تماسی سطح کی خاصیت وغیرہ پر بھی منحصر ہوتا ہے۔

مائعات کے اوپر ایک تنی جھلّی دار سطح کا وجود تصور کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً مچھر جب پانی پر بیٹھتا ہے تو اس کے نیچے پانی کی سطح دب جاتی ہے۔ چاندی کی خشک سوئی پانی کی سطح پر آہستہ رکھ دی جائے تو وہ تیرنے لگتی ہے۔

رنگ کرنے کا معمولی برش پانی میں ڈبویا جاتا ہے تو اس کے بال ایک دوسرے پر جم جاتے ہیں، یعنی سطحی تناؤ کی وجہ سے بال ایک دوسرے

کے قریب کھنچ جاتے ہیں۔

دائری وضع کے ایک تار کو ڈوری ا ب سے باندھ کر صابون کے محلول میں ڈبو کر باہر نکالو تو تار پر ایک پتلی جھلی بنتی ہے۔ حصہ ج کو چھونے سے ڈوری ا ب (جیسا کہ شکل ۱ میں نقطہ دار خط سے دکھایا گیا ہے) سطحی تناؤ کے باعث کھنچ کر دائری وضع اختیار کر لیتی ہے۔



شکل ۱

شکل ۲ کے مطابق پتلے دھاگے کا ایک حلقہ بنا کر صابون میں بھگو لو اور احتیاط کے ساتھ اس کو تار کے حلقہ پر بنی ہوئی صابون کی جھلی کے اوپر رکھ دو۔ دھاگے کے اندر کی جھلی کو سوئی سے توڑ دو تو دھاگا کھنچ کر ایک دائرے کی شکل اختیار کر لیتا ہے جس کو نقطہ دار خط سے دکھایا گیا ہے۔



شکل ۲

اسی طرح دھاگے کے متعدد چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں کو تار کے حلقہ کے مختلف نقطوں پر ڈھیلا باندھ کر جھلی کو توڑنے سے مختلف شکلیں حاصل ہو سکتی ہیں۔

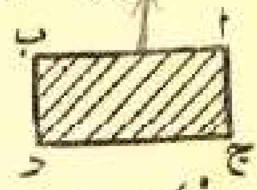
کسی جیلی نظام کی توانائی بالقوہ اقل ہو تو وہ تعادل کی حالت میں مستحکم طور پر ہوتا ہے۔ کسی دیئے ہوئے حجم کے لئے صرف کرہ کی سطح کا رقبہ اقل ہوتا ہے اسلئے لازمی طور پر مائع کا قطرہ کروی شکل اختیار کرے گا۔ اس صورت میں سطحی تناؤ کی وجہ توانائی بھی اقل ہوتی ہے۔

بچے اس طرح کھیلا کرتے ہیں کہ کسی نلی کے ایک سرے پر صابون کے محلول کی جھلی بنا کر دوسرے سرے سے پھونکتے ہیں تو صابون کا بلبلا کروی بنتا ہے۔ پانی سے بھرے ہوئے کسی برتن میں ایک شعری نلی ڈالدی جائے تو نلی کے

اندر پانی کی سطح بیرونی سطح سے بلند تر رہتی ہے۔ چونکہ نلی کی دیواروں کے قریب مائع کا سطحی تناؤ بہت کم ہوتا ہے اس لئے پانی شعری نلی میں اوپر چڑھ جاتا ہے۔

یہ سب سطحی تناؤ کی مثالیں ہیں۔

سطحی تناؤ اور سطحی توانائی :- فرض کرو کہ شکل ۳ کے مطابق ایک مستطیلی شکل کے تار ا ب ج د پر مائع کی ایک جھلی بنائی جاتی ہے۔ ا ب اوپر یا نیچے متحرک ہوسکتا ہے۔



شکل ۳

ا ب کو تعادل میں رکھنے کے لئے اس کے علی القوائم ایک قوت لگانی ہوگی۔ اس قوت کو جھلی کے ہر ایک رخ پر کے تناؤ کو تعادل میں رکھنا ہوگا۔ اس تناؤ کو مائع کا سطحی تناؤ کہتے ہیں یعنے مائع کی جھلی کی وجہ قوت فی اکائی طول مائع کا سطحی تناؤ کہلاتی ہے۔

$$\text{پس}\quad \text{س} = \frac{\text{ق}}{\text{۲ ا ب}}$$ جہاں س = سطحی تناؤ

اور ق = قوت

سطحی تناؤ کے ابعاد ا کمیت اور -۲ وقت ہیں۔

فرض کرو کہ ا ب، ج د سے منطبق ہو جاتا ہے، ایسی صورت میں قوت = س × ۲ ا ب

اور سطحی تناؤ سے کام جو کیا گیا = جھلی کی توانائی بالقوہ جو پہلے تھی = س × ۲ ا ب × ا ج اور اس صورت میں

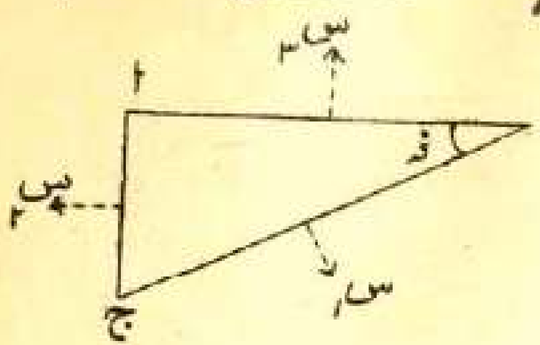
$$\text{س} = \frac{\text{جھلی کی توانائی بالقوہ}}{\text{۲ ا ب × ا ج}} = \frac{\text{جھلی کی توانائی بالقوہ}}{\text{جھلی کا رقبہ (اسکے دونوں رخ کا لحاظ کرکے)}}$$

لہذا کسی مائع کے سطحی تناؤ کی تعریف یوں کی جاسکتی ہے :-

"سطحی تناؤ وہ کام ہے جو مائع کی سطح میں ہم تپشی حالات کے تحت، اکائی

رتبہ کا اضافہ کرنے میں کیا جاتا ہے"۔

مائع کا سطحی تناؤ ہر جگہ ایک ہوتا ہے ①:- کسی مائع کی سطح کے تعادل پر غور کرو۔



شکل ۱۴۲

فرض کرو کہ ا ب ج اس سطح میں ایک قائم الزاویہ مثلث کی شکل کا ٹکڑا ہے (شکل ۱۴۲) اور ب ج، ج ا اور ا ب کے کناروں پر سطحی تناؤ بالترتیب س$_1$، س$_2$ اور س$_3$ ہے۔

ان تینوں کناروں پر عموداً عمل کرنے والی قوتیں بالترتیب س$_1$ (ب ج)، س$_2$ (ا ج) اور س$_3$ (ا ب) ہوں گی۔

ا ب کے علی القوائم سمت میں تحلیل کرنے سے :-

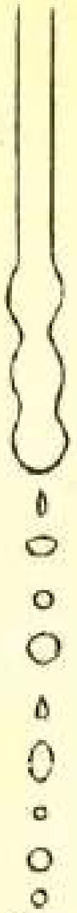
س$_3$ (ا ب) = س$_2$ (ا ج) مم فہ = س$_1$ (ب ج) جم فہ

∴ س$_1$ = س$_2$ = س$_3$

لہذا ہر جگہ سطحی تناؤ کی قیمت ایک ہی ہوتی ہے۔

کسی شکل کا ایک مثلثی یا مستطیلی ٹکڑا سطح پر لیکر اوپر کے نتیجہ کو ثابت کیا جا سکتا ہے۔

قطرے کے اہتزازات :- جس نلی کے سرے پر قطرہ بنتا ہے اس پر سے گرنے کے قبل کروی شکل کا نہیں ہوتا۔ اسکا انتصابی قطر افقی قطر کی بہ نسبت، نلی سے باہر نکلنے میں، بڑا ہو جاتا ہے۔ اس لمحہ میں جبکہ وہ نلی کے سرے سے علیحدہ ہوتا ہے اس کی شکل لیمو جیسی ہوتی ہے۔ خلا میں آزادانہ گرنے کے دوران میں اس پر جاذبہ زمین کا اثر چونکہ نظر انداز کئے جانے کے قابل ہوتا ہے لہذا اس وقت صرف سطحی تناؤ کا لحاظ کیا جاتا ہے۔ اس کی وجہ سے قطرہ



کی شکل ایک کامل کرہ کی سی ہو جاتی ہے (بارش کا قطرہ بھی ہوا میں سے جس کی لزوجت بہت چھوٹی ہوتی ہے، گرتے ہوئے یہی شکل اختیار کرلیتا ہے) - لہٰذا لیموں کی طرح بننے کے بعد، قطرہ کی شکل قلیل وقفہ کے لئے کُروی ہو جاتی ہے - چونکہ قطرہ کے ذرات میں سطحی قوتوں کے عمل سے توانائی اور معیار حرکت پیدا ہو جاتا ہے اس لئے ذرات ایک دوسرے کے اضافی نقطۂ نظر سے ساکن نہیں ہو سکتے - اسی وجہ سے زیادہ دیر تک قطرہ کی شکل کُروی نہیں رہ سکتی اور وہ چپٹا ہو کر تربوز کی شکل اختیار کرلیتا ہے - پھر یہی کیفیت دُہرائی جاتی ہے اور قطرہ مختلف شکلیں بدلتا ہے اور تھوڑی دیر کے لئے پھر کُروی شکل اختیار کرلیتا ہے - آخر کار ان تبدیلیوں میں بتدریج کمی واقع ہوتی ہے اور اندرونی رگڑ وغیرہ کی وجہ سے، یہ بالکل غائب ہو جاتی ہیں -

شکل ۵

شکل ۵ میں پانی کی ایک دھار بتائی گئی ہے جو ایک گول سوراخ میں سے ہو کر نکلی ہے - ابتدا میں یہ ایک مائع کے لمبے استوانہ کی شکل اختیار کرلیتی ہے لیکن بعد میں تعادل میں نہ ہونے کی وجہ سے اس کی گردنیں بننے لگتی ہیں اور وہ پھولنے لگتا ہے حتیٰ کہ جس طرح شکل میں دکھایا گیا ہے وہ متفرق قطروں میں منقسم ہو جاتا ہے - اسی شکل میں چھوٹے چھوٹے وہ قطرے بھی دکھائے گئے ہیں جو بڑے قطروں کے ٹوٹنے سے بنتے ہیں - اس پوری کیفیت کی عکسی تصویر لی گئی ہے

لارڈ کلون نے، پانی کے ایک قطرے کے اہتزاز کا وقت دوران حسابی طریقہ سے دریافت کیا ہے[۲] - (یعنی اس وقفہ کو دریافت کیا ہے جس میں قطرہ مختلف تبدیلیوں کے بعد پھر کروی شکل اختیار کرلیتا ہے) اور اس کی قیمت $\frac{۱}{۴}$ ص$^{۳/۲}$ دریافت کی گئی ہے، جہاں ص = قطرہ کا نصف قطر

کسی مائع کا ٹھوس یا کسی دوسرے مائع کی سطح پر پھیلنا (زاویہ تماس)

جب کبھی کسی مائع کا قطرہ ایک ٹھوس کی چکنی اور افقی سطح (مثلاً شیشہ کی تختی) پر رکھا جاتا ہے تو جو شکل وہ اختیار کرتا ہے اس کی نوعیت مختلف چیزوں پر منحصر ہوتی ہے۔ جتنا زیادہ وہ پھیلے گا اتنا ہی اس کا مرکز جاذبہ پست ہونے لگے گا، اور اُسی قدر اس کی تجاذبی توانائی کم ہونے لگے گی۔ لیکن قطرہ کے پھیلنے سے اس کا سطحی رقبہ بڑھنے لگتا ہے اور اسکے لئے کام کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔ تعادل کے لئے منتجاذبی توانائی کی ایسی کمی کا جو ایک چھوٹے سے رقبہ کے بڑھنے کی وجہ سے واقع ہوتی ہے، اس کام کے مساوی ہونا ضروری ہے جو سطح کے بڑھنے کے لئے درکار ہوتا ہے۔

اگر قطرہ چھوٹا ہو تو وہ کروی شکل اختیار کرلیتا ہے اور اگر وہ بڑا ہو تو ایک ایسی شکل اختیار کرلیتا ہے جو صابون کی ٹکیا کی طرح ہوتی ہے۔ دیکھو شکل ۶۔



شکل ۶

اس صورت میں ہمیں تین مختلف واسطوں پر غور کرنا ہوگا یعنی دوسرے الفاظ میں تین مختلف سطحی تناؤ کا لحاظ کرنا ہوگا۔ اول شیشہ اور ہوا کی تماسی سطح پر جس کو ہم س۱ سے تعبیر کریں گے غور کرنا ہوگا۔ دوم مائع اور ہوا کی تماسی سطح پر جس کی تعبیر س۲ سے کی جائے گی اور سوم مائع اور شیشہ کی تماسی سطح پر جس کو س۱۲ سے تعبیر کیا جائیگا۔

مائع کے تعادل کی حالت پر غور کرو جس پر سوائے سطحی تناؤ کے اور کوئی قوت عمل نہیں کرتی ہو۔ فرض کرو شکل ۷ میں ا ٹھوس کی، ب مائع کی اور ج ہوا کی تعبیر کرتا ہے اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ مائع اور ہوا کے درمیان سطح فاصل ق ن ہے اور م مٓ ٹھوس کی سطح ہے۔



شکل ۷

فرض کرو کہ زاویہ ق ن م = طہ

زاویہ (۱۸۰ - طہ) ٹھوس کے ساتھ مائع کا "زاویہ تماس" کہلاتا ہے۔
فرض کرو کہ مائع اور ہوا کی سطح فاصل ق ن، سے مقام قَ نَ میں آجاتی ہے جو ق ن کے متوازی ہے۔ اس ہٹاؤ سے، ٹھوس کی ایک دھجی پر جس کا عرض ن نَ ہے مائع پھیل جاتا ہے۔

فرض کرو کہ اس دھجی کا رقبہ سا ہے۔ ہٹاؤ کی وجہ سے توانائی میں تبدیلی اگر ہم ہر صورت پر علیحدہ غور کریں

تو (۱) ۲ اور ب کی درمیانی سطح میں رقبہ سا کے بڑھنے کی وجہ سے ہوگی اور
(۲) ب اور ج کی درمیانی سطح میں رقبہ سا جم طہ کے بڑھنے سے ہوگی اور
(۳) ۲ اور ج کی درمیانی سطح میں رقبہ سا کی کمی کی وجہ سے ہوگی۔

پہلی صورت پر غور کرنے سے ظاہر ہے کہ توانائی میں اضافہ = سا × س۲۱
اور دوسری صورت پر غور کرنے سے، توانائی میں اضافہ = س۲ سا جم طہ
اور تیسری صورت میں توانائی میں کمی = س۱ × سا

تعادل یا توازن کے لئے توانائی میں مجموعی اضافہ ہمیشہ توانائی میں مجموعی کمی کے مساوی ہونا چاہیئے۔

یعنی س۱ سا = س۲۱ سا + س۲ سا جم طہ

یعنی جم طہ = $\frac{س_1 - س_{21}}{س_2}$

ایسے پارہ میں جو شیشہ سے تماس کرتے ہوئے رکھا گیا ہو طہ کی قیمت = ۱۴۰°

ظاہر ہے کہ س۱ - س۲۱ کی قیمت مثبت، اور س۲ سے کم ہوگی۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ $\frac{س_1 - س_{21}}{س_2}$ کی قیمت + ۱ سے زیادہ اور - ۱ سے کم کسی حالت میں نہیں ہوسکتی۔ اگر ایسا ہو تو طہ کی قیمت مساوات پر صادق نہیں آتی اور اسی لئے کسی ٹھوس کی سطح پر قطرہ بننے کے بغیر مائع پوری طور سے پھیل

جاتا ہے۔

جب کسی مائع کا ایک قطرہ دوسرے مائع کی سطح پر رکھا جاتا ہے تو اسی طرح کے حالات واقع ہوتے ہیں۔ ایسی صورت میں $س_{12}$ سے، دونوں مائعوں کے درمیانی سطح کے سطحی تناؤ کی تعبیر ہوتی ہے۔

اوپر بیان ہو چکا ہے کہ $\frac{(س_1 - س_{12})}{س_2} < +1$

یعنی $س_1 < (س_{12} + س_2)$ اور $\frac{(س_1 - س_{12})}{س_2} > -1$

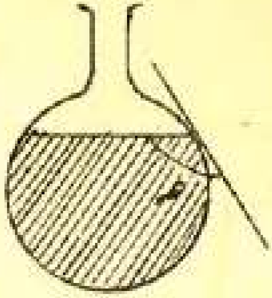
یعنی $س_1 + س_2 > س_{12}$

لہٰذا $س_1$، $س_2$ اور $س_{12}$ میں کے کسی دو مقداروں کا مجموعہ، تیسرے سے بڑا ہونا ضروری ہے۔ اس لئے ایک ایسے مثلث کا کھینچنا ممکن ہے جس کے ضلعوں کے طول $س_1$، $س_2$ اور $س_{12}$ کے مساوی ہوں۔ یہ مثلث نیومن کی مثلث کہلاتی ہے۔(۴۲)

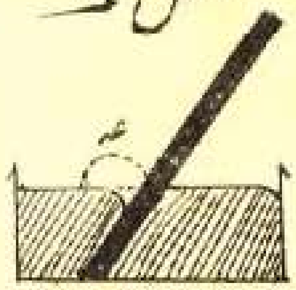
اگر کوئی دو مقداروں کا مجموعہ تیسرے سے کم ہو تو مثلث کا کھینچنا ناممکن ہوگا لہٰذا مائع کسی دوسری سطح پر قطرہ بننے کے بغیر پھیلنے لگتا ہے۔

زاویہ تماس دریافت کرنے کا طریقہ: ۔ کروی شکل کی ایک صراحی میں پارہ کو ڈالکر، شیشہ سے پارہ کا زاویہ تماس دریافت کیا جا سکتا ہے۔ اگر گہرائی کم ہو تو پارہ کی سطح محدب ہوتی ہے۔ اگر اور زیادہ پارہ بتدریج صراحی میں ڈالا جائے تو ایک خاص موقعہ پر اس کی سطح بالکل چپٹی ہو جاتی ہے اور پھر مقعر ہونے لگتی ہے۔ پارہ کی سطح سے (جبکہ وہ بالکل چپٹی ہوتی ہے) شیشہ کے ساتھ جو زاویہ منفرجہ بنتا ہے وہ زاویہ تماس عہ کہلاتا ہے۔ شکل ع۳ میں یہ زاویہ دکھایا گیا ہے۔ یہ گے لوزک کا طریقہ کہلاتا ہے۔

ایک اور سادہ ترین طریقہ یہ ہے کہ شیشہ کی ایک تختی لیکر اس کا کچھ حصہ



شکل عہ ۸



شکل عہ ۹

ایک پارے سے بھرے ہوئے برتن میں ڈبو دو اور شیشہ کو اتنا زاویہ بناتے ہوئے جھکاؤ کہ اس کے نیچے کی پارہ کی سطح بالکل مستوی ہو جائے ۔
(دیکھو شکل عہ ۹) شیشہ کی تختی پارہ کی افقی سطح سے جو زاویہ منفرجہ بناتی ہے وہ زاویۂ تماس عہ ہوگا۔

پانی کی سطح پر چکنائی کے پرت :۔

کافور کے چھوٹے چھوٹے ذرے لیکر پانی کی صاف سطح پر ڈالو تو عجیب طریقے سے وہ اِدھر اُدھر ناچنے لگتے ہیں۔ مارنگونی نے اس کی توضیح یوں کی کہ یہ عمل پانی میں کافور کے حل ہونے کی وجہ سے ہوتا ہے۔ کافور اور پانی کے محلول کا سطحی تناؤ خالص پانی کے سطحی تناؤ سے کم ہوتا ہے۔ کافور کے ہر ذرہ کے گرد پانی کی ہر ایک چھوٹی سطح کا سطحی تناؤ اطراف کے سطحی تناؤ سے کم ہوتا ہے اس لئے سطح کا یہ ٹکڑا اردگرد کی سطح سے باہر کھینچ کر نکالا جاتا ہے اور اسی وجہ سے کافور کے ذرے متحرک ہوتے ہیں۔ اگر پانی پر چکنائی یا تیل کی ایک پتلی سی جھلی موجود ہو تو کافور کے ذرّوں کی حرکت غائب ہو جاتی ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ تیل کی ایک پتلی سی جھلی پانی کے سطحی تناؤ کو اتنا کم کر دیتی ہے کہ کافور کے محلول سے سطحی تناؤ میں مزید کوئی کمی نہیں ہو سکتی۔

لارڈ ریلے نے تیل کی جھلی کی اُس موٹائی کو ناپا ہے جو پانی پر کافور کے ذروں کی حرکت کو روک دینے کے لئے کافی ہوتی ہے۔ اُس کی قیمت ۲×۱۰^{-۷} سمر ہوتی ہے لیکن $۱۰^{-۷}$ کی یا اس سے کم موٹائی کی جھلی کا،

پانی کے سطحی تناؤ پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ اسکا مطلب یہ ہے کہ اس موٹائی کی حد تک پانی کی سطحی تناؤ میں کمی نہیں ہوتی، لیکن اس کے بعد، سطحی تناؤ میں تیزی کے ساتھ کمی واقع ہونے لگتی ہے حتیٰ کہ موٹائی ۲×۱۰^{-۷} سم تک پہنچ جاتی ہے۔ جھلی کی موٹائی کی اس قیمت کے بعد سطحی تناؤ کی قیمت میں کمی بتدریج واقع ہوتی ہے۔ لارڈ ریلے نے بعض وجوہات کی بنا پر یہ رائے قائم کی کہ تیل کے ایک سالمہ کا قطر $۱۰^{-۷}$ سم ہے لیکن اس سے نصف موٹائی کے تیل کی جھلیوں کی تصدیق ہو چکی ہے جس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ تیل کے ایک سالمہ کا قطر $۱۰^{-۷}$ سم سے کم ہونا چاہیئے۔

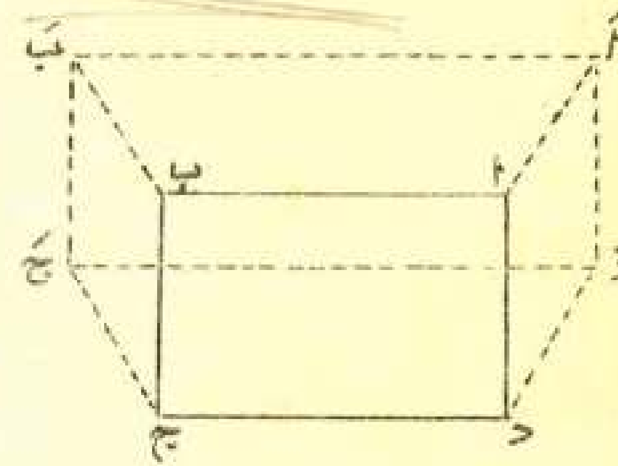
سمندر میں طوفان برپا ہو تو پانی کی سطح پر تیل یا چکنائی چھوڑ کر موجوں کو بڑی حد تک سکون میں لایا جا سکتا ہے۔ تیل والی سطح کے ایک حصہ پر جب ہوا چلتی ہے تو یہ تیل کو آگے ڈھکیلتی ہے اور پانی کی تقریباً خالص سطح کو پیچھے چھوڑ دیتی ہے چونکہ اسکا سطحی تناؤ تیل والی سطح کی بہ نسبت زیادہ ہوتا ہے اس لیئے اس سطح پر جس کو ہوا حرکت دیتی ہے، پیچھے کی طرف کھنچاؤ واقع ہوتا ہے اور آگے کی جانب موجوں کی حرکت رک جاتی ہے۔ کچھ موجیں اگر بنتی بھی ہیں، تو چکنائی دار سطح پر گزرتے ہوئے یہ روک دی جاتی ہیں اس کا سبب یہ ہے کہ موجی حرکت پانی کی سطح کی پرت میں کھنچاؤ پیدا کرنی چاہتی ہے اور ایک حصہ میں دیگر حصص کی بہ نسبت جہاں کہ چکنائی ہوتی ہے کسی لمحہ میں کھنچاؤ زیادہ ہوتا ہے۔ اس سے کم کھنچے ہوئے حصوں پر، زیادہ کھنچے ہوئے خصے کھنچاؤ کی قوت لگاتے ہیں۔ لہذا موجوں کی توانائی پانی کی سطح میں حرکت پیدا کرنے میں صرف ہو جاتی ہے۔

گیس اور مائع کی سطحوں کا تماس :- کسی مائع کے سطحی تناؤ کا انحصار اس گیس پر ہوتا ہے جو مائع کی سطح کے ساتھ تماس کرتی ہے۔ ریجنے اور شلیڈ کی رائے میں پانی کا

سطحی تناؤ جبکہ آبی بخار اس کی سطح سے مس کر رہا ہو صفر درجہ مئی تپش پر ۷۳ر۳ ڈائین فی سمر کے مساوی ہوتا ہے۔

اگر پانی کی سطح کا تماس ہوا کے ساتھ ہو تو صفر درجہ مئی پر سطحی تناؤ کی قیمت ۷۵ر۸ ڈائین فی سمر ہوتی ہے۔ اسٹاکل نے یہ دریافت کیا کہ پارہ کے سطحی تناؤ کی قیمت پارہ کے بخار کے ساتھ جب تماس ہو رہا ہو تو کم ہوتی ہے بہ نسبت اس قیمت کے جبکہ ہوا کے ساتھ تماس ہو رہا ہو (بشرطیکہ دونوں حالتوں میں تپش ایک ہی ہو۔) پارہ کے سطحی تناؤ کی قیمت کا انحصار جبکہ ہوا کے ساتھ اس کی سطح کا تماس ہو رہا ہو وقت کے اس عرصہ پر بھی ہوتا ہے جس میں کہ پارہ ہوا میں رکھا رہتا ہے۔

سطحی تناؤ، مائع کی سطح کا انحنا اور دباؤ "لاپلاس ⓾ کی مساوات":۔



شکل عـــ۱

اب ج د مستطیل شکل کا ایک بہت ہی چھوٹا عنصر مائع کی سطح پر لیا جاتا ہے (شکل عـــ۱)

جہاں اب = عہ

اور ب ج = بہ

(فرض کرو)

نیز یہ فرض کرو کہ مائع کی سطح کے دونوں رخوں کے درمیان فرق دباؤ = د

فرض کرو کہ اب عنصر مذکور بیرونی جانب سطح کے علیٰ القوائم ایک

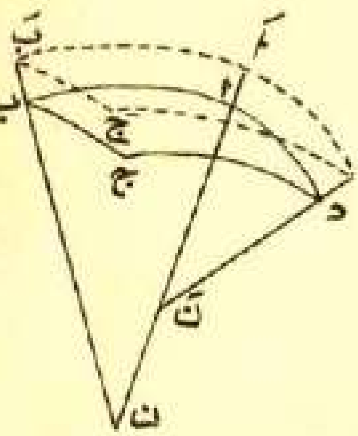
چھوٹا سا فاصلہ فرما طے کرتا ہے اس کے نئے مقام کو اَ بَ جَ دَ سے تعبیر کرو۔ جہاں اَ بَ = عہَ اور بَ جَ = بہَ۔

دباؤ نے جو کام کیا = د × عہ × بہ × فرما

سطحی تناؤ نے جو کام کیا = س (عہَ بہَ − عہ بہ)

تعادل کے لئے یہ ضروری ہے کہ د عہ بہ فرما = س (عہَ بہَ − عہ بہ) ..... (۱)

چونکہ عنصر ا ب ج د منحنی سطح کا ایک حصہ ہے۔

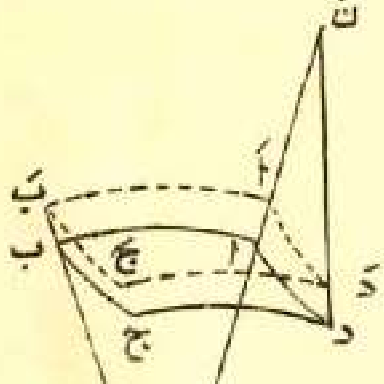


شکل ۱۱

لہٰذا اَ بَ جَ دَ کی سطح بھی منحنی ہوگی جیسا کہ شکل ۱۱ میں دکھایا گیا ہے۔

ا اور ب پر کے سطح کے عمود ن پر اور ا اور د پر کے سطح کے عمود نَ پر متقاطع ہوتے ہیں، نقاط ن اور نَ سطح کے مقابل جانب بھی ہو سکتے ہیں جیسا کہ شکل ۱۲ میں دکھایا ہے۔

شکل ۱۱ پر غور کرو:۔



شکل ۱۲

چونکہ مثلث ا ب ن اور اَ بَ ن متشابہ ہیں لہٰذا

$$\frac{\text{ب ا}}{\text{ب ن}} = \frac{\text{بَ اَ}}{\text{بَ ن}}$$

یعنی $\text{عہَ} = \text{عہ} \cdot \frac{(\text{صف}_1 + \text{فرما})}{\text{صف}_1}$ ..... (۲)

جہاں صف_1 = ب ان = ا ب کا نصف قطر انحنا۔

اسی طرح مثلث ا د ن اور ا' د' ن' چونکہ ایک دوسرے کے متشابہ ہیں

$$\therefore\ \text{بہ'} = \frac{\text{بہ}(\text{ص}_2 + \text{فرما})}{\text{ص}_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

جہاں ص_2 = ا ن = ا د کا نصف قطر انحنا۔

چونکہ عنصر زیر غور بہت چھوٹا ہے لہٰذا شکل ۱۱ میں ا ب ج د اور ا' ب' ج' د' کو ہم مستطیل شکلیں تصور کر سکتے ہیں۔

∴ مساوات (۲) اور (۳) سے :-

$$\text{عہ'}\ \text{بہ'} = \frac{\text{عہ}\ \text{بہ}}{\text{ص}_1 \text{ص}_2} \left\{ (\text{ص}_1 + \text{فرما})(\text{ص}_2 + \text{فرما}) \right\}$$

ص_1 اور ص_2 کے مقابلہ میں اگر فرما بہت چھوٹا ہو تو $\frac{(\text{فرما})^2}{\text{ص}_1 \text{ص}_2}$ کو ہم نظر انداز کر سکتے ہیں۔

$$\therefore\ \text{عہ'}\ \text{بہ'} = \frac{\text{عہ}\ \text{بہ}}{\text{ص}_1 \text{ص}_2} \left\{ \text{ص}_1 \text{ص}_2 + \text{ص}_1\ \text{فرما} + \text{ص}_2\ \text{فرما} \right\}$$

$$= \text{عہ}\ \text{بہ} \left\{ ۱ + \frac{\text{فرما}}{\text{ص}_2} + \frac{\text{فرما}}{\text{ص}_1} \right\} \quad \ldots\ldots (۴)$$

اوپر کی مساواتوں (۱) اور (۴) سے :-

$$\text{د}\ \text{عہ}\ \text{بہ}\ \text{فرما} = \text{س} \left[\text{عہ}\ \text{بہ}\ \text{فرما} \left(\frac{۱}{\text{ص}_2} + \frac{۱}{\text{ص}_1} \right) \right]$$

$$\therefore\ \text{د} = \text{س} \left(\frac{۱}{\text{ص}_1} + \frac{۱}{\text{ص}_2} \right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

اسی طرح شکل ۱۲ پر غور کرنے سے ہمیں $\text{عہ'} = \text{عہ}\left(\frac{\text{ص}_1 + \text{فرما}}{\text{ص}_1}\right)$

اور $\text{بہ'} = \text{بہ}\left(\frac{\text{ص}_2 - \text{فرما}}{\text{ص}_2}\right)$ حاصل ہوتے ہیں

$$\text{چنانچہ}\ \text{عہ'}\ \text{بہ'} = \text{عہ}\ \text{بہ} \left\{ ۱ - \frac{\text{فرما}}{\text{ص}_2} + \frac{\text{فرما}}{\text{ص}_1} \right\}$$

اب مساوات (۱) میں درج کرنے سے :-

$$د = س\left[\frac{1}{ص_1} - \frac{1}{ص_2}\right] \quad \text{......... (۶)}$$

اگر نصف قطر انحنا مثبت اُس صورت میں فرض کیا جائے جبکہ انحنا کا تناظر مرکز، مائع کی سطح کے اس جانب ہو جہاں دباؤ زیادہ ہے، اور منفی اس صورت میں جبکہ انحنا کا مرکز سطح کے اس جانب ہو جہاں دباؤ کم ہے، تو دونوں صورتوں میں عام مساوات حسب ذیل ہوگی۔

$$د = س\left(\frac{1}{ص_1} + \frac{1}{ص_2}\right) \quad \text{......... (۷)}$$

یہ مساوات عملی مسائل کے حل کرنے میں نہایت اہم ہے۔

اگر سطح کروی ہو تو $ص_1 = ص_2$

یعنی اس صورت میں $د = \frac{۲س}{ص_1}$

اگر سطح استوانہ نما ہو تو $ص_2 = \infty$

یعنی اس صورت میں $د = \frac{س}{ص_1}$

اگر د = صفر یعنی جھلی کے دونوں رخوں کے درمیان دباؤ میں کوئی فرق نہ ہو تو $ص_1 = -ص_2$ اس کی عملی طور پر تصدیق کرنے کے لئے دو مساوی ناپ کی قیفیں لو اور ان کے چوڑے کناروں کے درمیان صابون کی ایک جھلی اس طرح بناؤ کہ دونوں قیفوں کے کنارے ایک دوسرے کے متوازی اور ان کے مستوی ان کے مرکزوں کو ملانے والے خط کے علی القوائم رہیں (جس طرح کہ شکل ع۱۳ میں دکھایا گیا ہے)

چونکہ قیفوں کے سرے گرد ہوائی کے دباؤ کے لئے کھلے ہوئے ہیں لہٰذا قیفوں کے اندرونی اور بیرونی دباؤ یکساں ہوں گے۔



شکل ع۱۳

∴ ص۱ = - ص۲ شکل میں نقطہ دار خطوط سے واضح طور پر بتایا گیا ہے۔

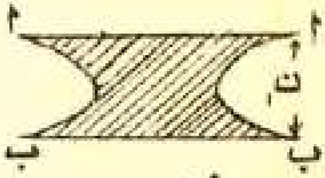
اب ایک قیف کی نلی کو بند کر دو اور دوسری قیف کی نلی سے دباؤ کو اس طرح ترتیب دو کہ جھلی اسطوانہ نما ہو جائے۔ دونوں قیفوں کو علیحدہ کر دو لیکن اس امر کا خیال رکھو کہ جھلی کی شکل ہر حالت میں اسطوانہ نما ہے۔ اس طرح اس اسطوانہ کا اعظم طول دریافت کرو جو بغیر ٹوٹے قائم رہ سکتا ہے۔ اس سے یہ ثابت ہوگا کہ اسطوانہ کا یہ اعظم طول قیف کے کنارے کے دَور یا اس اسطوانہ کے محیط سے کسی حالت میں بھی بڑھ نہیں سکتا، اگر ذرا سا بھی زیادہ کر دیا جائے تو اسطوانہ نما جھلی فوراً پھٹ جائے گی۔

پروفیسر بائز اور پروفیسر رکر نے نہایت ہی عمدگی سے اس تجربہ کو دکھایا تھا۔

اسی طرح یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ مختلف شکلوں کی جھلیاں چند خاص خاص شرائط کے تحت قائم رہ سکتی ہیں۔

سطحی تناؤ کے باعث دو متوازی تختیوں کے درمیان قوت (۵۵) :-

شکل ۱۴۷ میں ا اور ب دو متوازی تختیاں ہیں، ان کے درمیان ایسا مائع موجود ہے جس سے تختیاں بھیگ جاتی ہیں، اگر تختیوں کے درمیان فاصلہ ن۱ اور مائع سے بھیگے ہوئے حصہ کے رقبہ کا قطر ن۲ ہو تو مائع کی آزاد سطح پر نصف قطر انحنا + ن۱/۲ اور - ن۲/۲ ہونگے لہٰذا مساوات (۷) سے کرہ ہوائی کے دباؤ اور جھلی کے اندر کے دباؤ میں فرق ذیل کی مساوات کے مطابق ہوگا:-



شکل ۱۴۷

$$د = ۲ س \left(\frac{۱}{ن_۱} - \frac{۱}{ن_۲} \right)$$

اگر ن۱ کی قیمت ن۲ کے مقابلہ میں بہت چھوٹی ہو

$$\text{تو}\quad \text{د} = \frac{2\,\text{س}}{\text{ن}_1}$$

اگر جھلی سے بھیگے ہوئے حصہ کا رقبہ سا ہو تو قوت جو ا کو ب کی طرف دبائے گی حسب ذیل ہوگی۔

$$\text{قوت} = \text{د}\,\text{سا} = \frac{2\,\text{س}\,\text{سا}}{\text{ن}_1} \quad \ldots\ldots (8)$$

اس سے ظاہر ہے کہ قوت، تختیوں کے درمیانی فاصلہ سے معکوس اور تختیوں کے رقبہ سے راست تناسب رکھتی ہے۔ لہذا شیشہ کی دو متوازی تختیوں کے درمیان، پانی کا قطرہ رکھا جائے تو چونکہ ن۱ کی قیمت گھٹ جاتی ہے اور سا کی قیمت بڑھ جاتی ہے اس لئے تختیاں زیادہ قوت سے ایکدوسرے کی طرف کھنچ آئیں گی۔

مثال:- پانی کے ایک قطرہ کو جس کا وزن ۰ء۱ گرام ہے دو متوازی مستوی شیشہ کی تختیوں کے درمیان داخل کیا جاتا ہے۔ اگر دونوں تختیوں کے درمیان فاصلہ ۰ء۰۰۱ سمر ہو تو کتنی قوت عمل کرے گی؟

چونکہ پانی کا قطرہ تختیوں کے درمیان ایک خاص رقبہ والے مدور قرص کی شکل میں پھیل جاتا ہے اس لئے فرض کرو کہ پانی سے تختیوں کا جو حصہ بھیگتا ہے اس مدور قرص کا رقبہ سا ہے۔ فرض کرو کہ اُس قرص کا نصف قطر ص ہے۔

$$\therefore \text{سا} = \pi\,\text{ص}^2$$

$$\text{یعنی قوت} = \frac{2\,\text{س}\,\pi\,\text{ص}^2}{\text{ن}_1}$$

چونکہ پانی کی کثافت ۱ ہے لہذا قطرہ کا حجم = ۰ء۱ مکعب سمر

جبکہ دونوں تختیوں کے درمیان فاصلہ = ن۱ تو قطرہ کا حجم =

$$= \text{ن}_1\,\pi\,\text{ص}^2 = 0.1 \ \text{مکعب سمر}$$

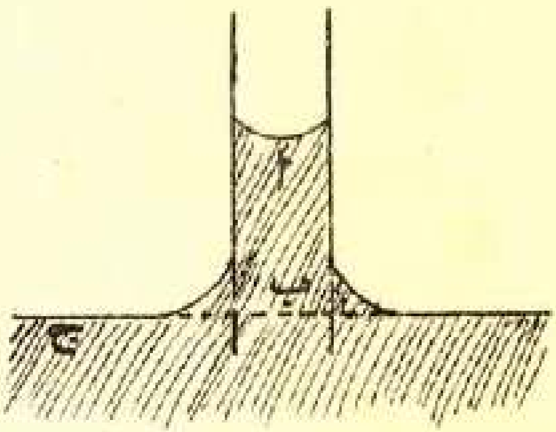
$$\text{یعنی}\ \pi\,\text{ص}^2 = \frac{0.1}{\text{ن}_1} = \frac{0.1}{0.001}\ \text{مربع سمر}$$

$$\therefore \text{قوت} = \frac{۷۵ \times ۲}{۱۰۰ر۰} \times \frac{۱ر۰}{۱۰۰۰ر۰۰}$$

$$= ۵ر۱ \times ۱۰^{۹} \text{ ڈائین}$$

متوازی تختیوں کے درمیان جذب یا دفع کا عمل :-

چھوٹے اجسام مثلاً کاک کے ٹکڑے یا لکڑی کے چھوٹے ٹکڑے جب کسی مائع کی سطح پر تیرتے ہیں تو ایک دوسرے کو جذب کرتے ہوئے ایک جگہ جمع ہو جاتے ہیں۔ یہ اس وقت ہوتا ہے جبکہ تمام اجسام یا تو مائع سے بھیگے ہوئے ہوتے ہیں یا بالکل خشک ہوتے ہیں۔ اگر ان میں سے ایک خشک اور دوسرا بھیگا ہوا ہو تو ایک دوسرے کو دفع کرتا ہے۔ اس کی توجیہ یہاں کی جائے گی۔



شکل ۱۵

شکل ۱۵ پر غور کرو۔ یہاں دو متوازی شیشہ کی تختیاں ایک ایسے مائع میں رکھی ہوئی دکھائی گئی ہیں جو ان کی سطح کو بھگوتا ہے۔ ان دونوں تختیوں کے درمیان مائع اپنی سطح سے اونچا رہتا ہے۔

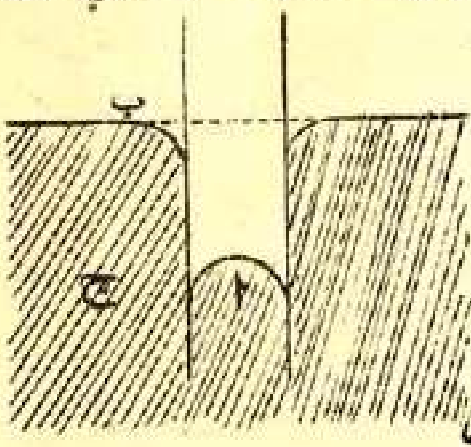
ج پر دباؤ = ب پر کے دباؤ کے (ہم سطح ہونے کی وجہ سے)
= کرہ ہوائی کا دباؤ

اور ب پر دباؤ = ا پر دباؤ ہلالی سطح کے ٹھیک نیچے + ا ب گہرائی کی وجہ دباؤ اس سے ظاہر ہے کہ ا پر کا دباؤ کرہ ہوائی کے دباؤ سے کم ہے۔ لہٰذا کرہ ہوائی کا دباؤ دونوں تختیوں کو ایک دوسرے کے قریب لانے کا تقاضا کرے گا۔ اس کے علاوہ تختیوں کے درمیان جو مائع موجود

ہے ایک منفی دباؤ ڈالے گا یعنی ایک تناؤ کی قوت ڈالے گا جس کے تحت تختیاں ایک دوسرے کو جذب کریں گی۔

اگر مائع تختیوں کو نہیں بھگوتا تو مائع کے اسطوانہ کا سرا اپنی سطح سے نیچے رہتا ہے۔ دیکھو شکل ۱۶ نتیجہ پھر بھی وہی رہتا ہے۔

مائع کی ہلالی سطح ۱ کے اوپر، کرہ ہوائی کا دباؤ ہوگا، اور ج پر مائع کا دباؤ (جو ۱ کے ہم سطح نقطہ ہے)

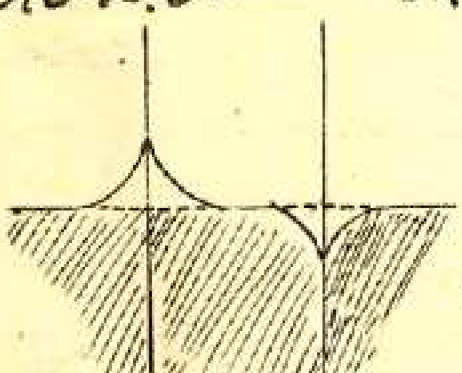


شکل ۱۶

= کرہ ہوائی کا دباؤ + ب ج گہرائی کی وجہ دباؤ۔

یعنی ج پر دباؤ ۱ پر کے دباؤ سے زیادہ ہے۔ لہذا مائع کا دباؤ جو تختیوں کو ایک دوسرے کے قریب ڈھکیلنے کی کوشش کرتا ہے، کرہ ہوائی کے دباؤ سے زیادہ ہوتا ہے اور اسلئے تختیوں کو ایکدوسرے سے علیحدہ کرنے کی کوشش کرتا ہے۔ اس وجہ سے تختیاں ایک دوسرے کو جذب کریں گی۔

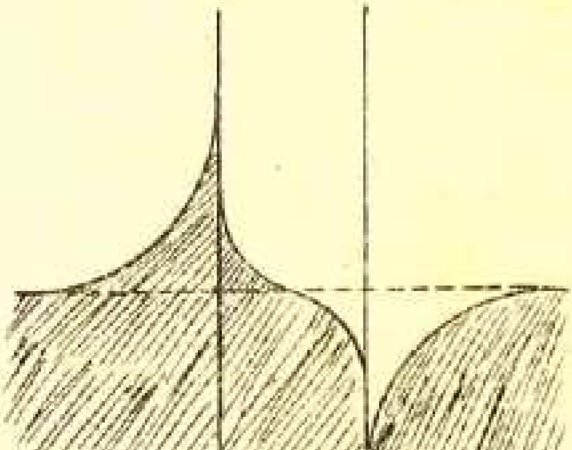
فرض کرو کہ دونوں تختیوں میں سے ہر ایک مختلف مادہ کی بنی ہوئی ہے اور اس میں سے ایک کو مائع بھگو سکتا ہے اور دوسری کو نہیں بھگو سکتا اور یہ بالکل خشک رہتی ہے اور تیز یہ بھی فرض کرو کہ دونوں تختیوں کے درمیان فاصلہ بہت زیادہ ہے۔ مائع کی سطح کی تراش شکل ۱۷ کے مطابق ہوگی۔ ایک تختی کے لئے سطح کے انحنا کی علامت



شکل ۱۷

ایک ہوگی اور دوسری تختی کے لئے اس کے متضاد ہوگی تختیوں کے درمیان مائع کی افقی سطح، بیرونی سطح کے برابر رہتی ہے۔ لہذا تختیوں کے درمیان نہ تو جذب کا عمل ہوتا ہے اور نہ تو دفع کا۔

فرض کرو کہ تختیاں ایک دوسرے کے قریب لائی جاتی ہیں۔ ان کے درمیان افقی سطح اب بدل جائے گی اور شکل ۱۸ کے مطابق ہوگی۔ اس صورت میں تختیاں ایک دوسرے سے علیحدہ ہونے لگیں گی۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ بھیگی ہوئی تختی میں اندر کی جانب مائع جس بلندی تک پہنچے گا وہ بیرونی جانب کی بلندی سے کم ہوگا اور خشک تختی سے اندرونی جانب مائع کی سطح جتنی نیچے اترے گی وہ بیرونی سطح سے کم ہوگی۔ بھیگی ہوئی تختی، خشک تختی سے



شکل ۱۸

سطحی تناؤ کی وجہ سے علیحدہ ہونے کی کوشش کرتی ہے۔ البتہ خشک تختی کی طرف بھیگی ہوئی تختی کو کھینچنے کا عمل سطحی تناؤ کا صرف افقی جزو کرتا ہے جو خود سطحی تناؤ سے کم ہوتا ہے۔ لہذا علیحدہ کرنے والی قوت کا عمل، قریب ڈھکیلنے والی قوت کے عمل سے زیادہ ہوتا ہے جس کی وجہ سے دونوں تختیوں میں دفع کا عمل ہوتا ہے۔

اگر دونوں تختیاں ایک دوسرے کے بالکل قریب رکھی جائیں تو دونوں کے درمیان مائع اوپر چڑھے گا اور دفع کے بجائے پھر جذب کا عمل ہونے لگے گا۔

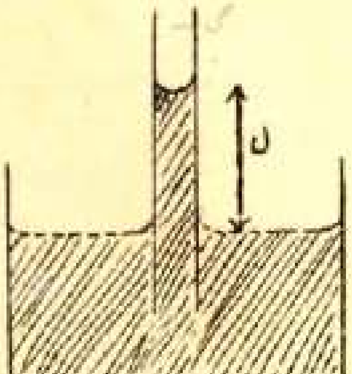
سطحی تناؤ معلوم کرنے کے طریقے

(۱) شعری نلی میں مائع کو چڑھا کر سطحی تناؤ کی دریافت :-

فرض کرو کہ شکل نمبر ۱۹ میں ایک شعری نلی کسی برتن میں مائع کے اندر انتصابی وضع میں رکھی ہوئی ہے اور سطحی تناؤ کی وجہ سے مائع نلی میں اوپر چڑھ گیا ہے اور شعری نلی کا نصف قطر = ص اور چڑھے ہوئے مائع کی بلندی = ل

شعری نلی میں مائع کے اوپر کی سطح ایک منحنی شکل اختیار کرے گی جو شکل میں بتلائی گئی ہے۔

دراصل ل = منحنی کے نچلے حصہ سے برتن میں مائع کی مستوی سطح تک طول سطحی تناؤ س کی سمت شکل نمبر ۲۰ میں بتلائی گئی ہے۔



شکل نمبر ۱۹

انتصابی وضع میں سطحی تناؤ = س جم فہ

لیکن منحنی کا طول = ۲ π ص

∴ قوت کا انتصابی جز = ۲ π ص س جم فہ

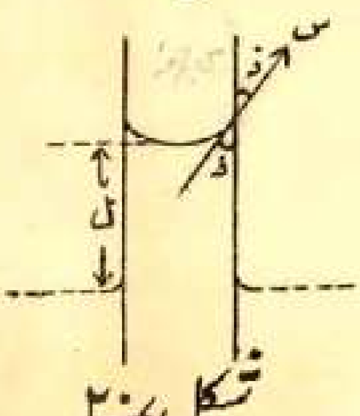
= پورے چڑھے ہوئے مائع کا وزن جو تعادل کی حالت پیدا کرتا ہے۔

اس چڑھے ہوئے مائع کا حجم = π ص² ل اسلئے کمیت = π ص² ل ث

جہاں ث = کثافت،

اسلئے وزن = π ص² ل ث ج

∴ ۲ π ص س جم فہ = π ص² ل ث ج



شکل نمبر ۲۰

پارے کی صورت میں فہ ۹۰° سے زائد ہے اس لئے جم فہ نفی ہو گا یعنی ل نفی ہو گا اس کا

مطلب یہ ہے کہ نلی میں اوپر چڑھنے کے بجائے پارہ نیچے کی جانب اوسط سطح سے زیادہ اوتر آئے گا۔

اگر مائع نلی کو بھگو دے تو فہ = صفر یعنی جم فہ = ۱

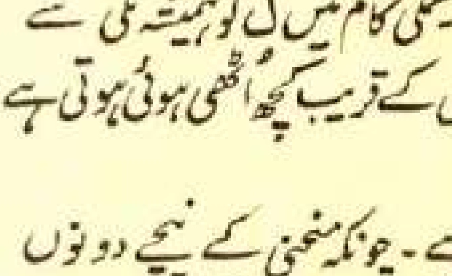
$$\therefore\ ۲\,\pi\,\text{ص}\,\text{س} = \pi\,\text{ص}^{۲}\,\text{ل ثہ ج}$$

$$\text{یعنی س} = \frac{\text{ص ل ج ثہ}}{۲}\text{، اگر پانی ہو تو ثہ} = ۱$$

$$\therefore\ \text{س} = \frac{\text{ص ل ج}}{۲} \quad\text{..................}\quad (۹)$$

تجربہ میں ل خوردبین سے ناپا جاتا ہے۔ عملی کام میں ل کو ہمیشہ نلی سے دور ہٹ کر ناپنا چاہیے (چونکہ مائع کی سطح نلی کے قریب کچھ اٹھی ہوئی ہوتی ہے اسلئے مستوی سطح سے ناپنا ہوتا ہے)

ل منحنی کے نچلے حصہ سے ناپا جاتا ہے۔ چونکہ منحنی کے نیچے دونوں جانب ہی تھوڑا سا کچھ مائع ہوتا ہے جیسا کہ شکل ۲۱ میں دکھایا گیا ہے اس لئے جواب صحیح حاصل ہونے کے لئے اُس مائع کے وزن کا تعین بھی ضروری ہے۔ اس وزن کو دریافت کرنے کے بعد نلی میں چڑھے ہوئے مائع کے وزن کو اس میں جمع کرلینا چاہیئے۔



شکل ۲۱

اسطوانے ا ب ج د کا حجم

$$= \pi\,\text{ص}^{۲} \times \text{ص} = \pi\,\text{ص}^{۳}$$

$$\text{اور نصف کرہ کا حجم} = \frac{۲}{۳}\,\pi\,\text{ص}^{۳}$$

اس لئے ان ٹکڑوں کا حجم جس میں مائع

$$\text{موجود ہے} = \pi\,\text{ص}^{۳} - \frac{۲}{۳}\,\pi\,\text{ص}^{۳}$$

$$= \frac{۱}{۳}\,\pi\,\text{ص}^{۳}$$

$$\therefore\ \text{اس مائع کا وزن} = \frac{۱}{۳}\,\pi\,\text{ص}^{۳}\,\text{ج ثہ}$$

$$\therefore\ \text{کل چڑھے ہوئے مائع کا وزن} = \pi\,\text{ص}^{۲}\,\text{ج ثہ ل} + \frac{۱}{۳}\,\pi\,\text{ص}^{۳}\,\text{ج ثہ}$$

$$= \pi\, \text{ص}^{2}\, \text{ج ثہ} \left(\frac{\text{ص}}{3} + \text{ل}\right)$$

$$= 2\pi\, \text{ص س جم فہ}$$

اگر مائع نلی کو بھگو دے تو فہ = صفر

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{ص ج ثہ} \left(\frac{\text{ص}}{3} + \text{ل}\right)}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

یہ صحیح ضابطہ ہے۔

(۱) ب۔ متوازی تختیوں کے ذریعہ سطحی تناؤ کی دریافت:۔

شعری نلی کے بجائے شیشہ کی دو متوازی تختیوں کو تصور کرو جن کا عرض اکائی ہے۔

فرض کرو کہ پہلے کی طرح مائع کے چڑھاؤ کی قیمت ل ہے۔ اگر دونوں تختیوں کے درمیان فاصلہ ن ہو تو چڑھے ہوئے مائع کا وزن = ج ل ثہ ن،

ایک جانب سے انتصابی وضع میں جو قوت عمل کرتی ہے وہ = س جم فہ

اسی طرح دوسری طرف سے بھی قوت س جم فہ عمل کرتی ہے۔ لہذا سطحی تناؤ کی وجہ سے پوری قوت جو کہ مائع کو تعادل کی حالت میں قائم رکھتی ہے

$$= 2\, \text{س جم فہ} = \text{ج ل ثہ ن}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{ج ل ثہ ن}}{2\, \text{جم فہ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

(۲) مائع کے قطرے کے اہتزاز سے سطحی تناؤ کی دریافت:۔

سطحی تناؤ کی قوت کے زیر اثر اگر قطرہ تعادل کی حالت میں ہو تو اس کی شکل کروی ہوگی۔ (دیکھو شکل ۲۲/۱)۔ اگر قطرے کو ابتدا میں کسی قوت سے اس کی کروی شکل کو بدل کر چھوڑ دیا جائے تو سطحی تناؤ کی وجہ سے تھوڑی دیر میں پھر وہ کروی وضع اختیار کرے گا۔ لیکن قطرہ کے اندر اس وقت چونکہ مائع حرکت کرتا رہتا ہے اس

لئے جمود کی وجہ سے قطرہ کی شکل پھر بدل جاتی ہے جیسا کہ شکل (۲۲ ب) سے ظاہر ہے۔ شکل کی یہ بتدریج تبدیلی اس وقت تک ہوتی رہتی ہے جب تک کہ سطحی تناؤ کی قوت اس کے مائع کے جمود پر غالب نہ آجائے۔ جب یہ قوت غالب ہو جاتی ہے تو پھر قطرہ کروی شکل اختیار کرنے لگتا ہے جیسا کہ شکل (۲۲ اَ) میں دکھایا گیا ہے۔ اس کے بعد فوراً پھر مائع کے جمود کی وجہ سے قطرہ کی شکل کوئی دوسری ہو جائے گی۔ پھر سطحی تناؤ کی قوت جب غالب ہوگی تو اپنی اصلی کروی حالت میں قطرہ عود کر آئے گا۔ اس کی مثال رقاص کی سی ہے۔



شکل ۲۲

جب یہ ایک دفعہ کسی قوت کے ساتھ حرکت میں لایا جاتا ہے تو وہ اہتزاز کرتا رہتا ہے۔ اس کو اپنی تعادل کی وضع پر آنے کے بعد رک جانا چاہیئے تھا لیکن رقاص کے جمود کے معیار اثر کی وجہ سے وہ ٹھہرنے کے بجائے اہتزاز کرتا رہتا ہے۔ اسی طرح کروی وضع میں قطرہ کو جو اس کی تعادل کی وضع تھی ٹھہر جانا چاہیئے تھا لیکن جمود کی وجہ سے اس کی شکل میں تبدیلی ہونے لگتی ہے اور اس طرح وہ کروی اور غیر کروی وضع میں بتدریج گردش کرتا رہے گا۔
وقت کا وہ وقفہ جو مائع کے قطرہ کو اپنی پہلی کروی وضع سے پھر دوسری مرتبہ اسی کروی وضع میں آنے کے لئے درکار ہوتا ہے وقت دوران یا وقت ارتعاش کہلاتا ہے جیسا کہ پہلے بیان کیا جا چکا ہے۔ شکل ۲۲ پر غور کرو۔ مقام ۱ میں پہلے قطرہ کروی وضع میں تھا۔ ایک خاص وقفہ کے بعد مقام ۱ پر پھر وہ کروی وضع اختیار کر لیتا ہے۔ اس خاص وقفہ کو وقت ارتعاش یا وقت دوران سے تعبیر کیا جاتا ہے۔
چونکہ و متناسب ہے مائع کی کثافت کے سطحی تناؤ اور قطرے کے نصف قطر کے اس لئے ابعاد کے ذریعہ سے ہم ایک ضابطہ حاصل کر سکتے ہیں:-

و ∝ [کثافت]^لا [سطحی تناؤ]^ہا [نصف قطر] یا

جہاں لا، ما، یا کوئی عدد ہیں۔

$$\therefore \text{و} \propto \left[\text{ک}\ \text{ص}^{-۳}\right]^{\text{لا}} \left[\text{ک}\ \text{و}^{-۲}\right]^{\text{ما}} \left[\text{ص}\right]^{\text{یا}}$$

جہاں ص = قطرہ کا نصف قطر

اور ک = قطرہ کی کمیت

$$\therefore \text{و} \propto \text{ک}^{\text{لا}}\ \text{ص}^{-۳\text{لا}}\ \text{ک}^{\text{ما}}\ \text{و}^{-۲\text{ما}}\ \text{ص}^{\text{یا}}$$

یعنے $\text{و} \propto \text{ک}^{(\text{لا}+\text{ما})}\ \text{ص}^{(-۳\text{لا}+\text{یا})}\ \text{و}^{(-۲\text{ما})}$

اس مساوات کو صحیح ہونے کے لئے

$-۲\text{ما} = ۱$، $-۳\text{لا} + \text{یا} = \text{صفر}$ اور $\text{لا} + \text{ما} = \text{صفر}$

یعنے $\text{ما} = -\frac{۱}{۲}$ $\therefore \text{لا} = \frac{۱}{۲}$ اور $\text{یا} = \frac{۳}{۲}$

$$\therefore \text{و} \propto \left[\text{ثہ}\right]^{\frac{۱}{۲}} \left[\text{س}\right]^{-\frac{۱}{۲}} \left[\text{ص}\right]^{\frac{۳}{۲}}$$

$\therefore \text{و} = \text{م}\ \text{ص}^{\frac{۳}{۲}} \sqrt{\frac{\text{ثہ}}{\text{س}}}$ جہاں م کوئی مستقل ہے اور ثہ مائع کی کثافت

لینارڈ نے م کی قیمت $\frac{\pi}{\sqrt{۲}}$ ماحرکیات کے ذریعہ حاصل کی

پس قطرہ کا وقت ارتعاش $\text{و} = \frac{\pi}{\sqrt{۲}} \cdot \sqrt{\frac{\text{ص}^۳\ \text{ثہ}}{\text{س}}}$ .... (۱۲)

اگر نصف قطر ص اور وقت دوران و معلوم ہو جائے تو مائع کا سطحی تناؤ س آسانی سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اگر پانی کے قطرہ کا نصف قطر ۰٫۰۰۲۵ سمر

ہوتو وہ ایک ثانیہ میں ۶۰ مرتبہ ارتعاش کرے گا۔

اگر پانی کے قطرہ کو کاربن ڈائسلفیڈ (CS_2) اور پٹرولیم کے آمیزہ میں جس کی کثافت پانی کی کثافت کے مساوی ہو ڈال دیا جائے تو صرف آنکھ کے ذریعہ ہم وقت ارتعاش معلوم کرسکتے ہیں۔ اسی طرح زیتون کے تیل کے قطرہ کو الکوہل اور پانی کے ایسے آمیزہ میں جس کی کثافت زیتون کے تیل کی کثافت کے مساوی ہو ڈالنے سے ہی وقت ارتعاش معلوم کیا جا سکتا ہے۔

لینارڈ نے قطروں کی عکسی تصویریں آناً فاناً کھینچ کر د کی قیمت معلوم کی ۔ اور اس کی مدد سے س کی قیمت دریافت کی۔ قطرہ کا نصف قطر خوردبین سے ناپا جا سکتا ہے۔

(۳) قطروں کی جسامت سے سطحی تناؤ کی دریافت :۔ فرض کرو کہ شکل ۲۳ میں ایک شعری نلی سے مائع کے قطرے گر رہے ہیں کسی قطرہ پر سطحی تناؤ کی وجہ سے جو قوت اوپر عمل کرتی ہے وہ $= ۲\pi$ ص س

جہاں ص = قطرہ کا نصف قطر یا شعری نلی کا نصف قطر اور دوسری قوت جو نیچے کی طرف عمل کرتی ہے = قطرہ کا وزن م + دباؤ کی وجہ سے قطرہ میں قوت

$$= \text{م} + \frac{\text{س}}{\text{ص}} \pi \text{ص}^2$$



شکل ۲۳

$$\therefore ۲\pi\,\text{ص}\,\text{س} = \text{م} + \text{س}\,\pi\,\text{ص}$$

$$\therefore \pi\,\text{ص}\,\text{س}\,(۲-۱) = \text{م}$$

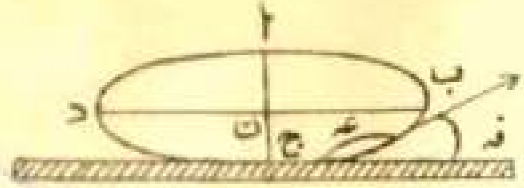
$$\therefore \text{س} = \frac{\text{م}}{\pi\,\text{ص}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۴)$$

م کی قیمت معلوم کرنے کے لئے کئی قطروں کو ایک ہی رفتار کے ساتھ آہستہ آہستہ ایک برتن میں گرنے دیا جاتا ہے۔ ان سب کا وزن معلوم کرنے کے بعد ایک قطرہ کا وزن دریافت کیا جاتا ہے۔

لارڈ ریلے نے π کی قیمت ۸ ر ۳ ۳ ر کہی تھی۔

(۴) کوینکے کے طریقے سے سطحی تناؤ کی دریافت:-

اگر پارہ کو شیشہ کی تختی پر رکھا جائے تو جیسا کہ پہلے ذکر ہوچکا ہے وہ ایک خاص طریقہ سے پھیل کر تختی سے تماس کرے گا۔ شکل عــ۲۴ میں زاویۂ تماس زاویہ عہ ہے جو (۱۸۰ - فہ) کے مساوی ہے۔ فرض کرو کہ قطرہ بہت بڑا ہے اور ب اور د قطرے کے بائیں اور دائیں جانب کے درمیانی حصہ میں۔ اگر قطرہ چھوٹا ہو تو ظاہر ہے کہ ۲ ن > ن ج ہے چونکہ انحنا اوپر ہوگا۔

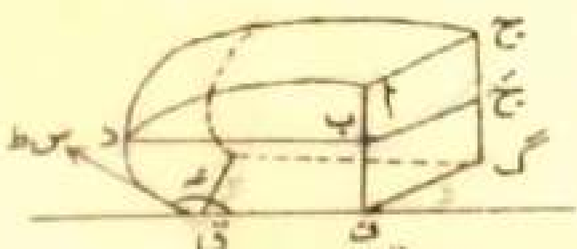


شکل عــ۲۴

اگر قطرہ کافی بڑا ہو تو اوپر کی سطح مستوی تصور کی جا سکتی ہے۔

اس بڑے قطرہ کو اس کے درمیان میں سے ایک ایسا ٹکڑا بناتے ہوئے کاٹو جس کے دو متوازی انتصابی مستویوں بج گ اور ۲ ف میں کوئی فاصلہ 'ط' رہے۔ یعنی گ ف = ط

اس ٹکڑے کے دو حصے اس طرح کرو کہ کٹے ہوئے ٹکڑے کو پھر اس کے طول کی سمت کے علی القوائم درمیان میں سے کاٹا جائے تو شکل عــ۲۵ کے مطابق ہو۔



شکل عــ۲۵

شکل عــ۲۴ سے مقابلہ کرنے سے اب = ۲ ن = ل (فرض کرو)

ب د کے اوپر کے حصہ والے افقی مستوی میں سطحی تناؤ کی وجہ سے قوت

= س ط

اور اوسط دباؤ = $\frac{1}{2}$ (ا ب) ج ثہ (کیونکہ آدھا ٹکڑا کاٹ دیا گیا ہے)

جہاں ثہ = کثافت

لہذا اوسط قوت انتصابی دیوار ا ج چ ب پر دائیں جانب سے بائیں جانب = $\frac{1}{2}$ (ا ب) ج ثہ × (ا ب) ط = س ط

∴ س = $\frac{1}{2}$ (ا ب)^2 ج ثہ .... (۱۴)

یعنی شکل ۲۵ میں ا ب یا شکل ۲۴ میں ا ن معلوم ہو جائے تو س کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہے اگر ہم پورے ٹکڑے ا د ق ف گ ج پر غور کریں

تو اس صورت میں سطحی تناؤ کی قوتیں = س[۵۱] ط + س ط جم عہ[۵۲]

∴ س ط (۱ + جم عہ) = $\frac{1}{2}$ (ا ف) ج ثہ × (ا ف) ط

= اوسط قوت دیوار ا ج گ ف پر دائیں جانب سے بائیں جانب

∴ س (۱ + جم عہ) = $\frac{1}{2}$ (ا ف)^2 ج ثہ .... (۱۵)

جہاں (ا ف) = قطرے کی پوری گہرائی جو خوردبین کے ذریعے ناپ لی جاتی ہے۔

[ا ب یا ا ن ناپنے کے لئے خوردبین کو د پر اس طرح ماسکہ میں لاؤ کہ اس کا انتصابی صلیبی تار اس حصہ کو مس کرے اور افقی صلیبی تار د پر منطبق ہو جائے۔ اسی طرح ا پر بھی ماسکہ میں لاؤ اور فاصلہ ا ب یا ا ن ناپ لو۔ اسی طرح مائع میں ڈوبے ہوئے مقعر عدسہ کی سطح کے نیچے ہوا کا ایک بلبلا بنا کر سطحی تناؤ کی قیمت ان ہی اصول پر دریافت کی جا سکتی ہے]

اگر س کی قیمت مساوات (۱۴) سے حاصل ہو جائے تو زاویہ عہ مساوات (۱۵) سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

---

[۵۱] قوت کی سمت شکل میں بتائی گئی ہے۔

[۵۲] قوت افقی وضع میں چونکہ نیچے کا ٹکڑا بھی لیا گیا ہے۔

سطحی تناؤ کی ان دونوں مساواتوں کو ایک دوسرے سے تقسیم کرنے سے :-

$$\frac{۱}{۱ + \text{جم عہ}} = \frac{(۲\,ب)^۲}{(۲\,ف)^۲}$$

$$\text{یعنی جم عہ} = \frac{(۲\,ف)^۲}{(۲\,ب)^۲} - ۱$$

بیگی نے اس طریقہ سے مختلف مائعات کے لئے شیشہ کے ساتھ زاویہ تماس عہ کی قیمتیں معلوم کیں۔

(۵) ولہلمی کے طریقہ سے سطحی تناؤ کی دریافت :- ایک صاف پلاٹینم کے تار کے ٹکڑے کو مستطیل کی شکل میں موڑ دو۔ فرض کرو کہ اسکا عرض = ل۔

اس تار کو ترازو کے ایک سرے پر لٹکا دو اور اس کو مائع میں اس طرح ڈبو دو کہ اس کے اوپر کی سطح مائع کی سطح کے قریب ہو جائے۔ اب ترازو کے دوسرے پلڑے میں اتنے باٹ ڈالو کہ تعادل قائم ہو جائے۔ اس کے بعد تار کو مائع میں پوری طرح ڈوبنے دو۔ مائع کی ایک جھلی تار پر قائم ہو جائے گی جبکہ تار اوپر کی طرف اوٹھے گا (دیکھو شکل ۲۶)۔ چونکہ جھلی کی وجہ سے سطحی تناؤ والی قوتیں نیچے کی طرف عمل کرتی ہیں اس لئے باٹوں میں اضافہ کرنا چاہئے تاکہ تعادل قائم ہو جائے۔

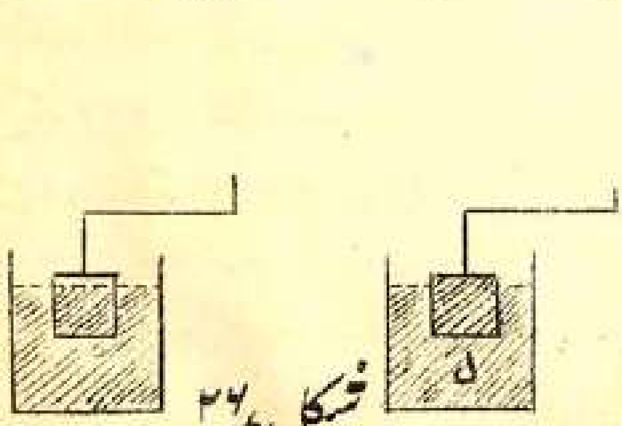
اگر تعادل قائم کرنے کے لئے اضافہ کمیت ک ہو تو

قوت = ک ج

اور دوسری قوت سطحی تناؤ کی وجہ سے = س ۲ ل

= ک ج

$$\therefore\ س = \frac{ک\,ج}{۲\,ل}$$



شکل ۲۶

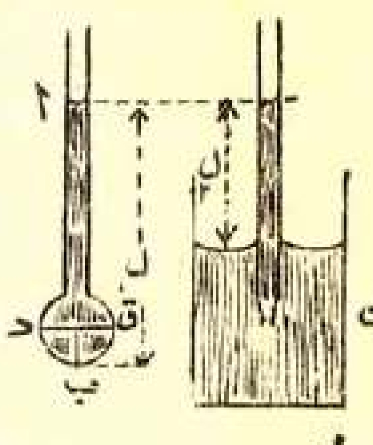
اس طرح تجربہ کو کئی بار دُھرانا چاہیئے اور ک کی اوسط قیمت لینی چاہیئے۔

[نوٹ۔ تار کو ابتدا میں ریگمال کاغذ سے خوب صاف کر لو اور پھر بنسنی شعلہ میں اچھی طرح گرم کرو۔ تجربہ کے دوران میں تار کے ٹکڑے کو دونوں صورتوں میں مائع کی سطح سے ایک ہی بلندی پر رکھنا چاہیئے۔]

(۶) سنِتس کے طریقے سے سطحی تناؤ کی دریافت :-

اس طریقہ میں شکل ۲۷ کے مطابق شعلہ پر ایک پتلی نلی کو گرم کرنے کے بعد کھینچ کر چھوٹے سوراخ والی بنا لیا جاتا ہے اور پھر اُس مائع میں جس کا کہ سطحی تناؤ دریافت کرنا مطلوب ہوتا ہے اس پتلی نلی کو ڈبو کر نکال لینے کے بعد ایک لوہے کے اسٹاند کے ذریعہ انتصابی وضع میں جکڑ دیا جاتا ہے۔ چونکہ مائع کی سطح نیچے اُترنے لگتی ہے اس لئے ایک قطرہ ق ب د آخر کار نلی کے سرے پر بننے لگتا ہے۔

قطرہ کی شکل کو کروی تصور کرتے ہوئے فرض کرو کہ اسکا نصف قطر = ص اور شعری نلی میں مائع کی ڈوری کا سرا ا اور قطرہ کے سب سے نچلے نقطہ ب کے درمیان فاصلہ = ل۱



شکل ۲۷

شعری نلی کو حرکت دیئے بغیر یہ فرض کرو کہ اس کا نچلا سرا ایک برتن ن میں رکھا جاتا ہے جس میں وہی مائع بھرا ہوا ہے۔ شعری نلی میں مائع کی ڈوری کی بلندی نیچے اُتر آئے گی لیکن برتن ن کو اوپر اُٹھانے سے شعری نلی میں مائع کی ڈوری کا سرا ابھر کر اس بلندی پر لایا جا سکتا ہے جتنا کہ پہلے تھا۔ فرض کرو کہ برتن میں مائع کی آزادانہ سطح اور شعری نلی میں مائع کی ڈوری کے سرے کے درمیان فاصلہ = ل۲

قطرہ میں ایک افقی مستوی ق د، ایسی کھینچو جو قطرہ کے مرکز میں سے گزرے تاکہ ب اور ق د کے مرکز کے درمیان فاصلہ ص ہو جائے۔

ق د سے ا تک (جو شعری نلی میں مائع کی ڈوری کا سرا ہے) فاصلہ = (ل$_1$ - ص) اس مستوی ق د پر عمل کرنے والی قوتوں پر غور کرنے سے یہ معلوم ہوگا کہ (ل$_1$ - ص) طول میں سے ل$_2$ طول کو وہ قوتیں سہارتی ہیں جو سطحی تناؤ کی وجہ سے اوپر کی جانب عمل کرتی ہیں۔

لہٰذا ق د پر دباؤ ڈالنے والا حاصل استوانہ = (ل$_1$ - ص - ل$_2$)

∴ ق د پر دباؤ = ج ثہ (ل$_1$ - ص - ل$_2$) جہاں ثہ مائع کی کثافت ہے۔

اس لئے ق د پر نیچے کی جانب عمل کرنے والی قوت =

= ج ثہ (ل$_1$ - ص - ل$_2$) π ص^2

لیکن ق د پر کرہ کا نصف وزن بھی نیچے کی جانب عمل کرتا ہے اور یہ

= $\frac{2}{3}$ π ص^3 ج ثہ

لہٰذا نیچے کی جانب مجموعی قوت =

ج ثہ (ل$_1$ - ص - ل$_2$) π ص^2 + $\frac{2}{3}$ π ص^3 ج ثہ

سطحی تناؤ کی وجہ قوت = س ۲ π ص

لہٰذا تعادل کے لئے:- ۲ π ص س =

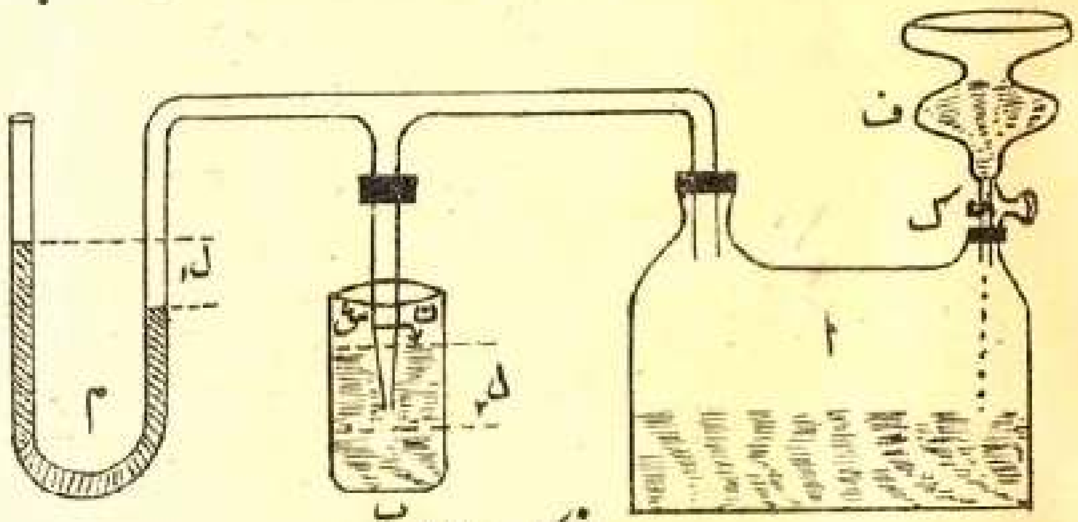
ج ثہ π ص^2 {(ل$_1$ - ص - ل$_2$) + $\frac{2}{3}$ ص}

∴ س = $\frac{\text{ج ثہ ص}}{2}$ {(ل$_1$ - ل$_2$) - $\frac{\text{ص}}{3}$} .... (۱۷)

متحرک خوردبین سے ل$_1$، ل$_2$ اور ق د = ۲ ص۔ ان سب کی قیمتیں ناپ لی جائیں تو س کی قیمت حسابی عمل سے دریافت کی جا سکتی ہے۔

(۷) اینیگر کے طریقہ سے سطحی تناؤ کی دریافت :- شکل ۲۸ میں ب ایک برتن ہے جس میں وہ مائع رکھا جاتا ہے جس کا سطحی تناؤ مطلوب ہوتا ہے۔

ش ایک سیدھی پتلی نلی ہے جس کا سرا شعری نلی کی طرح بنایا گیا ہے اور اس سرے کا قطر تقریباً ۳ر یا ۴ر مم ہے۔ ن ایک نمایندہ ہے جو مائع کی سطح کو بتاتا ہے۔ م ایک داب پیما ہے جس میں ذیلال یا اور کوئی مائع جس کی کثافت معلوم ہو، ڈال دیا جاتا ہے۔ ا ایک بوتل ہے جس میں ابتداءً ہوا کرہ ہوائی کے دباؤ پر رہتی ہے۔ ف ایک قیف ہے جس میں پانی بھر دیا جاتا ہے اور ک کاک کے ذریعہ نہایت ہی آہستہ آہستہ ا میں گرتا ہے۔



شکل ۲۸ ب

اس طریقے میں ہوا کے بلبلے اس مائع میں بنائے جاتے ہیں جس کا کہ سطحی تناؤ دریافت کرنا مطلوب ہوتا ہے۔ ظاہر ہے کہ جوں جوں پانی ف میں سے گرتا جائے گا ا کے اندر ہوا کے دباؤ میں اضافہ ہوگا جس کی وجہ سے شعری نلی کے سرے پر ہوا کا بلبلا بنے گا اور یہ ایک خاص گروی جسامت تک پہنچنے کے بعد ٹوٹ جائے گا اس کے ٹوٹنے کا سبب یہ ہے کہ اس کا اندرونی دباؤ، بیرونی دباؤ سے بڑھ جاتا ہے جب یہ بلبلا ٹوٹنے کو ہوتا ہے تو اس کا قطر اعظم قیمت پر پہنچ جاتا ہے اور اس قیمت سے کسی طرح بڑھ نہیں سکتا۔ اس کے ٹوٹنے کے لمحہ میں اس کے اندر کے دباؤ کی قیمت ظاہر ہے کہ ا کے اندر کے دباؤ کے مساوی ہوگی،

اور یہ دباؤ م میں مائع کی بلندیوں کا فرق پڑھ لینے سے معلوم کیا جا سکتا ہے، اور جب بلبلا ٹوٹتا ہے تو اس وقت ا میں کا دباؤ پھر کرۂ ہوائی کے دباؤ کے مساوی ہو جاتا ہے اور م میں کے مائع کی سطح ایک ہی بلندی پر آ جاتی ہے۔ اس کے بعد یہی عمل پھر اسی طرح دوہرایا جاتا ہے۔ دوبارہ جب بلبلا ٹوٹتا ہے تو داب پیما میں بلندیوں کے فرق کے مختلف مشاہدات لئے جاتے ہیں۔

فرض کرو کہ جوں ہی بلبلا ٹوٹتا ہے م کے مائع کی بلندیوں میں فرق = ل_1

بلبلے کے اندر دباؤ = $\pi + \text{ثہ}_1 \, \text{ج} \, \text{ل}_1$

جہاں π = کرۂ ہوائی کا دباؤ

ج = اسراع بوجہ جاذبہ زمین

اور ثہ_1 = م کے مائع کی کثافت

اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ بلبلے کے ٹوٹتے ہی شعری نلی ش کا سرا مائع کی سطح سے ل_2 فاصلہ نیچے رہتا ہے۔ دیکھو شکل ۲۸

تب بلبلے کے باہر دباؤ = $\pi + \text{ثہ}_2 \, \text{ج} \, \text{ل}_2$

جہاں ثہ_2 = اس مائع کی کثافت جس کا سطحی تناؤ دریافت طلب ہے۔

اب چونکہ بلبلا ٹوٹ گیا ہے اس کی وجہ یہ ہوئی کہ اندر کا دباؤ باہر کے دباؤ سے بڑھ گیا۔

لہذا بلبلے کے اندر اضافہ دباؤ = $(\pi + \text{ثہ}_1 \, \text{ج} \, \text{ل}_1) - (\pi + \text{ثہ}_2 \, \text{ج} \, \text{ل}_2)$

$= \text{ج} \, (\text{ثہ}_1 \, \text{ل}_1 - \text{ثہ}_2 \, \text{ل}_2)$

بلبلے کے لئے لاپلاس کے ضابطہ سے اندرونی دباؤ میں بیرونی دباؤ سے اضافہ $\text{د} = \text{س} \left(\frac{1}{\text{ص}_1} + \frac{1}{\text{ص}_2} \right)$

اگر بلبلا کروی شکل کا ہو تو $\text{ص}_1 = \text{ص}_2$

$\therefore \text{د} = \frac{2\,\text{س}}{\text{ص}_1}$ جہاں ص_1 = بلبلے کا نصف قطر

= تقریباً شعری نلی کے سرے کا نصف قطر

$$\therefore \text{د} = \frac{\text{۲س}}{\text{ص}_{1}} = \text{ج}\,(\text{ثہ}_{1}\,\text{ل}_{1} - \text{ثہ}_{2}\,\text{ل}_{2})$$

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{ج ص}_{1}}{\text{۲}}\,(\text{ثہ}_{1}\,\text{ل}_{1} - \text{ثہ}_{2}\,\text{ل}_{2}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۱۸})$$

تجربہ میں ل، ل اور ص متحرک خوردبین کے ذریعہ ناپ لئے جاتے ہیں۔ پس ان سے سطحی تناؤ س کی قیمت معلوم ہو جاتی ہے۔

اس طرح دب میں کے مائع کو مختلف تپشوں پر گرم کر کے اس مائع کے سطحی تناؤ کی قیمت معلوم کی جاتی ہے اور تپش کی وجہ سے اس پر جو اثرات ہوتے ہیں وہ دریافت کئے جا سکتے ہیں۔

کسی نمک کے مختلف ارتکاز کے محلول دئے ہوئے ہوں تو ان کے سطحی تناؤ بھی معلوم کئے جا سکتے ہیں اور ارتکاز کے جو اثرات سطحی تناؤ پر ہوتے ہیں وہ بھی دریافت کئے جا سکتے ہیں۔

اس تجربہ میں نقص یہ ہے کہ ہم بلبلے کو کروی وضع کا تصور کرتے ہوئے $\text{ص}_{1} = \text{ص}_{2}$ مانتے ہیں لیکن ٹھیک طور پر یہ کہا نہیں جا سکتا کہ ہمارا یہ مفروضہ صحیح ہے۔

اس میں ایک اور نقص یہ ہے کہ بلبلے کے نصف قطر کو ہم تقریباً شعری نلی کے سرے کے نصف قطر کے مساوی لیتے ہیں لیکن بلبلے کا نصف قطر اس کے ٹوٹتے وقت شعری نلی کے نصف قطر سے بڑا ہوتا ہے۔ اس کی تصحیح کے لئے دیکھو مساوات (۷۴)

اے فرگوسن نے کروی شکل وغیرہ فرض کرنے کے بغیر ایک صحیح ضابطہ اخذ کیا جو اوپر کے نقائص سے پاک ہے[10]:—

$$\text{س} = \text{ج گ} + \left\{ \frac{\text{ص}^{3}\ [illegible]}{\text{۱۲}\ [illegible]\ \text{گ}} \right\}$$

جہاں ص = شعری نلی کا نصف قطر

اور $گ = \frac{ص}{۲}\left[تہ_۱ ل_۱ - تہ_۲ ل_۲ + \frac{۲ ص}{۳} \right]$

(۸) **شعری موجوں کے ذریعہ سطحی تناؤ کی دریافت :-** پانی کی سطح پر کی موجیں دو قسم کی ہوتی ہیں، ایک کو شعری موج یا لہر کہتے ہیں جو کہ ہلکی ہلکی ہوا کے چلنے سے پیدا ہوتی ہیں اور دوسری جو بڑی دکھائی دیتی ہیں ان کو ارضی تجاذبی موجوں سے موسوم کیا جاتا ہے۔ شعری موجوں کا طول تقریباً ۱.۷ سم سے بھی چھوٹا ہوتا ہے اور ان کا حیطۂ ارتعاش بھی اسی طرح بہت کم ہوتا ہے۔ ذرات کی حرکت چونکہ سادہ موسیقی ہوتی ہے اس لئے ایسی موجوں کی تعبیر جیبی منحنی کی شکل سے ہوتی ہے۔ یہ موجیں پانی کے سطحی تناؤ کی وجہ سے پیدا ہوتی ہیں۔ جاذبۂ ارض کا اثر ان پر بالکل خفیف سا ہوتا ہے جو قابل نظر انداز ہے۔

ارضی تجاذبی موجوں کا طول اور حیطۂ ارتعاش کافی بڑا ہوتا ہے۔ ایسی موج میں ذرات کی حرکت کی سمت، موج کی روانی کی سمت کے علی القوائم ہونے کے علاوہ اس کے متوازی بھی ہوتی ہے۔ اس کا نتیجہ یہ ہوتا ہے کہ عمودی اور افقی حرکتوں کے ملنے سے ہر ایک ذرہ ایک خاص وضع کے ناقص کی شکل میں حرکت کرتا ہے گہرے پانی میں ان دونوں عمودی اور افقی حرکتوں کے حیطۂ ارتعاش مساوی ہوتے ہیں۔

چنانچہ موج کے راستہ میں ہر ایک ذرہ مساوی نصف قطر کے دائروں میں حرکت کرتا ہے۔ ذرات کی اس قسم کی حرکت سے پانی کی سطح جو شکل اختیار کرتی ہے وہ سائکلائڈ کی سی ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ شکل ع۲۵ میں ا ب ج د ہ ایک ایسی موج ہے جو جاذبۂ ارض کے باعث گہرے پانی میں پیدا ہوتی ہے۔ سہولت کی غرض سے منحنی کی شکل جیبی بنائی گئی ہے۔

موج سے پہلے پانی کی سطح ا ج ھ تھی۔ فرض کرو کہ موج کی رفتار س ہے اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ پانی کو اس کے مساوی رفتار مخالف سمت میں (یعنی -س) دے کر موجوں کو قائم کر دیا گیا ہے۔ اب حضیض اور اوج اپنے ابتدائی مقامات پر قائم رہیں گے



شکل ۲۹

صرف پانی بہہ کر چلا جائے گا۔ ب پر کے ذرات کی رفتار $= \frac{\text{۲}\pi \text{ا}}{\text{و}} + \text{س}$

جہاں ا = ذرات کے دائروں کا نصف قطر

اور و = موج کا وقت دوران

لہٰذا ان ذرات کی توانائی بالفعل $= \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \text{ک} \left(\frac{\text{۲}\pi \text{ا}}{\text{و}} + \text{س} \right)^{\text{۲}}$

جہاں ک = اس پانی کی کمیت جو ب پر ہے۔

اب چونکہ د پر کے ذرات ب پر کے ذرات کے مخالف سمت میں حرکت کر رہے ہیں۔

اس لئے اس کمیت کا پانی جب ب سے د پر پہنچے گا تو اس کی توانائی بالفعل

$$= \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \text{ک} \left(\frac{\text{۲}\pi \text{ا}}{\text{و}} - \text{س} \right)^{\text{۲}}$$

لہٰذا ب سے د پر پہنچنے میں توانائی بالفعل کی کمی =

$$= \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \text{ک} \left\{ \left(\frac{\text{۲}\pi \text{ا}}{\text{و}} + \text{س} \right)^{\text{۲}} - \left(\frac{\text{۲}\pi \text{ا}}{\text{و}} - \text{س} \right)^{\text{۲}} \right\}$$

$$= \frac{\text{۴}\pi \text{ک ا س}}{\text{و}}$$

اور توانائی بالقوہ میں اضافہ = ۲ ک ج ا   جہاں ج = اسراع بوجہ جاذبیت

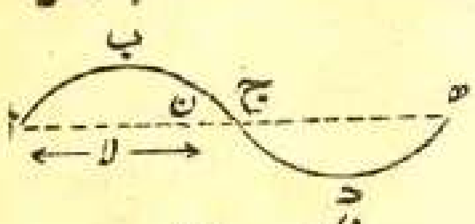
$\therefore$ بقائے توانائی کے کلیہ سے $\text{۲ ک ج ا} = \frac{\text{۴}\pi \text{ک ا س}}{\text{و}}$

یعنی $\text{س} = \frac{\text{ج و}}{\text{۲}\pi} = \frac{\text{ج ل}}{\text{۲}\pi \text{س}}$ جہاں ل = طول موج

$$\therefore \text{مر}^2 = \frac{\text{ج لہ}}{2\pi} \quad \ldots\ldots (19)$$

اب ہم شعری موجوں کی رفتار دریافت کریں گے جو کہ سطحی تناؤ کی وجہ سے پیدا ہوتی ہیں۔ جیسا کہ اوپر بیان ہو چکا ہے ان موجوں کو جیبی منحنی کی شکل سے تعبیر کر سکتے ہیں

فرض کرو کہ شکل نمبر ۳۰ میں ا ب ج د ھ ایک شعری موج ہے جس میں ا ج ھ پانی کی ابتدائی سطح ہے۔ ا سے لا فاصلہ پر کوئی ایک ذرہ ن سطح پر تصور کرو۔ تب ذرہ کا نقل مکان ما کسی ایک خاص وقت ت میں:-



شکل نمبر ۳۰

ما = ا جب سر لا ت

جہاں ا = حیطہ ارتعاش اور سر لا = زاوی رفتار

$$\text{یعنی ما} = \text{ا جب}\ \frac{2\pi\ \text{لا}}{\text{لہ}}$$

$$\text{یعنی}\ \frac{\text{فر}^2\ \text{ما}}{\text{فر لا}^2} = -\frac{4\pi^2\ \text{ما}}{\text{لہ}^2} \quad \ldots\ldots (20)$$

اب اگر موج کا حیطہ ارتعاش ذرا سا زیادہ ہو جائے تو نقطہ ن ایک چھوٹا فاصلہ بقدر فما اوپر کی طرف چڑھے گا۔ اس لئے ن کے قریب ایک چھوٹا سا پانی کا رقبہ عہ تصور کیا جا سکتا ہے۔

$$\text{سطح پر دباؤ کی مقدار} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$$ جہاں ص = سطح کا نصف قطر انحنا

$$\therefore \text{قوت} = \frac{\text{س عہ}}{\text{ص}}$$ یعنی ن کے اوپر چڑھنے کی وجہ سے کام $$= \frac{\text{س عہ ف}}{\text{ص}}$$

جاذبۂ ارض کی وجہ سے جو کام عمل میں آیا = عہ ف ثہ ج ما جہاں ثہ = پانی کی کثافت

$$\text{پس ان دونوں کی وجہ حاصل کام} = \text{عہ ف ثہ ج ما} - \frac{\text{س عہ ف}}{\text{ص}} \quad \ldots\ldots (21)$$

$$\text{لیکن}\ \frac{1}{\text{حں}} = \frac{\dfrac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}}{\left\{1+\left(\dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

اگر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ بہت چھوٹا ہو تو $\frac{1}{\text{حں}} = \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}$

$$= -\frac{4\pi^2\,\text{ما}}{\text{لہ}^2}$$

اب مساوات (۲۱) میں حں کی قیمت درج کرنے سے حاصل کام یا

$$\text{حاصل توانائی بالقوہ} = \text{عہ ف}\left(\text{ثہ ج ما} + \frac{4\pi^2\,\text{ما س}}{\text{لہ}^2}\right)$$

$$= \text{عہ ف ما ثہ}\left(\text{ج} + \frac{4\pi^2\,\text{س}}{\text{ثہ لہ}^2}\right)$$

اس سے ظاہر ہے کہ سطحی تناؤ کی وجہ سے ج میں جو اضافہ ہوا وہ $\frac{4\pi^2\,\text{س}}{\text{ثہ لہ}^2}$ کے مساوی ہے۔ صرف جاذبۂ زمین کے اثر کی وجہ سے کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔

لہذا جاذبۂ زمین اور سطحی تناؤ کے مشترکہ عمل سے جو موجیں بنیں گی ان کی رفتار مساوات (۱۹) میں ج کے بجائے $\left(\text{ج} + \frac{4\pi^2\,\text{س}}{\text{ثہ لہ}^2}\right)$ لکھنے سے حاصل ہوگی۔

$$\therefore\ \text{سر}^2 = \left(\text{ج} + \frac{4\pi^2\,\text{س}}{\text{ثہ لہ}^2}\right)\cdot\frac{\text{لہ}}{2\pi}$$

$$\therefore\ \text{سر} = \sqrt{\left\{\frac{\text{ج لہ}}{2\pi} + \frac{2\pi\,\text{س}}{\text{ثہ لہ}}\right\}}\ \ldots\ldots\ldots\ (۲۲)$$

جاذبۂ ارض کی موجوں میں لہ کے اضافہ سے سر کی قیمت بڑھے گی لیکن شعری موجوں میں لہ کے بڑھنے سے سر میں کمی واقع ہوگی۔

سر کو اقل ہونے کے لئے $\frac{\text{ج لہ}}{2\pi} = \frac{2\pi\,\text{س}}{\text{ثہ لہ}}$

لیکن شعری موجوں کے لیے مَا جب اقل ہوگا لہ اعظم ہوگا۔

∴ شعری موجوں کے لیے $\lambda_{\text{اعظم}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\text{س}}{\text{ج ث}}}$

اور ارضی موجوں کیلئے $\lambda_{\text{اقل}}$ = شعری موجوں کے لیے $\lambda_{\text{اعظم}}$

مساوات ۲۲ کے استعمال سے سب سے پہلے لارڈ ریلے نے مائع کا سطحی تناؤ کامیابی کے ساتھ معلوم کیا [11] اور اس کے بعد ڈاکٹر ڈارسے نے بھی اسی طریقہ سے مختلف محلولوں کے سطحی تناؤ کی قیمتیں معلوم کیں [12]۔

جس مائع کا سطحی تناؤ دریافت کرنا مطلوب ہوتا ہے اس کو ایک بڑے چپٹے برتن میں رکھا جاتا ہے۔ دوشاخے کی ایک شاخ سے ٹین یا الومنیم کی ایک پتلی دھجی باندھ دی جاتی ہے جس کا کچھ حصہ مائع میں اس طرح ڈوبا رہتا ہے کہ جب دوشاخہ مُرتعش کیا جاتا ہے تو شعری موجیں بننے لگتی ہیں، دوشاخہ کا تعدد ۶۰ کے قریب ہوتا ہے اور اس کو برقی طریقہ سے مرتعش کیا جاتا ہے۔

چونکہ ان موجوں کی رفتار بہت تیز ہوتی ہے اس وجہ سے وہ بالراست نظر نہیں آسکتیں لیکن غیر مسلسل نور کی شعاعوں سے (جن کی تنویری چمک کا تعدد، شعری موجوں کے پیدا کرنے والے مبدء کے تعدد کے مساوی ہو) ان کو دیکھا جائے تو یہ قائم موجوں کی طرح نظر آسکتی ہیں۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ جب مشاہد، مائع کی سطح کو غیر مسلسل طریقہ پر اس طرح سے دیکھتا ہے کہ اس کے دیکھنے کا تعدد، شعری موجوں کو پیدا کرنے والے دوشاخہ کے تعدد کے مساوی ہو، تو ایک مرتبہ دیکھنے کے بعد، پھر جب وہ دوسری مرتبہ دیکھے گا تو اس کے وقفہ میں موجیں ایک طول موج کے مساوی فاصلہ آگے بڑھیں گی اور اس طرح یہ اسی مقام پر ہوں گی جہاں ان سے پہلے کی موجیں تھیں۔ اس طرح موجیں ساکن نظر آئیں گی۔

اس غیر مسلسل طریقہ سے مائع کی سطح کو دیکھنے کا انتظام یوں کیا جاتا ہے کہ ایک اور دو شاخہ جس کا تعدد پہلے دو شاخہ کے تعدد کے مساوی ہونے کر اُسی برقی دور کے ذریعہ چلایا جاتا ہے جو پہلے دو شاخہ کو مرتعش کرتا ہے۔ اس دوسرے دو شاخے کے دونوں شاخوں کے ساتھ الومنیم کے دو پتلے ٹکڑے اس طرح باندھ دیئے جاتے ہیں کہ ان ٹکڑوں کی وجہ سے مائع کی سطح جبکہ دو شاخہ ساکن ہوتا ہے بالراست نہیں نظر آ سکتی، لیکن جب شاخیں انتہائی علیحدگی کے مقام پر ہوتی ہیں تو ان میں سے مائع کی سطح نظر آتی ہے۔ لہذا دو شاخہ کے ہر مکمل ارتعاش پر سطح کو دیکھا جائے تو موجیں ساکن نظر آتی ہیں۔ یہ اسی طرح کا عمل ہے جیسا کہ گردش نمائی طریقے سے دو شاخہ کا تعدد دریافت کرنے میں تیزی سے گھومنے والے قرص کے سوراخ، ساکن نظر آتے ہیں۔

طول موج تقسیمی پرکار یا ایسے ایک پیمانہ کے ذریعہ جو سطح پر ترتیب دیا جا سکتا ہے دریافت کیا جاتا ہے۔ پانی یا کسی دوسرے ہلکے مائع کی صورت میں اچھے نتائج حاصل کرنا ہو تو ایک برقی گولہ سطح سے دو یا تین گز اوپر رکھا جاتا ہے تاکہ موجیں واضح طور پر نظر آ سکیں۔ اگر دو شاخہ کا تعدد ع کے مساوی ہو تو مساوات (۲۲) سے

$$\text{سر} = \text{ع له} = \sqrt{\frac{\text{ج له}}{2\pi} + \frac{2\pi\,\text{س}}{\text{ث له}}}$$

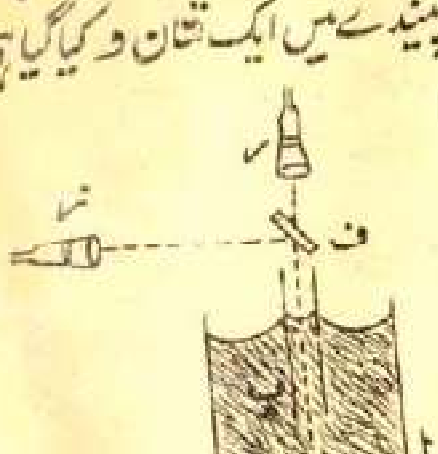
$$\therefore \text{س} = \frac{\text{ث له}^2}{4\pi^2}\left\{2\pi\,\text{ع}^2\,\text{له} - \text{ج}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (23)$$

اس ضابطہ سے س کی قیمت دریافت کی جا سکتی ہے۔

یہ طریقہ مختلف نمکوں کے محلول کے سطحی تناؤ، متفرق ارتکازوں پر، دریافت کرنے میں نہایت کارآمد ہوتا ہے۔

(۱۴۳)

(۹) اینڈرسن اور بوین کا طریقہ :- شکل نمبر ۲۱ پر غور کرو - اس میں ا ایک مستطیل شیشہ کا برتن ہے جس کے پیندے میں ایک تنان و کیا گیا ہے۔ شیشہ کی ایک نلی ب عموداً اس میں اس طرح رکھی گئی ہے کہ و اس کے محور پر (بشرطیکہ یہ خارج کیا جائے) واقع ہوتا ہے۔



شکل نمبر ۲۱

سا ایک خوردبین ہے جو افقی یا انتصابی سمتوں میں ہٹائی جا سکتی ہے۔ تجربہ میں خوردبین کو اس طرح ترتیب دیا جاتا ہے کہ و اس میں ماسکہ پر ہو اور اس کے کسر پیما کو پڑھ لیا جاتا ہے۔ جس مائع کا سطحی تناؤ دریافت کرنا ہو اس کو برتن ا میں ڈال دیا جاتا ہے۔ نلی ب میں مائع شکل نمبر ۲۱ کے مطابق ہوگا۔ خوردبین میں اب و کے خیال کو جو ہلالی سطح میں سے منعطف ہو کر بنتا ہے ماسکہ پر لایا جاتا ہے اور پھر کسر پیما کو پڑھ لیا جاتا ہے۔ اس کے بعد خوردبین میں نلی میں کے مائع کی اوپر کی ہلالی سطح کے مرکز کو ماسکہ پر لا کر کسر پیما کو آخری دفعہ پڑھ لیا جاتا ہے۔ کسر پیما کے ان مشاہدات سے ش اور خ یعنی شخص کے اور خیال کے فاصلے ہلالی سطح کے مرکز سے معلوم ہو جاتے ہیں۔ علم ہندسی مناظر سے

$$\frac{ن - ۱}{ص} = \frac{ن}{ش} - \frac{۱}{خ} \quad \text{.........(۲۴)}$$

جہاں ص = ہلالی سطح کا نصف قطر انحنا

اور ن = مائع کا انعطاف نما

اب اگر یہ فرض کیا جائے کہ کسی تراش عمودی پر ہلالی سطح کا انحنا ایک ہی

رہتا ہے تو اسکے دونوں رخوں پر فرق دباؤ $= \frac{\text{۲س}}{\text{ص}} = \text{ج ثہ ل}$ ...... (۲۵)

جہاں ثہ = مائع کی کثافت

اور ل = برتن ۲ میں مائع کی آزاد سطح سے ہلالی سطح کے مرکز کی بلندی۔

ان دونوں مساواتوں (۲۴) اور (۲۵) سے :-

$$\text{س} = \frac{\text{ج ثہ ل}}{\text{۲}} \left\{ \frac{(\text{ن} - \text{۱})}{\left(\frac{\text{۱}}{\text{ع}} - \frac{\text{ن}}{\text{س}}\right)} \right\} \text{.........(۲۶)}$$

اس سے س کی قیمت حسابی طریقہ سے معلوم کی جا سکتی ہے۔

اس طریقہ میں بعض مائعیات کے ہلالی سطحوں (مثلاً تارپین وغیرہ) کے مرکز کو خوردبین میں ماسکہ پر لانا بے حد دشوار ہوتا ہے۔ اس سے بچنے کے لئے انعکاس سے ایک اور خیال بنایا جاتا ہے۔ شکل ۳۱ب میں تنہا ایک توازی گر ہے جس میں سے نور کی متوازی شعاعیں شیشہ کی ایک چھوٹی تختی ف پر واقع ہوتی ہیں (ف نلی کے محور سے ۴۵° کا زاویہ بناتے ہوئے رکھا جاتا ہے) جہاں سے وہ ہلالی سطح کی جانب نیچے منعکس ہوتی ہیں اور ہلالی سطح کے مرکز سے $\frac{\text{ص}}{\text{۲}}$ فاصلہ پر نلی کے نیچے ایک خیال بناتی ہیں۔ یہاں چونکہ شعاعیں لامتناہی فاصلے سے (متوازی ہونے کی وجہ سے) آرہی ہیں۔

$$\text{لہذا ل}_{\text{۱}} = \frac{\text{ص}}{\text{۲}} + \frac{\text{ص}}{\text{ن} - \text{۱}}$$

$$\text{یعنی ص} = \frac{\text{۲}(\text{ن} - \text{۱})}{(\text{ن} + \text{۱})} \cdot \text{ل}_{\text{۱}} \text{ .... (۲۷)}$$

جہاں $\text{ل}_{\text{۱}}$ = منعطف اور منعکس خیالوں کے متناظر خوردبین کے کسر پیما والے مشاہدات میں فرق

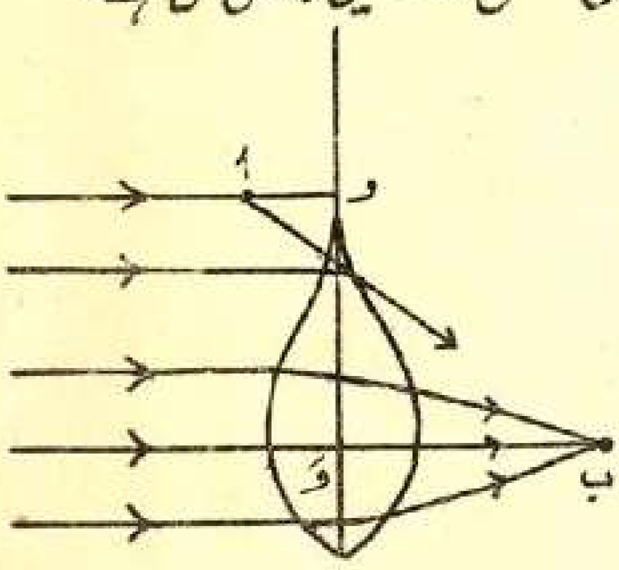
اسلئے مساوات (۲۵) اور (۲۷) سے :-

س = ج ثل { (ن−۱) / (ن+۱) } ل۱ .... (۲۸)

اس صورت میں خوردبین میں مائع کی ہلالی سطح کو ماسکہ پر لانے کی ضرورت باقی نہیں رہتی اور ضابطہ بھی پہلے سے زیادہ آسان ہے۔

کچھ دنوں بعد اینڈرسن اور یوئن نے ایک دوسرا طریقہ ان مائعات کے سطحی تناؤ کو معلوم کرنے کا دریافت کیا جو شیشہ کے ساتھ صفر زاویہ تماس بناتے ہیں۔

اگر تختے شیشہ کا ایک صاف مستطیلی شکل کا ٹکڑا لیکر کسی مائع میں ڈبویا جائے اور انتصابی مستوی میں اس طرح رکھا جائے کہ اس کے دو کنارے افقی رہیں، تو اس کے ساتھ ایک لمبا اسطوانہ نما مائع کا قطرہ چمٹ جائیگا۔ اس کے تراش عمودی کی شکل، شکل ۳۲ میں دکھائی گئی ہے۔



شکل ۳۲

قطرہ د دو اسطوانہ نما سطحے بناتا ہے جن میں سے ایک محدب (وَ مرکز) اور دوسرا مقعر (و مرکز) ہوتا ہے۔ عملاً مقعر سطحے کا صرف نچلا نصف حصہ موجود ہوتا ہے۔ اگر ایک توازی گر ایسا لیا جائے کہ اس کا محور بھی افقی اور چہری بھی افقی ہو اور قطرہ د کے بائیں طرف اس کو رکھا جائے تو شیشہ کی تختی پر متوازی شعاعیں عموداً اس سمت میں واقع ہوں گی جیسا کہ پیکان کے نشانوں سے شکل ۳۲

میں دکھلایا گیا ہے مقعر عدسہ، جھری کا ایک مجازی خیال ا پر بنائے گا جس کے مقام کو ایک خوردبین کے افقی صلیبی تار سے جو قطرہ کے داہنی جانب رکھا ہوا ہو، منطبق کیا جا سکتا ہے۔ اگر خوردبین کو اب فاصلہ و ا پیچھے ہٹایا جائے، تو شیشہ کی تختی کو اس کے ماسکہ پر لایا جا سکتا ہے۔ علی ہذا محدب عدسہ کی صورت میں جھری کا ایک حقیقی خیال ب پر بنتا ہے جس کا مقام بھی متعین کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ $\text{ف}_1 = \text{و ا}$ $\quad$ $\text{ف}_2 = \text{وَب}$

ل = و ا اور وَب کے درمیان عمودی فاصلہ

ص_1 = مقعر عدسے کے ہر رُخ کا نصف قطرِ انحنا یہ فرض کرتے ہوئے کہ انحنا ایک ہی ہے۔

ص_2 = محدب عدسہ کے ہر رُخ کا نصف قطرِ انحنا

د_1 = و پر مائع کا اندرونی دباؤ

اور د_2 = وَ 〃 〃 〃

چونکہ شعاعیں متوازی آرہی ہیں اور عدسوں کو بالکل پتلے فرض کیا جاتا ہے اس لئے

$$\frac{1}{\text{ف}_1} = (\text{ن} - 1)\frac{2}{\text{ص}_1} \quad \text{اور} \quad \frac{1}{\text{ف}_2} = (\text{ن} - 1)\frac{2}{\text{ص}_2}$$

اگر π کرہ ہوائی کا دباؤ ہو تو

$$\text{د}_2 - \pi = \frac{\text{س}}{\text{ص}_2} \quad \text{اور} \quad \pi - \text{د}_1 = \frac{\text{س}}{\text{ص}_1}$$

$$\therefore \text{د}_2 - \text{د}_1 = \text{س}\left(\frac{1}{\text{ص}_1} + \frac{1}{\text{ص}_2}\right)$$

$$= \frac{\text{س}}{2(\text{ن} - 1)}\left(\frac{1}{\text{ف}_1} + \frac{1}{\text{ف}_2}\right)$$

لیکن ج ث ل = $د_1 - د_2$

$$\therefore س = \frac{(ن-1)^2\ ج\ ث\ ل}{\left(\frac{1}{ف_1} + \frac{1}{ف_2}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲۹)$$

اگر شیشہ کی تختی کا صرف ایک ہی رُخ بھیگا ہوا ہو تو

$$س = \frac{(ن-1)\ ج\ ث\ ل}{\left(\frac{1}{ف_1} + \frac{1}{ف_2}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳۰)$$

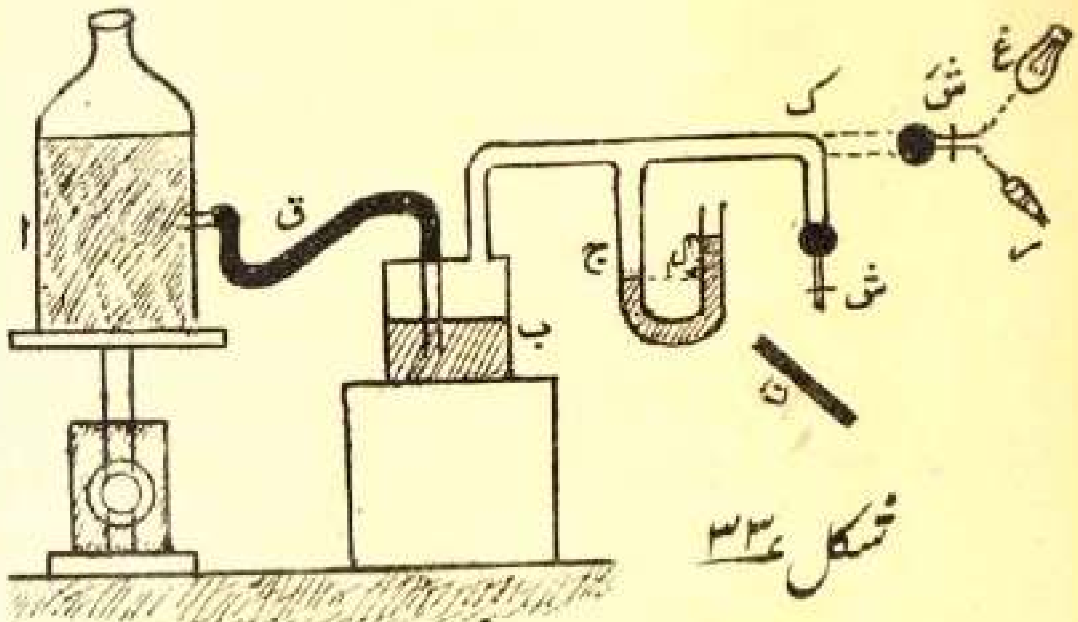
یہ طریقہ، تبخیر کی وجہ سے قطرہ کی شکل میں تغیرات ہونے سے، زیادہ صحیح نہیں ہے خصوصاً طیران پزیر مائعات کے لئے اس سے صحیح نتائج نہیں حاصل ہوتے اس لئے بہتر یہ ہے کہ مشاہدات بہت ہی تیزی کے ساتھ لئے جائیں۔

زیادہ لزج مائعات کے لئے بھی نتائج صحیح نہیں حاصل ہوتے چونکہ اس صورت میں قطرے زیادہ موٹے ہوتے ہیں اور پتلے عدسوں کا یہ ضابطہ ان پر صادق نہیں آتا۔

(۱۰) اے فرگوسن کے طریقہ سے سطحی تناؤ کی دریافت[۱۴] :-

اس طریقہ میں مائع کی بہت کم مقدار کی ضرورت ہوتی ہے یعنی تقریباً ایک مکعب ملی میٹر مائع بالکل کافی ہوجاتا ہے۔ آلات کی ترتیب بہت ہی سادہ ہوتی ہے جو شکل ۳۳ میں دکھائی گئی ہے۔ ۲ ایک شیشہ کی بوتل ہے جس میں پانی رکھا جاتا ہے۔ ق ایک ربر کی نلی ہے جو ایک برتن ب سے ملی ہوئی ہے۔ ۲ کو اونچا یا نیچا کرنے سے ب میں دباؤ بڑھایا یا گھٹایا جاسکتا ہے۔ ج ایک ل نما نلی کی شکل کا داب پیما ہے۔ ش ایک شعری نلی ہے جو انتصاباً رکھی ہوئی ہوتی ہے اور اس میں مائع کی ایک ڈوری لی جاتی ہے جس کا کہ سطحی تناؤ مطلوب ہوتا ہے۔ ن ایک مستوی آئینہ ہے جو شعری نلی کے نچلے سرے

کے قریب ۴۵ درجہ کا زاویہ بناتے ہوئے اس طرح رکھا جاتا ہے کہ شعری نلی کو آئینہ میں دیکھا جائے تو وہ افقی نظر آتی ہے (نوٹ۔ سردست، شکل کی داہنی

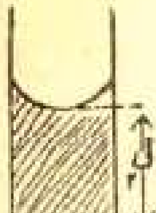


شکل ۳۳

جانب جو نقطہ دار خطوط دکھائے گئے ہیں ان پر کوئی غور نہ کیا جائے)۔ تجربہ میں بوتل ۱ کو اتنا اونچا رکھا جاتا ہے کہ مائع کی ڈوری شعری نلی میں نیچے ہٹائی جا کر اس کے کھلے سرے پر ہلالی سطح کا انحنا ٹھیک طور پر مستوی ہو جائے۔ ہلالی سطح کے مستوی ہونے کو جانچنے کے لئے ایک محدب عدسہ کے ذریعہ دس وولٹ کے ایک چھوٹے برقی لیمپ کے ریشہ کے خیال کو، ہلالی سطح میں دیکھا جاتا ہے۔ لیمپ کو ترچھی وضع میں نلی کے نیچے کسی مناسب فاصلہ پر اس طرح رکھا جاتا ہے کہ اس کے ریشوں کا خیال آئینہ ن میں نظر آنے لگے۔ جب ہلالی سطح مستوی ہوتی ہے تو ریشوں کا خیال جوڑا ہو کر نور کا ایک چھوٹا سا بقعہ بن جاتا ہے لیکن جب وہ محدب یا مقعر رہتی ہے تو ریشے واضح طور پر نظر آتے ہیں، یہ ایک بہت حساس طریقہ ہے۔ اور دباؤ کے اُن مشاہدات سے جو ہلالی سطح کو مستوی کرنے کے لئے درکار ہوتے ہیں، مائع کے سطحی تناؤ کی

قیمت معلوم ہو جاتی ہے۔

فرض کرو کہ شکل ۳۴ کے مطابق، مائع کا ایک چھوٹا طول $ل_۲$ ایک ایسی شعری نلی میں رکھا ہوا ہے جسکا نصف قطر $ص_۱$ ہے۔



شکل ۳۴

اوپر بیان ہو چکا ہے کہ کرہ ہوائی کا دباؤ اگر π ہو تو $د_۱$ دباؤ جو مائع کی ہلالی سطح کے عین نیچے واقع ہوتا ہے حسب ذیل ہے:-

$$د_۱ = \pi - ج\, ث_۲\, ل_۲$$

جہاں $ث_۲$ = مائع کی کثافت

اگر مائع کی ہلالی سطح کے ٹھیک اوپر دباؤ $د_ب$ ہو تو ہلالی سطح کے دونوں جانب فرق دباؤ لاپلاس کی مساوات سے حسب ذیل ہوگا:-

$$د_ب - د_۱ = \frac{۲\, س}{ص}$$

جہاں ص = ہلالی سطح کا نصف قطر انحنا

لیکن ہم کو یہ معلوم ہے کہ $د_ب = \pi + ج\, ث_۱\, ل_۱$

جہاں $ث_۱$ = داب پیما کے مائع کی کثافت۔

اور $ل_۱$ = جب ہلالی سطح مستوی ہوتی ہے تو داب پیما میں مائع کی بلندی

$$\therefore (\pi + ج\, ث_۱\, ل_۱) - (\pi - ج\, ث_۲\, ل_۲) = \frac{۲\, س}{ص}$$

$$یعنی\ س = \frac{ج\, ص}{۲}\left\{ث_۱\, ل_۱ + ث_۲\, ل_۲\right\} \quad .... (۳۱)$$

ایسے مائع کے لئے جسکا زاویہ تماس صفر ہوتا ہے مساوات (۴۷) میں یہ ثابت کیا جائے گا کہ $ص = ص_۱\left(۱ + \frac{ص_۱^۲}{۶ا^۲}\right)$ جہاں $ا^۲ = \frac{س}{ج\, ث_۲}$

ہم اگر ص کی قیمت مساوات (۳۱) میں لکھیں تو

$$س = \frac{ج\, ص_۱}{۲}\left\{ث_۱\, ل_۱ + ث_۲\, ل_۲\right\} + \frac{ج\, ث_۲\, ص_۱^۳}{۶} \quad ...... (۳۲)$$

اس مساوات سے ہم آسانی کے ساتھ دئے ہوئے مائع کے لئے س کی قیمت دریافت کر سکتے ہیں بشرطیکہ ہمیں مائع کی کثافت ثہ معلوم ہو۔ لیکن چونکہ مائع کی مقدار بہت تھوڑی سی ہے ثہ کی قیمت علیحدہ دریافت کرنا بیحد دشوار ہوتا ہے اس کے لئے دو راستے اختیار کئے جا سکتے ہیں۔ یا تو ڈوری $\text{ل}_{۲}$ کا طول کم کرنا ہوگا حتیٰ کہ $\text{ثہ}_{۲}\,\text{ل}_{۲}$ کی قیمت مساوات (۳۱) میں $\text{ثہ}_{۱}\,\text{ل}_{۱}$ کے مقابلہ میں نظر انداز کرنے کے قابل ہو جائے یا $\text{ل}_{۲}$ کو بدل بدل کر متعدد مشاہدات لینے ہوں گے۔

مساوات (۳۲) کو اس طرح لکھ سکتے ہیں:۔

$$\text{۲ س} = \text{ج ص}_{۱} \left\{ \text{ثہ}_{۱}\,\text{ل}_{۱} + \text{ثہ}_{۲}\,\text{ل}_{۲} + \frac{\text{ثہ}_{۲}\,\text{ص}_{۱}}{۳} \right\} \quad \ldots\ldots (۳۳)$$

$$\text{یعنی ل}_{۱} = -\frac{\text{ثہ}_{۲}}{\text{ثہ}_{۱}}\left(\text{ل}_{۲} + \frac{\text{ص}_{۱}}{۳}\right) + \frac{\text{۲ س}}{\text{ج ص}_{۱}\,\text{ثہ}_{۱}} \quad \ldots\ldots (۳۴)$$

ہم اگر $\text{ل}_{۱}$ کی $\left(\text{ل}_{۲} + \frac{\text{ص}_{۱}}{۳}\right)$ کے مقابلہ میں ترسیم کریں تو س کی قیمت بغیر ثہ کی قیمت معلوم کرنے کے منحنی سے آسانی کے ساتھ حاصل ہو جا سکتی ہے۔

اس کے بعد فرگوسن اور کنیڈی نے ایک نیا طریقہ اختیار کیا جو اس سے بہت آسان ہے اور نیز اس میں $\text{ثہ}_{۲}$ نظر انداز بھی کیا جا سکتا ہے[15]:۔

پھر شکل ۳۳ پر غور کرو۔ اب ک۔ سق کو چھوڑ دو اور شکل میں ک شق کو شامل کرلو۔ سق کو ہی اگلی شعری نلی ہے جس میں مائع کی ایک چھوٹی سی ڈوری افقی حالت میں رکھی ہوئی ہے۔ س ایک خوردبین ہے اور غ ایک چھوٹے "۱۰ اوولٹ" کی برقی لیمپ کا ریشہ یا سوت ہے۔

ابتدا میں مائع کی ہلالی سطح مقعر رہتی ہے اور جیسا اوپر بیان ہو چکا ہے دباؤ کے اضافہ سے یہ مستوی ہونے لگتی ہے اور پھر محدب۔ پہلے کی طرح دباؤ کو اس طرح ترتیب دو کہ ہلالی سطح مستوی ہو جائے۔ اس تجربہ میں شعری نلی کا نصف قطر بالکل چھوٹا ہونا چاہئے ورنہ جاذبہ ارض کی وجہ سے ہلالی سطح کی

شکل میں تبدیلی ہو جائے گی۔

مساوات (۳۴) سے انتصابی شعری نلی کی صورت میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ

$$\frac{2\,\text{س}}{\text{ج}\,\text{ص}_1} = \text{ثہ}\,\text{ل}_1 + \text{ثہ}_2\left(\text{ل}_2 + \frac{\text{ص}_1}{3}\right)$$

اب افقی شعری نلی کی صورت میں یہ فرض کرتے ہوئے کہ اس کا نصف قطر بہت چھوٹا ہے اور سطحی تناؤ کی قوت کے مقابلہ میں جاذبۂ ارض کی قوتوں کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے :—

$$\frac{2\,\text{س}}{\text{ج}\,\text{ص}_1} = \text{ثہ}\,\text{ل}_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳۵)$$

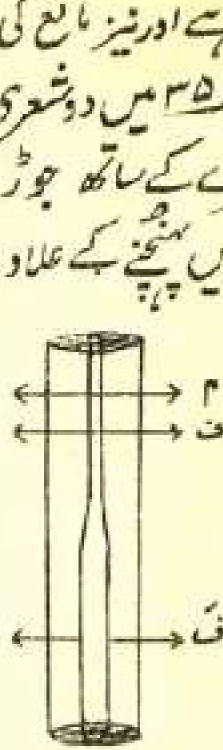
عملاً تجربہ کے اغراض کے لئے یہ سادہ ضابطہ بیحد مفید ہوتا ہے۔ اس میں مائع کی کثافت ثہ کے معلوم ہونے کی کوئی ضرورت نہیں ہے۔

اس طریقہ سے مختلف مائعیات کے سطحی تناؤ کی قیمتیں دریافت کی گئی ہیں جن میں سے چند حسب ذیل ہیں :—

مائع	تپش درجہ مئی	سطحی تناؤ ڈائین فی سمر
ایتھر	۱۶٫۰	۱۷٫۴۱
کاربن ٹیٹرا کلورائیڈ	۱۶٫۵	۲۷٫۰۵
بنزین	۱۵٫۰	۲۹٫۱۴
کلوروفارم	۱۵٫۰	۲۷٫۵۰
ٹولوئین	۱۶٫۰	۲۸٫۸۴
ایتھل بروما ئیڈ	۱۷٫۰	۲۴٫۵۲

(۱۱) سی سٹن کے طریقہ سے سطحی تناؤ کی دریافت :- (۱۶)

اس طریقہ میں بھی مائع زیرِ تجربہ کا حجم بہت چھوٹا ہوتا ہے اور نیز مائع کی کثافت کے جاننے کی بھی ضرورت باقی نہیں رہتی۔ شکل ۳۵ میں دو شعری نلیاں جن کے قطر مختلف ہوتے ہیں گرم کرکے ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ دئے گئے ہیں۔ ان میں اتنا مائع داخل کیا جاتا ہے کہ جوڑ میں پہنچنے کے علاوہ نلی کے یکساں حصوں تک پھیل جائے۔ اس صورت میں مائع میں تقاضا یہ ہوتا ہے کہ چھوٹے قطر کی نلی میں چلا جائے۔ اگر چھوٹی قطر کی نلی کو اوپر کی جانب رکھا جائے تو مائع کے استوانہ کا وزن اس تقاضے کو تعادل میں رکھتا ہے۔



شکل ۳۵

تعادل کے لئے

$$\frac{س}{۲\pi\, ص_1} - \frac{س}{۲\pi\, ص_2} = ثہ\, ج\, ل \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳۶)$$

جہاں $ص_1$ اور $ص_2$ دونوں شعری نلیوں کے نصف قطر ہیں۔ ثہ مائع کی کثافت اور ل مائع کی بلندی ہے۔ اس مساوات سے س کی قیمت دریافت کی جاسکتی ہے۔ مائع کا اگر زاویہ تماس طہ ہو تو اوپر کی مساوات میں س کے بجائے س جم طہ لکھنا ہوگا۔

لیکن اس صورت میں طہ کی قیمت صفر فرض کگئی ہے۔

فرض کرو کہ نلی کا سر اکسی گیس کے خزانہ سے جوڑا جاتا ہے جسمیں فرگوسن کے طریقہ کی طرح ایک داب پیما بھی شامل ہے۔

دباؤ کو اب اس طرح ترتیب دو کہ مائع کی ہلالی سطح چھوٹی قطر کی نلی میں نشان ف تک پہنچ جائے۔ اس صورت میں تعادل کے لئے :-

$$\frac{س}{۲\pi\, ص_1} - \frac{س}{۲\pi\, ص_2} - ثہ\, ج\, ل_1 = د_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳۷)$$

جہاں $ل_۱$ = مائع کے استوانہ کی بلندی

اور $د_۱$ = داب پیما کا دباؤ

اب نلی کو الٹ دو تاکہ چھوٹی قطر کی نلی نیچے آجائے۔ ایسی حالت میں سطحی تناؤ کی قوت اور مائع کے استوانہ کا وزن، دونوں ملکر مائع کو نیچے ڈھکیلنے کی کوشش کرتے ہیں۔ دباؤ کو اتنا رکھو کہ مائع پھر نشان ف تک پہنچ کر قائم رہے۔ تعادل کے لئے:۔

$$\left(\frac{س}{۲\pi ص_۱} - \frac{س}{۲\pi ص_۲}\right) + ث\, ج\, ل_۱ = د_۲ \quad \ldots\ldots (۳۸)$$

جہاں $د_۲$ = داب پیما کا دباؤ

اب فرض کرو کہ $\left(\frac{۱}{۲\pi ص_۱} - \frac{۱}{۲\pi ص_۲}\right) = \frac{۱}{گ}$ = کوئی مستقل

مساوات (۳۷) اور (۳۸) سے $\frac{۲س}{گ} = د_۱ + د_۲$

$$\therefore س = \frac{گ}{۲}\left(د_۱ + د_۲\right) \quad \ldots\ldots (۳۹)$$

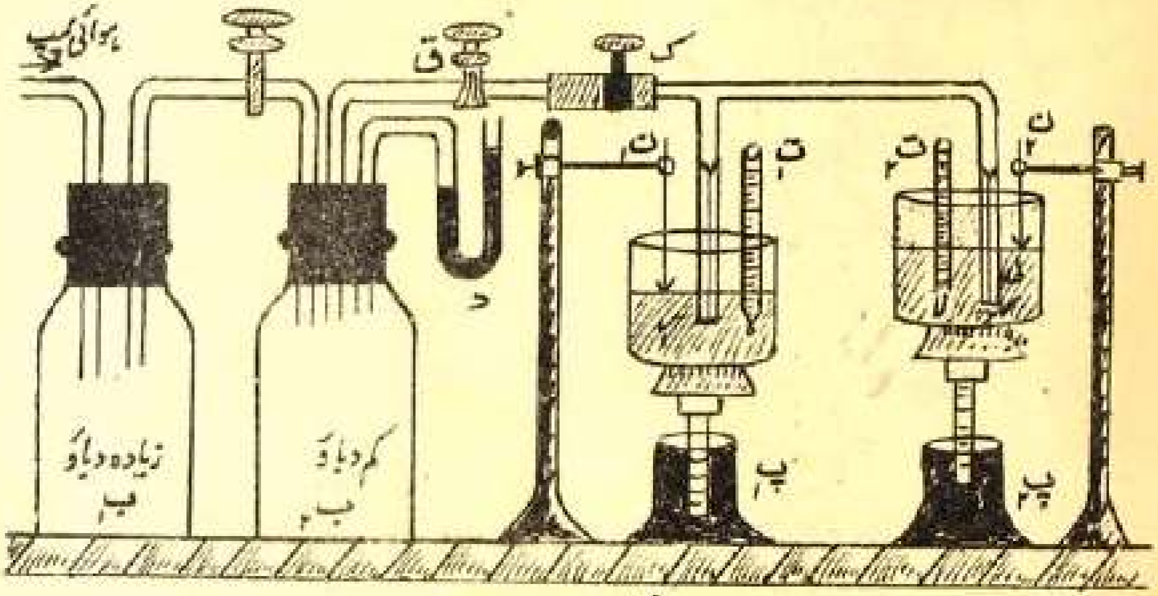
اور نیز $ث = \frac{د_۲ - د_۱}{۲\, ج\, ل_۱} \quad \ldots\ldots (۴۰)$

لہذا اس طریقہ سے نہ صرف ایک بالکل کم مقدار مائع کا سطحی تناؤ دریافت کیا جا سکتا ہے بلکہ اس کی کثافت بھی علیحدہ طور پر معلوم کی جا سکتی ہے۔ یہ طریقہ دو مختلف مائعات کے سطحی تناؤ کے مقابلہ کے لئے بھی بہت کارآمد ہوتا ہے۔ اسکے لئے حسب ذیل ضابطہ مساوات (۳۹) کی مدد سے حاصل ہوتا ہے:۔

$$\frac{س}{س'} = \frac{د_۱ + د_۲}{د'_۱ + د'_۲} \quad \ldots\ldots (۴۱)$$

سطحی تناؤ کا میزان [۱۷] :۔ یہاں جس طریقہ سے بحث کی جائے گی وہ خاص

طور پر سطحی تناؤ کی تخمینی قدر کی دریافت کے لئے مرتب کیا گیا ہے۔
اور نیز مختلف نمکوں کے محلولوں اور آمیزوں کا بھی سطحی تناؤ خواہ وہ کسی
ارتکاز کے ہوں



شکل ۳۶

اس کی مدد سے دریافت کیا جا سکتا ہے۔ تمام ضروری پیمائشیں مستقل تپش پر کسی معیاری مائع (مثلاً خالص پانی) کے سطحی تناؤ کی رقوم میں ظاہر کی گئی ہیں۔

شکل ۳۶ میں پ۱ اور پ۲ دو چھوٹی تپائیوں پر دو منقرے رکھے ہوئے ہیں جن میں مائعات ڈالے جاتے ہیں۔ ن۱ اور ن۲ ایک ہی تراش عمودی کی دو شعری نلیاں ہیں جو مائعوں میں ڈوبی رہتی ہیں اور ان کی گہرائیوں کو چھوٹے گھائی کے پیچ سے جو پ۱ اور پ۲ میں ہوتے ہیں حسب ضرورت بدلا جا سکتا ہے۔ ت۱ اور ت۲ دو تپش پیما ہیں جو دونوں منقروں میں کے مائعات کی تپش، بتلاتے ہیں۔ ک ایک چٹکی اور ق ایک ٹونٹی ہے۔ د، ایک ل نما داب پیما ہے۔ شعری نلیاں ایک دوسرے کے ساتھ ملی ہوئی

ہوتی ہیں ۔ دو بوتلیں ب۱ اور ب۲ بھی ان شعری نلیوں سے ملے ہوتے ہیں اور ان بوتلوں میں ہوا کا دباؤ بدلا جا سکتا ہے ۔ بوتل ب۲ کے ذریعہ جس میں دباؤ کرہ ہوائی کے دباؤ سے کسی قدر زیادہ ہوتا ہے ہوا کے بلبلے، شعری نلیوں کے نچلے سروں کے پاس بنائے جا سکتے ہیں ۔

یہ پورا انتظام بے حد حساس ہے ۔ دونوں شعری نلیوں کی (مائع کے اندر) گہرائیاں ابتداً پیچ پ۱ اور پ۲ پیچوں کی مدد سے اس طرح ترتیب دی جاتی ہیں کہ ہوا کے بلبلے دونوں شعری نلیوں سے ایک ہی وقت میں ساتھ ساتھ پیدا ہوتے ہیں ۔ بلبلوں کی حساس ترتیب کے لئے چٹکی ک کا استعمال (دباؤ میں کسی قدر تبدیلی کرنے کے لئے) کیا جاتا ہے ۔ ارتفاع پیما کے ذریعہ شعری نلیوں کے ڈوبے ہوئے حصوں کی گہرائی دریافت کر لی جاتی ہے ۔

اگر بلبلا کروی ہو تو، تعادل کے لئے :۔

$$\text{د} = \frac{\text{۲س}}{\text{ص}} = \text{د}_{\text{ن}} - \text{د}_{\text{ب}}$$

جہاں ص = بلبلے کا نصف قطر انحنا

$\text{د}_{\text{ن}}$ = بلبلے کا اندرونی دباؤ

$\text{د}_{\text{ب}}$ = بلبلے کا بیرونی دباؤ = $\pi + \text{ج}\ \text{ثہ}\ \text{ل}_{۱}$

ثہ = اس مائع کی کثافت جس میں شعری نلی، ل۱ گہرائی تک ڈوبی ہوئی ہوتی ہے ۔

اور π = کرہ ہوائی کا دباؤ

$$\therefore\ \frac{\text{۲س}}{\text{ص}} = \text{د}_{\text{ن}} - (\pi + \text{ج}\ \text{ثہ}\ \text{ل}_{۱}) \quad \text{.........} \quad (۴۲)$$

اگر اسی شعری نلی میں مائع کے چڑھاؤ کی بلندی ل ہو تو ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{س} = \frac{\text{ص}_{۱}\ \text{ج}\ \text{ثہ}\left(\frac{\text{ص}_{۱}}{۳} + \text{ل}\right)}{۲}$$ جہاں ص۲ = شعری نلی کا نصف قطر

اب فرض کرو کہ $\frac{\text{س}}{\text{ج ثہ}_1} = \text{ا}^2$

اِس ا^2 کو نوعی اتصال سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

اس صورت میں :-

$$2\text{ا}^2 = \text{ص}_1 \text{ل} \left(1 + \frac{\text{ص}_1}{3\text{ل}}\right) \quad \dots\dots (43)$$

لاپلاس کی مساوات سے راس پر :-

$$\frac{2\text{س}}{\text{ص}} = \text{ج ثہ}_1 \text{ل} \quad \text{یعنی} \quad 2\text{ا}^2 = \text{ص ل} \quad \dots\dots (44)$$

مساوات (۴۳) اور (۴۴) سے :-

$$\text{ص} = \text{ص}_1 \left(1 + \frac{\text{ص}_1}{3\text{ل}}\right) \quad \dots\dots (45)$$

مساوات (۴۴) سے اگر پہلی تقریبی قیمت لی جائے تو

$$\text{ل} = \frac{2\text{ا}^2}{\text{ص}_1} \quad \dots\dots (46)$$

مساوات (۴۶) والی ل کی قیمت کو مساوات (۴۵) میں لکھنے سے :-

$$\text{ص} = \text{ص}_1 \left(1 + \frac{\text{ص}_1^2}{6\text{ا}^2}\right) \quad \dots\dots (47)$$

لہٰذا مساوات (۴۲) کو ہم اِس طرح لکھ سکتے ہیں :-

$$\frac{2\text{س}}{\text{ص}_1 \left(1 + \frac{\text{ص}_1^2}{6\text{ا}^2}\right)} = (\text{د}_{\text{ن}} - \pi) - \text{ج ثہ}_1 \text{ل}_1$$

اس کو پھیلا کر $\frac{\text{ص}_1^2}{6\text{ا}^2}$ کی اونچی طاقت والی رقموں کو نظرانداز کرنے سے :-

$$\frac{2\text{س}}{\text{ص}_1} \left(1 - \frac{\text{ص}_1^2}{6\text{ا}^2}\right) = (\text{د}_{\text{ن}} - \pi) - \text{ج ثہ}_1 \text{ل}_1$$

یعنی $\frac{2\text{س}}{\text{ص}_1} - \frac{\text{ص}_1 \text{ج ثہ}_1}{3} = \text{کا} - \text{ج ثہ}_1 \text{ل}_1$

جہاں کا = بلبلے کے اندر کرہ ہوائی کے دباؤ سے جتنا دباؤ زیادہ ہو

$$= (\text{د}_{\text{ن}} - \pi)$$

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{ص}_1}{2}\left(\text{لا} - \text{ج}\ \text{ث}_1\ \text{ل}_1\right) + \frac{\text{ص}_1^2\ \text{ج}\ \text{ث}_1}{4} \quad \ldots\ldots\ldots (۴۸)$$

یہ مساوات، دونوں شعری نلیوں پر جن کے تراش مساوی ہیں صادق آتی ہے۔
فرض کرو کہ ص_2 سطحی تناؤ ث_2 کثافت اور ل_2 زیر امتحان مائع کے اندر ڈوبی ہوئی شعری نلی کی گہرائی ہے۔

$$\text{تب}\ \text{س}_2 = \frac{\text{ص}_1}{2}\left(\text{لا} - \text{ج}\ \text{ث}_2\ \text{ل}_2\right) + \frac{\text{ص}_1^2\ \text{ج}\ \text{ث}_2}{4} \quad \ldots\ldots (۴۹)$$

اگر مساوات (۴۸) معیاری مائع کی تعبیر کرتا ہو جسکا سطحی تناؤ س_1 ہو تو مساوات (۴۸) اور (۴۹) سے :-

$$\text{س}_1 - \text{س}_2 = \frac{\text{ج}\ \text{ص}_1}{2}\left(\text{ث}_2\ \text{ل}_2 - \text{ث}_1\ \text{ل}_1\right) + \frac{\text{ج}\ \text{ص}_1^2}{4}\left(\text{ث}_1 - \text{ث}_2\right) \quad \ldots\ldots\ldots (۵۰)$$

یہ مساوات اوپر کے عملی انتظام پر صادق آتی ہے۔
اس میزان کو بعض مائعات کی مثلاً بنزین، ایتھر وغیرہ کی "تپش فاصل" (وہ تپش جس پر سطحی تناؤ غائب ہوجاتا ہے) کی دریافت میں استعمال کیا جاتا ہے اور نیز مختلف ارتکاز کے محلولوں میں سطحی تناؤ کے تغیرات بھی اس سے معلوم کئے جا سکتے ہیں۔

اوپر جو نظریہ بیان کیا گیا ہے اس میں یہ فرض کیا گیا ہے کہ دونوں شعری نلیاں بالکل ناپ وغیرہ میں ایک دوسرے کے مماثل ہیں۔ یہ ظاہر ہے کہ ایسی نلیاں ایک بڑی لمبی نلی کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کرنے سے حاصل کی جا سکتی ہیں۔ اس کی جانچ یوں کی جا سکتی ہے کہ دونوں متفرقوں میں ایک ہی مائع استعمال کرکے تجربہ کیا جائے تاکہ ل_1 اور ل_2 بلبلوں کی ترتیب کے بعد مساوی ہوجائیں۔ اس تجربہ میں یہ بے حد ضروری ہے کہ شعری نلیوں کو معمولی طریقوں سے نہایت احتیاط کے ساتھ پاک کرلیا جائے اور معیاری مائع کو مستقل تپش پر رکھا جائے۔

اس طریقہ کو ڈاکٹر وارن نے پیش کیا تھا۔ نمک کے محلولوں کا سطحی تناؤ عموماً خالص پانی سے زیادہ ہوتا ہے۔ اگر کسی محلول کا سطحی تناؤ، جبکہ اس کے محلول کے ایک لیٹر میں ن گرام سالمات نمک موجود ہوں $س_ن$ ہے تو

$$س_ن = س_پ + گ\,ن \quad .... (۵۱)$$

جہاں $س_پ$ = خالص پانی کا سطحی تناؤ اسی تپش پر

اور گ = ہر ایک خاص نمک کے لئے ایک مستقل، اس کی قیمت ذیل کی جدول میں دی گئی ہے۔

نمک کا نام		گ
سوڈیم کلورائڈ	NaCl	۱٫۵۳
پوٹاسیم کلورائڈ	KCl	۱٫۷۱
$\frac{1}{2}$ سوڈیم کاربونیٹ	$\frac{1}{2}(Na_2CO_3)$	۲٫۰۰
$\frac{1}{2}$ پوٹاسیم کاربونیٹ	$\frac{1}{2}(K_2CO_3)$	۱٫۷۷
$\frac{1}{4}$ زنک سلفیٹ	$\frac{1}{4}(ZnSO_4)$	۱٫۸۶

مائعات کے سطحی تناؤ پر تپش کا اثر:۔ تپش بڑھتی ہے تو تمام مائعات کا سطحی تناؤ گھٹنے لگتا ہے اور ایک خاص تپش پر صفر ہو جاتا ہے۔ اس تپش کو "تپش فاصل" سے موسوم کیا جاتا ہے۔

پانی کا ایک اتھلا پرت چپٹے پیندے کے برتن میں لو اور اس کی سطح پر تھوڑا سا کوئلے کا سفوف چھڑک دو۔ اس کی سطح کے کسی مقام کو اس کے قریب گرم دھات کا کوئی ٹکڑا لا کر گرم کرو۔ اس مقام کا پانی گرم ہوگا اور اس کا سطحی تناؤ کم ہونے لگے گا۔ اطراف کے ٹھنڈے پانی کی سطح سکڑنے لگتی ہے جس کی وجہ سے کوئلے کا سفوف برتن کے کناروں کی طرف حرکت کرنے لگتا ہے۔ بجائے گرم

دھات کے محدب عدسہ میں سے سورج کی شعاعوں کو پانی کی سطح کے کسی نقطہ پر مرتکز کیا جائے تو اس نقطہ کے پاس پانی گرم ہو جائے گا۔

بعض مائعات کا سطحی تناؤ $س_{ت}$ ت° تپش پر حسب ذیل ضابطہ سے ظاہر کیا جاتا ہے:—

$$س_{ت} = س_{صفر} (۱ - گ ت) \quad \text{.........} \quad (۵۲)$$

جہاں $س_{صفر}$ = صفر درجہ مئی پر سطحی تناؤ

اور گ = سطحی تناؤ کی تپشی قدر

ذیل کی جدول میں چند مائعات کے لئے گ کی قیمتیں دی گئی ہیں:—

مائع	$س_{صفر}$	گ
ایتھر ($C_4H_{10}O$)	۱۹٫۳	۰٫۱۱۵
الکوہل (C_2H_6O)	۲۵٫۳	۰٫۰۸۷
بنزین (C_6H_6)	۳۰٫۶	۰٫۱۳۲
پانی (H_2O)	۷۵٫۸	۰٫۱۵۲
پارہ (Hg)	۵۲۷٫۲	۰٫۳۷۹

ایتواس نے متعدد مائعات کے لئے $س، ح^{\frac{۲}{۳}}$ کے حاصل ضرب کی قیمت دریافت کی ہے جہاں ح = سالمی حجم = $\frac{\text{سالمی وزن}}{\text{کثافت}}$

اس نے دریافت کیا کہ اس حاصل ضرب کی تبدیلی کی شرح بلحاظ تپش، (تمام مائعات کے لئے جن پر اس نے تجربہ کیا) مستقل رہتی ہے اور اس مستقل کی قیمت ۲٫۱ ہے۔ پانی کی صورت میں ایتواس کا قاعدہ صادق نہیں آتا۔ اس واسطے کہ ۱۰۰° اور ۲۰۰° کے درمیان، اس قاعدے کا صرف اسی وقت

اطلاق ہوتا ہے جبکہ پانی کے سالمی وزن کو ہم بجائے ۱۸ کے ۳۶ لیں۔
اس سے ہمیں یہ ماننا ہوگا کہ ۱۰۰° مئی سے زائد تپش پر پانی کی ترکیب ($2H_2O$) ہوتی ہے اور اس تپش سے نیچے (nH_2O) جہاں (n) کوئی عدد ہے جس کی قیمت ۲ سے زیادہ ہے۔

ایتواس (۱۹) کے قاعدے سے :-

س ح$^{\frac{2}{3}}$ = ۲۱ء۲ (تہ - ت) .... (۵۳)

جہاں تہ = کوئی مستقل تپش

ت = مائع کی تپش مئی درجوں میں

اگر ت = تہ تو س = صفر

لہٰذا تہ کی یہ قیمت مائع کی تپش فاصل ہوگی۔

مائع	تہ کی قیمت تجربہ سے	فانڈرہال کی تپش فاصل کی قیمتیں
ایتھر	۱۸۰° م	۱۹۰° م
الکوہل	۲۹۵° م	۲۵۶° م
پانی	۵۶۰° م	۳۹۰° م

کسی مائع کی جھلی کے پھیلنے سے تپش میں تغیرات :-

چونکہ کسی مائع کا سطحی تناؤ تپش کے ساتھ ساتھ بدلتا ہے لہٰذا حرناگزار حالات کے تحت اگر جھلی کے رقبہ میں کوئی تبدیلی ہو تو یہ ضروری ہے کہ اس کے ساتھ تپش بھی متبدل ہو جائے۔

حرارت کی وہ مقدار جو جذب یا خارج ہوتی ہے حرحر کی اصول کی مدد سے دریافت کی جا سکتی ہے :-

فرض کرو کہ کسی مائع کی ایک جھلی جس کی کمیت اکائی ہے مستقل مطلق

تپش ت پر رکھی جاتی ہے اور اسکا رقبہ ا ہے۔ جب جھلی کا رقبہ ا سے ا + فر ا تک ذرا سا کھینچ کر بڑھایا جائے تو جھلی پر کام کیا جائے گا اور اسکے لئے باہر سے حرارت لینے کی ضرورت ہوتی ہے۔ چونکہ تپش مستقل رکھی جاتی ہے اس وجہ سے جھلی میں تبرید واقع ہوگی۔

(سطح کے دونوں رخوں پر غور کرتے ہوئے) جھلی کے رقبہ کو "فر ا" بڑھانے کے لئے کام = ۲ س فر ا

حرحرکیات کے پہلے کلیہ سے [پانچواں باب مساوات (۱)]

فرحہ = فربہ + فرکا

= فربہ − ۲ س فر ا .... (۵۴)

چونکہ یہ عمل اُلٹایا جاسکتا ہے، حرحرکیات کے دوسرے کلیہ سے :-

فرحہ = ت فرفہ .... (۵۵)

جہاں فرفہ = ناکارگی میں تبدیلی

ان دونوں مساواتوں سے :-

فربہ = ت فرفہ + ۲ س فر ا

یعنی فر(بہ − ۲ س ا) = ت فرفہ − ۲ ا فرس

چونکہ یہ کامل تفرق ہے

$$\therefore \left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرس}}\right)_{\text{ت}} = -۲\left(\frac{\text{فرا}}{\text{فرت}}\right)_{\text{س}} \quad \ldots\ldots\ldots (۵۶)$$

مساوات (۵۵) اور (۵۶) سے :-

$$\left(\text{فرحہ}\right)_{\text{ت}} = -۲\,\text{ت}\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}\right).\,\text{فرا}$$

اگر کہ سطحی تناؤ کی تپشی قدر ہو تو

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \text{گ}$$

∴ (فرحہ)ت = –۲ ت گہ فر۲ .... (۵۷)

چونکہ تپش کے اضافہ سے تمام مائعات کا سطحی تناؤ کم ہوتا ہے اس لئے گہ منفی ہے، لہٰذا اوپر کی مساوات میں بائیں جانب کی رقم مثبت ہوگی، یعنی (فرحہ)ت مثبت ہے۔ لہٰذا جھلی کو حرارت پہنچانی ہوگی جبکہ اسے کھینچکر بڑا کرنے کی صورت میں اس کی تپش کو مستقل رکھنا منظور ہو۔

اگر جھلی کے پھیلنے کی وجہ سے تپش میں کمی = فرت تو

(فرحہ)ت = فرت × ٹ × جو × ۱

جہاں ٹ = حرارت نوعی مائع کی

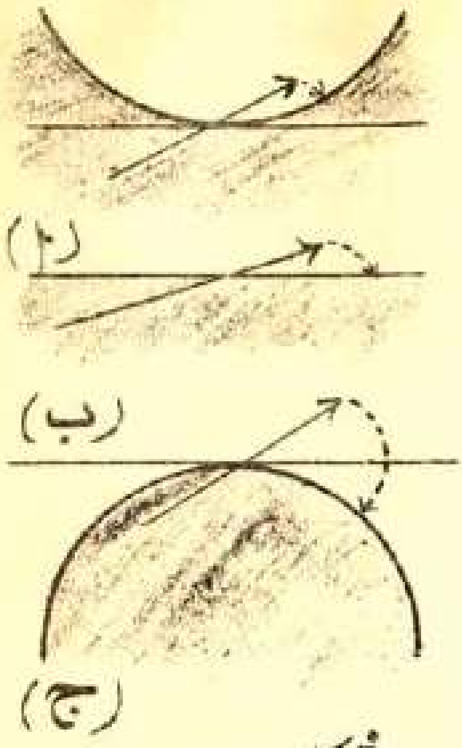
جو = حرارت کا معادل جیلی

∴ فرت = (–۲ ت گہ فر۲) / (ٹ جو) .... (۵۸)

کسی مائع کی منحنی سطح پر بخار کا دباؤ :- نظریہ تحرک کی رو سے، کسی مائع کی تبخیر کا عمل، مائع کی سطح سے، اسکے سالمات کے بتدریج باہر نکل جانے کا دوسرا نام ہے، مائع کی سطح کے کسی دئے ہوئے رقبہ سے اکائی وقت میں سالمات کی جو تعداد نکلے گی وہ سطح کے انحنا پر منحصر ہوگی۔ اگر سطح مقعر ہو جیسی کہ شکل ۳۷ (ا) میں دکھائی گئی ہے تو ایک پیکان کی سمت میں، سطح میں سے گزرنے والا تیز رفتار سالمہ سالمی کشش کی حد کے باہر نکلنے میں کامیاب ہوتے ہوتے رہ جائے گا۔

لہٰذا اس قسم کا سالمہ پھر مائع میں واپس ہو جائے گا۔

لیکن یہی سالمہ فضا میں باہر نکل سکتا ہے بشرطیکہ مائع کی سطح شکل ۳۷ (ب) کی طرح مستوی ہو۔ اگر سطح شکل ۳۷ (ج) کی طرح محدب ہو تو پیکاں کے نشان کی سمت میں سالمہ کا باہر نکل جانا ممکن ہے لیکن اس بات کا بھی امکان ہے کہ مستوی سطح والے مائع میں سے یہ نکلنے نہ پائے۔



شکل ۳۷

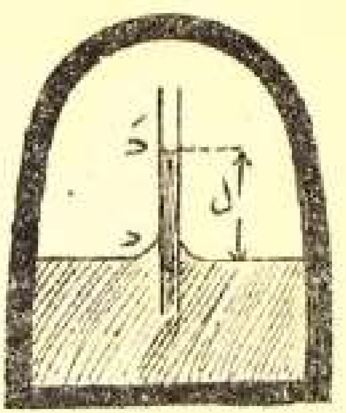
اس سے ظاہر ہے کہ کسی خاص تپش پر ایسے سالمات کی تعداد جو فی ثانیہ کسی محدب سطح کے مائع سے باہر نکلتے ہوں زیادہ ہوتی ہے بہ نسبت ان سالمات کی تعداد کے جو فی ثانیہ کسی مستوی سطح والے مائع سے باہر نکلتے ہیں اور کسی مقعر سطح سے سالمات کے باہر نکلنے کی شرح بلحاظ وقت مستوی سطح سے نکلنے والے سالمات کی شرح سے کم ہوتی ہے۔

اگر ذیل کے وجوہات پر غور کریں تو ہم اسی نتیجہ پر پہنچتے ہیں :—

کسی مائع میں جب اس کی مستوی سطح سے تبخیر کا عمل ہوتا ہے تو سطح کے رقبہ میں کوئی تبدیلی نہیں واقع ہوتی اور اسی لئے سطحی تناؤ کی وجہ سے توانائی بالقوہ میں کوئی تغیر نہیں ہوتا۔ کسی منحنی سطح (مثلاً کروی قطرہ) کی صورت میں جب مائع میں تبخیر کا عمل ہوتا ہے تو سطح کے رقبہ میں کمی ہو جاتی ہے جس کی باعث سطحی تناؤ سے توانائی بالقوہ میں کمی ہونے لگتی ہے۔ لہذا چونکہ تبخیر کے ساتھ توانائی بالقوہ میں کمی واقع ہونا ضروری ہے اس لئے سالمات کے باہر نکل جانے کی شرح، یعنی تبخیر، کروی قطرے میں، مستوی سطح کی بہ نسبت، بڑھ جاتی ہے۔ اسکا مطلب یہ ہے کہ کروی قطرہ کے ساتھ جو بخاری دباؤ تعادل میں رہتا ہے وہ مستوی سطح کی بہ نسبت زیادہ ہوتا ہے۔

لارڈ کلون پہلا[۴۰] شخص ہے جس نے بخاری دباؤ پر سطح کے انحنا کے اثر کو حسب ذیل طریقہ سے ظاہر کیا :—

شکل نمبر ۳۸ میں ایک شعری نلی دکھائی گئی ہے یہ ایسے مائع میں رکھی ہوئی ہے جو شیشہ کو بھگوتا ہے۔ فرض کرو کہ اس پورے انتظام کو ایک بند برتن میں رکھ دیا جاتا ہے اور یہ بھی فرض کرو کہ شعری نلی کا اندرونی نصف قطر ص ہے اور شعری نلی میں مائع کی سطح آزاد مستوی سطح سے ل بلندی پر واقع ہے۔



شکل نمبر ۳۸

اگر مستوی سطح کے عین اوپر بخاری دباؤ د اور اس سے ل بلندی پر بخاری دباؤ دَ ہو تو

$$\text{د} = \text{دَ} + \text{ج ث ل} \quad \text{..................} \quad (\text{۵۹})$$

جہاں ث = بخار کی کثافت

لیکن لاپلاس کی مساوات سے ہم کو یہ معلوم ہے کہ شعری نلی میں کے مائع کی نصف کروی سطح کے دونوں جانب کا فرق دباؤ

$$= \frac{\text{۲س}}{\text{ص}}$$

$$= \text{ج} \left(\text{ثہ} - \text{ث} \right) \text{ل}$$

جہاں ثہ = مائع کی کثافت۔

(یہ یاد رہے کہ ہم نے اس سے پہلے ث کو بمقابلہ ثہ نظر انداز کر دیا تھا)

$$\text{یعنی ج ث ل} = \frac{\text{۲س}}{\text{ص}} \left(\frac{\text{ث}}{\text{ثہ} - \text{ث}} \right)$$

∴ مساوات (۵۹) سے

$$\text{دَ} = \text{د} - \frac{\text{۲س}}{\text{ص}} \left(\frac{\text{ث}}{\text{ثہ} - \text{ث}} \right) \quad \text{..................} \quad (\text{۶۰})$$

لہٰذا مقعر سطح پر بخاری دباؤ مستوی سطح کے مقابلہ میں (ایک ہی تپش پر) بمقدار

$\frac{۲س}{ص}\left(\frac{ث}{ثہ - ث}\right)$ کم ہوتا ہے۔ اس لئے مقعر سطح پر تبخیر، بہ نسبت مستوی سطح کے زیادہ تیزی کے ساتھ واقع ہوتی ہے (یہ مانتے ہوئے کہ دونوں صورتوں میں تپش ایک ہی ہے) اگر مائع کی سطح محدب ہو جیسا کہ کسی شعری نلی کو پارہ میں ڈبونے کی صورت میں ہوتی ہے تو بھی اسی طریقے سے ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ محدب سطح پر بخاری دباؤ $\bar{د}$، مستوی سطح کے بخاری دباؤ سے بالکل اتنا ہی زیادہ ہوتا ہے جتنا کہ اوپر بتایا گیا ہے۔

لہذا عام مساوات :-

$$\bar{د} = د \mp \frac{۲س}{ص}\left(\frac{ث}{ثہ - ث}\right) \qquad \text{.........}(۶۱)$$

(مقعر سطح کیلئے منفی علامت اور محدب سطح کیلئے مثبت علامت استعمال ہوتی ہے)

لہذا محدب سطح کی صورت میں تبخیر بہ نسبت مستوی سطح کے آہستہ واقع ہوتی ہے (یعنی تبخیر زیادہ تیزی کے ساتھ واقع ہوتی ہے)

اب پانی کے ایک قطرہ پر غور کرو جس کا نصف قطر صفر درجہ مئی پر $۱۰^{-۴}$ سمر ہے۔ سیر شدہ بخار کی کثافت ث صفر درجہ مئی پر $= ۴٫۸ \times ۱۰^{-۶}$ گرام فی مکعب سمر

چونکہ س $= ۷۶$ ڈائین فی سمر صفر درجہ مئی پر اور ثہ $= ۱$

$\therefore \frac{۲س}{ص}\left(\frac{ث}{ثہ - ث}\right) = ۷٫۳$ ڈائین فی مربع سمر

لہذا بخاری دباؤ اس صورت میں، بہ نسبت مستوی سطح کے $۷٫۳$ ڈائین فی مربع سمر زیادہ ہے۔

لیکن صفر درجہ مئی پر د $= ۶ \times ۱۰^{۳}$ ڈائین فی مربع سمر

لہذا $\bar{د} = (۶ \times ۱۰^{۳} + ۷٫۳)$ ڈائین فی مربع سمر

$\therefore \frac{\bar{د}}{د} = ۱٫۰۰۱۲$

اگر قطرہ کا نصف قطر $۱۰^{-۶}$ سمر (۰٫۰۰۰۰۰۱) صفر درجہ مئی پر ہو تو

اس صورت میں $\frac{۲س}{ص}\left(\frac{ث}{ثہ - ث}\right) = ۷٫۳ \times ۱۰^{۲}$ ڈائین فی مربع سمر

اور $\frac{ر'}{ر}$ = ۲٫۲۲

اس سے ظاہر ہے کہ اگر قطرے بہت چھوٹے ہوں تو بخاری دباؤ پر انحنا کا اثر کافی بڑا ہوتا ہے۔ چونکہ ص جوں جوں کم ہوتا ہے، یہ اثر بڑھتا ہے اس لئے بالکل چھوٹے ناپ کے قطرے بہت تیزی کے ساتھ بخار میں متبدل ہو جائیں گے اگر ان کو ایسی فضا میں رکھا جائے جو بخار سے سیر شدہ ہو۔

بادلوں کی ساخت :— فرض کرو کہ آبی بخار کی بستگی سے جو ایک بے انتہا چھوٹے قطرۂ آب کی سطح پر واقع ہوتی ہے یہ بے انتہا چھوٹا قطرہ بڑھنے لگتا ہے۔ اس صورت میں یہ ایک ایسی فضا میں واقع ہوگا جس میں آبی بخار "زاید سیر شدہ" حالت میں ہے ورنہ بستگی کا مرکزہ ہونے کے بجائے بخار میں متبدل ہو جانے سے اسکا ناپ کم ہونے لگے گا۔

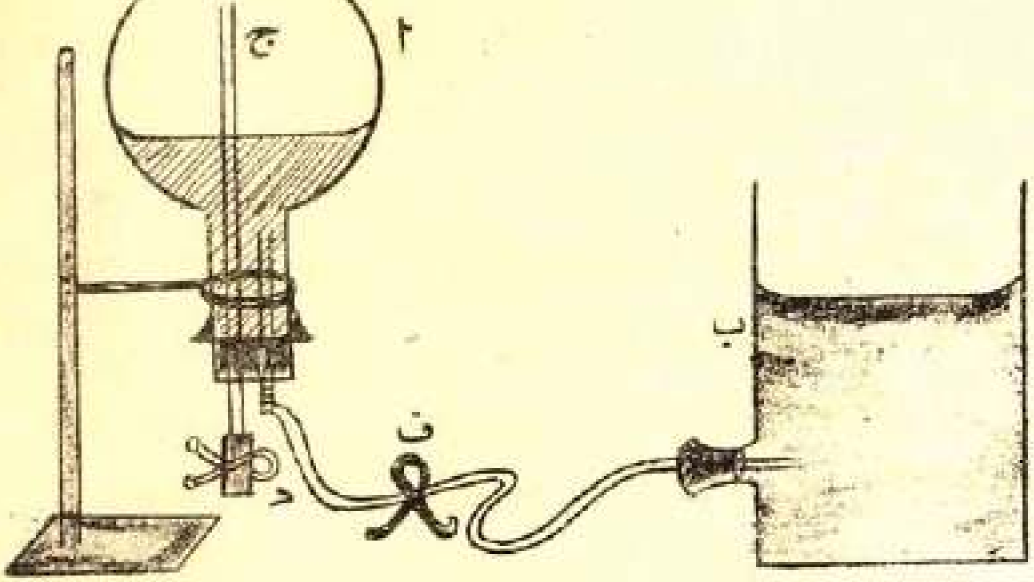
اس سے عموماً یہ ظاہر ہوتا ہے کہ بہت چھوٹے قطرے قائم نہیں رہ سکتے اور بہت جلد غائب ہو جاتے ہیں۔ لہذا بارش کے قطروں یا بادل کی ساخت کا بڑا دشوار مسئلہ معلوم ہوتا ہے جبکہ یہ قطرے ابتدائی حالت میں بہت چھوٹے ہیں۔

۱۸۸۰ء میں ایٹکن نے یہ ثابت کیا کہ معمولی حالات میں جبکہ پانی اور آبی بخار زائد سیر شدہ حالت میں موجود ہوں تو یہ قطرے نہیں بنتے۔ بارش اور کہر کے لئے گرد کے ذرات کی موجودگی لازمات سے ہے۔ گرد کے ذرات پر پانی جمع ہونے لگتا ہے اور اس طرح سے قطرہ کا ابتدائی نصف قطر مقابلتاً بڑا رہتا ہے اور وہ دشواری جاتی رہتی ہے جو قطرہ کے ابتدائی حالت میں درپیش تھی۔

کسی بڑے شہر میں جہاں کارخانے، دود کش اور گاڑیوں وغیرہ کی آمد و رفت کافی رہتی ہے دھوئیں اور گرد و غبار کے ذرات بیشمار تعداد میں ہوا میں موجود ہوتے ہیں جن پر آبی رطوبت جم سکتی ہے اور چنانچہ ان کی وجہ سے تاریک کہر واقع ہوتا ہے۔

بادل کے بننے میں گرد کے ذرات کے اثر کو حسب ذیل تجربہ سے ثابت کیا

جا سکتا ہے۔ شکل ۳۹ میں ایک لچکدار نلی ف کے ذریعہ ا اور ب دو برتن ایک دوسرے سے ملے ہوئے ہیں۔ ب میں پانی رکھا جاتا ہے اور اس کو جب اوپر اُٹھایا جاتا ہے تو ا کا کچھ حصہ پانی سے بھر جاتا ہے، جب ب کو



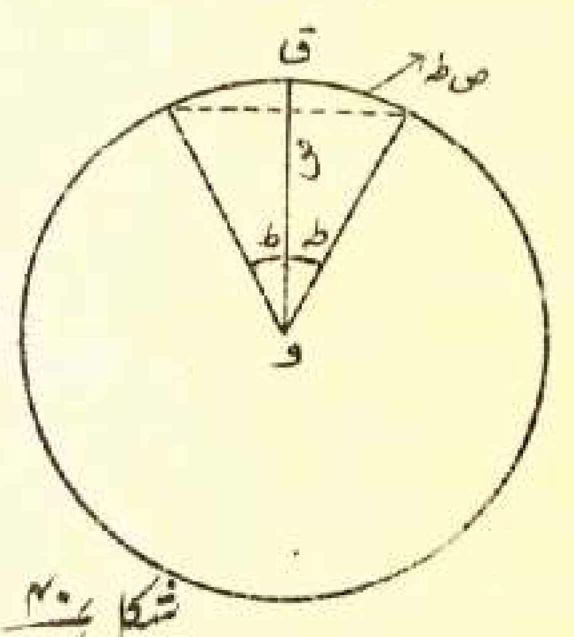
شکل ۳۹

نیچے اُتارا جاتا ہے تو پانی ا کے باہر نکل جاتا ہے اور ا میں ہوا کا حجم بڑھ جاتا ہے اس طرح ہوا کے پھیلنے کی وجہ تبرید کا عمل شروع ہوتا ہے، حتیٰ کہ ا میں آبی بخار زاید سیر شدہ ہونے لگتا ہے۔ اگر ا میں گرد آلود ہوا بھر دی جائے تو ب کو نیچے کرنے سے ا میں دھندلا سا بادل بننے لگتا ہے۔ یہ بادل ا کے پانی میں گرد کے چند ذرات اپنے ساتھ لیکر گر جاتا ہے۔ اسی عمل کو دوبارہ دُھرانے سے پانی میں گرد کی زیادہ مقدار گر جاتی ہے اور ا کی ہوا میں پہلے کی نسبت گرد کے کم ذرات موجود رہتے ہیں۔ اسی طرح متعدد دفعہ تجربہ کو دوھرانے سے ا میں کی ہوا بالکل گرد سے پاک ہوجاتی ہے اور اس نوبت پر پھر کوئی بادل ا میں ہوا

کے پھیلاؤ سے نمودار نہیں ہوتا۔ اگر اس وقت د کے ذریعہ ذرا سی گرد ا میں داخل کر دی جائے تو تبرید سے فوراً بادل بننے لگتا ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ بادل کے نمودار ہونے کے لئے گرد کے ذرات کا موجود ہونا لازمی ہے۔

۱۸۹۷ء میں ولسن نے یہ ثابت کیا کہ گرد کے ذرات کے بغیر بھی گیس کے رواں کو مرکزے قرار دیکر بادل نمودار ہو سکتے ہیں بشرطیکہ بخار ایک خاص قیمت سے زیادہ "زاید سیر شدہ" ہو۔

برقایا ہوا صابون کا بلبلا :— صابون کے ایک ایسے بند بلبلے پر غور کرو جس کا نصف قطر ص ہے۔ اگر کرہ ہوائی کا دباؤ د ہو تو بلبلے کے اندر دباؤ د سے کسی قدر زیادہ ہوگا۔ چنانچہ بیرونی حاصل قوت، بلبلے کے سطحی تناؤ سے توازن میں رہے گی۔ اگر اس بلبلے کو برقایا جائے تو ایک مزید قوت بلبلے کی سطح پر باہر کی جانب عموداً عمل کرنے لگتی ہے جس کی وجہ سے بلبلا اتنا پھیلتا ہے کہ توازن قائم ہو جائے۔ چونکہ نصف قطر میں تبدیلی واقع ہوتی ہے اس وجہ سے اس کا اندرونی دباؤ حجم کے لحاظ سے معکوس بدلتا ہے۔ کلیہ بائیل کی رو سے دباؤ $\frac{م}{ص^3}$ کے مساوی ہوگا جہاں م = مستقل۔



شکل نمبر ۴۰

بلبلے کی سطح پر ایک ایسے بالکل چھوٹے عنصر کے تعادل پر غور کرو جو ایک مدوّر مخروط کے ذریعہ جس کا نیم انتصابی زاویہ ط مرکز سے بناتے ہوئے قطع کیا گیا ہو [دیکھو شکل نمبر ۴۰]

اس پر حسب ذیل قوتیں عمل کرتی ہیں :-

(١) کرہ ہوائی کے دباؤ کی وجہ سے جو قوت اندر کی جانب عمود وار عمل کرتی ہے $= \text{د}\,\pi\,\text{ص}^{2}\,\text{ط}^{2}$

(٢) سطحی تناؤ کی وجہ سے جو قوت بلبلے کی سطح پر عمل کرتی ہے۔ اس قوت کے اجزا کو ایک مماسی مستوی میں اور دوسرا و ق کی سمت میں تحلیل کیا جا سکتا ہے۔ مماسی مستوی کے اجزائے تحلیلی ایک دوسرے کو زائل کر دیتے ہیں لیکن و ق کی سمت میں عمل کرنے والے اجزا جو اندر کی جانب عمل کرتے ہیں

$= 2\,\pi\,\text{ص}\,\text{ط}\,\text{س}\,\text{جب}\,\text{ط}$

$\simeq 2\,\pi\,\text{ص}\,\text{ط}^{2}\,\text{س}$ کیونکہ ط چھوٹا ہے۔

(٣) اندرونی دباؤ کی وجہ سے جو قوت باہر کی جانب عمود وار عمل کرتی ہے

$= \frac{\text{م}}{\text{ص}^{3}}\,\pi\,\text{ص}^{2}\,\text{ط}^{2}$

(٤) برقانے کی وجہ سے کھیل قوت جو باہر کی طرف عمود وار عمل کرتی ہے =

$= 2\,\pi\,\text{ته}^{2}\cdot\pi\,\text{ص}^{2}\,\text{ط}^{2}$

جہاں ته = برقی بھرن فی اکائی رقبہ

تعادل کے لئے ایسی تمام قوتیں جو عمود وار اندر کی جانب عمل کرتی ہیں اُن تمام قوتوں کے مساوی ہونی چاہئیں جو باہر کی جانب عمود وار عمل کرتی ہیں۔

$\therefore \text{د}\,\pi\,\text{ص}^{2}\,\text{ط}^{2} + 2\,\pi\,\text{ص}\,\text{ط}^{2}\,\text{س} =$

$= \frac{\text{م}}{\text{ص}^{3}}\cdot\pi\,\text{ص}^{2}\,\text{ط}^{2} + 2\,\pi\,\text{ته}^{2}\,\pi\,\text{ص}^{2}\,\text{ط}^{2}$

یعنی $\text{د} + \frac{2\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{م}}{\text{ص}^{3}} + 2\,\pi\,\text{ته}^{2}$ ....(٦٢)

فرض کرو کہ بلبلے کا نصف قطر برقانے کے قبل $= \text{ص}_{1}$

اور پھر بھرن سے برقائے جانے کے بعد بلبلے کا نصف قطر $= \text{ص}_{2}$

پہلی صورت میں $\text{د} + \frac{2\text{س}}{\text{ص}_{1}} = \frac{\text{م}}{\text{ص}_{1}^{3}}$ ....(٦٣)

دوسری صورت میں چونکہ $ث = \frac{بھ}{۴ \pi ص_۱}$ اور یہ فرض کرتے ہوئے کہ سطحی تناؤ میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی :—

$$د + \frac{۲ س}{ص_۲} = \frac{م}{ص_۲^۳} + \frac{بھ^۲}{۸ \pi^۲ ص_۱^۴} \quad \ldots\ldots (۶۴)$$

ان دونوں مساواتوں سے س کو ساقط کرنے سے :—

$$د(ص_۲ - ص_۱) - م\left(\frac{۱}{ص_۱^۲} - \frac{۱}{ص_۲^۲}\right) = \frac{بھ^۲}{۸ \pi^۲ ص_۱^۳}$$

اگر بلبلے کو ایسی نلی پر پھونک کر بنایا جائے جو ہوا کے لئے کھلی ہوئی ہو تو مساوات (۶۲) کو یوں لکھا جاسکتا ہے :—

$$\frac{س}{ص} = \pi ث^۲$$

اگر ہم بلبلے کو یکساں طور پر برقایا ہوا کرہ فرض کریں تو اس کا قوہ قو = $۴ \pi ص ث$

ایسی صورت میں $س = \frac{قو^۲}{۱۶ \pi ص}$

مثال :— کسی صابون کے بلبلے کا نصف قطر اور سطحی تناؤ علی الترتیب ص اور س ہو تو ثابت کرو اس کے نصف قطر کو دوگنا کرنے کے لئے جو برقی بھرن درکار ہوگی وہ $= ۴ \pi ص^۲ \left\{ ۶ س + ۷ د ص \right\}^{\frac{۱}{۲}}$

جہاں د کرہ ہوائی کا دباؤ ہے۔

پہلی صورت میں مساوات (۶۳) سے چونکہ $ص_۱ = ص$

$$\therefore م = د ص^۳ + ۲ س ص^۲$$

دوسری صورت میں مساوات (۶۴) سے چونکہ $ص_۲ = ۲ ص_۱$

$$\therefore د + \frac{س}{ص} = \frac{م}{۸ ص^۳} + \frac{بھ^۲}{۱۲۸ \pi^۲ ص^۴}$$

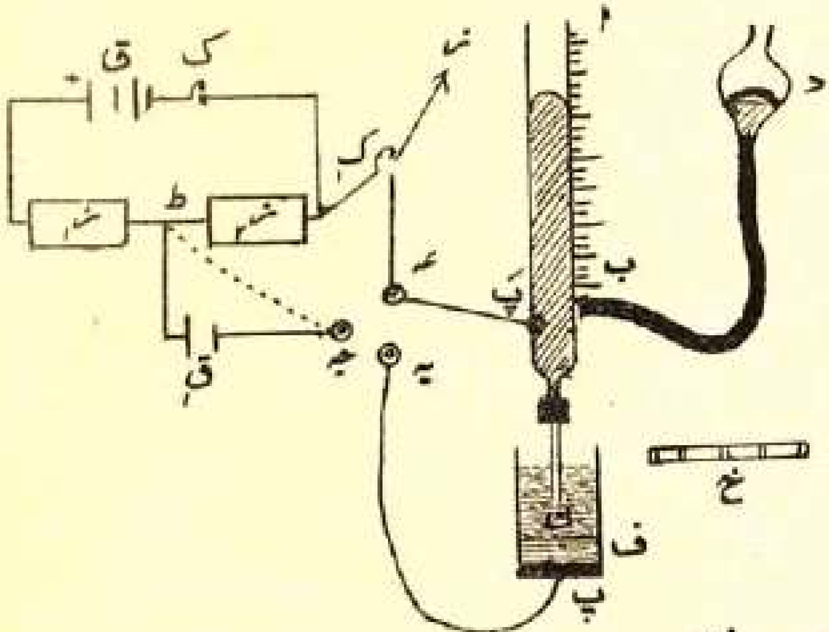
$$یعنی\ د + \frac{س}{ص} = \frac{د}{۸} + \frac{س}{۴ ص} + \frac{بھ^۲}{۱۲۸ \pi^۲ ص^۴}$$

یعنے بھ^{2} = ۱۶ π ص^{3} (۷ دص + ۶ س)

∴ بھ = ۴ {π ص^{3} (۶ س + ۷ دص)}$^{\frac{1}{2}}$

شعری برق پیما :-

مائعات کے سطحی تناؤ پر جو برقی اثرات مرتب ہوتے ہیں ان کو مدِ نظر رکھ کر شعری برق پیما بنایا گیا ہے۔ شکل ۱۴۱ میں ۱ ب ایک لمبی



شکل ۱۴۱

شیشہ کی نلی ہے جس کے ایک سرے پر تپلی شعری نلی ت ربر کی نلی کے ذریعہ جوڑ دی گئی ہے۔ ۱ ب کے عقب میں لکڑی کا ایک پیمانہ نصب کیا گیا ہے۔ د پارہ سے بھرا ہوا برتن ہے جو ب پر ربر کی نلی سے جوڑ دیا گیا ہے۔ د کو اونچا نیچا کرنے سے شعری نلی پر کے دباؤ کو کم و بیش کیا جا سکتا ہے۔ شعری نلی میں پارہ کی سطح، ۱ ب میں پارہ کی بلندی پر منحصر ہوتی ہے۔ ایک پلاٹینم کا تار پ، نلی ف کے پیندے میں پگھلا کر جوڑ دیا جاتا ہے اور اس میں (یعنی ف میں) شعری نلی کا کچھ حصہ نکل آتا ہے۔ ف کے پیندے میں

کچھ پارہ ڈال دیا جاتا ہے اور اس ظرف کے اوپر کے سرے تک سلفورک ترشہ اور پانی کا ہلکا بنا ہوا محلول' جس کو "مرکیورس سلفیٹ" سے سیر شدہ بنا کر بھرا جاتا ہے۔ لمبی نلی ا ب میں پلاطینم کا ایک دوسرا تار پ پگھلا کر جوڑ دیا جاتا ہے۔ شعری نلی میں پارہ کی ہلالی سطح کو خوردبین خ سے دیکھا جاتا ہے۔

م۱ اور م۲ دو مزاحمتوں کے بکس ہیں اور عہ، بہ، جہ پیرافن موم کے کندے میں سوراخ ہیں جن میں پارہ بھر دیا جاتا ہے۔ ق ایک ذخیرہ خانہ ہے، ک۱ اور ک۲ دو کنجیاں ہیں اور ش کا زمین کے ساتھ تعلق کر دیا جاتا ہے۔

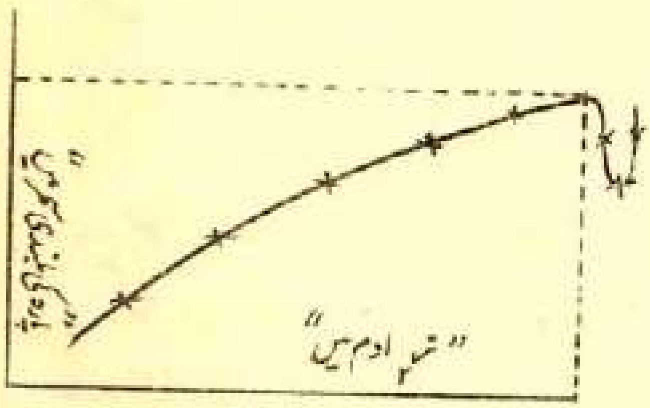
شکل ۱۴۱ کے مطابق اس میں دکھائے ہوئے ضروری چیزوں کو جوڑ دینے کے بعد' ا ب میں دباؤ کو اس طرح بڑھاؤ کہ پارہ شعری نلی میں سے باہر نکلنے لگے، اور پھر دباؤ کو اتنا کم کر دو کہ نلی ا ب میں پارہ کسی موزوں مقام پر ٹھہر جائے۔ اس طرح کرنے سے برق پیما کی حساسیت بڑھ جاتی ہے۔ شعری نلی میں پارہ کا سطحی تناؤ' عہ اور بہ کے درمیانی فرق قوہ کا کوئی تفاعل ہے۔ تجربہ میں' عہ اور بہ کو ملاؤ' اس طرح کہ پ اور پَ کے درمیان فرق قوہ صفر ہو جائے اس حالت میں د کو اس طرح ترتیب دو کہ شعری نلی میں پارہ کی ہلالی سطح' خوردبین کے چشمہ کے پیمانہ پر کسی موزوں مقام پر ٹھہر جائے۔ م۱ اور م۲ مزاحمتوں کو اب اس طرح ترتیب دو کہ ان کا مجموعہ ہمیشہ دس ہزار اوم کے مساوی ہو۔

ق خانہ کو علیحدہ کر دو اور ط اور جہ کو ملاؤ (جس طرح کہ نقطہ دار خط سے شکل میں دکھایا گیا ہے) ک۱ اور ک۲ کنجیوں کو دباؤ۔ جب بہ، جہ کے ساتھ جوڑ دیا جائے تو شعری نلی میں پارہ کی ہلالی سطح کی حرکت' خوردبین میں نظر آئے گی' اب د کو اتنا اونچا کرو کہ پارہ کی ہلالی سطح پھر خوردبین کے پیمانہ میں اسی نشان پر آ جائے جس پر وہ پہلے تھی۔ ا ب میں پارہ کی سطح کے نشانات پیمانہ پر پڑھ لو۔ اس طرح م۱ اور م۲ مزاحمتوں کو بدل

بدلکر لیکن ہر صورت میں ان دونوں کی حاصل جمع مزاحمت دس ہزار اوم کے مساوی ہونی ضروری ہے) ا ب میں پارہ کی اوپر کی سطح جن درجوں کے مقابل رہے ان کے مشاہدات اس وقت حاصل کرو جبکہ خوردبین والے چشمے کے پیمانہ پر، پارہ کی ہلالی سطح، اپنے ابتدائی نشان پر آجائے۔

م۲ کی مزاحمتوں کو، ا ب میں متناظر درجوں کی قیمتوں کے مقابلہ میں مرتسم کرو۔ شکل ۴۲ کے مطابق ایک منحنی حاصل ہوگی۔

اگر ق ذخیرہ خانہ کا ق۔م۔ب، م۲ بکس م۲ کی مزاحمت اور برق پیما کے سروں کے درمیان فرق تو وہ ق۲ ہو تو ق۲ = $\frac{ق\,م_۲}{۱۰۰۰۰}$



شکل ۴۲

ترسیم سے م۲ کی وہ قیمت حاصل کرو جو ا ب میں پارہ کی اعظم بلندی کے متناظر ہوتی ہے۔ پھر م۲ کی اس قیمت سے ق۲ کی قیمت دریافت کرو۔

دو خانوں کے برقی محرکوں کے مقابلہ میں، رو پیما کے بجائے یہ برق پیما استعمال کیا جا سکتا ہے اس غرض کے لئے کہ کنجی کو کھول دو اور ط اور جہ کے درمیان ایک خانہ ق۱ (جس کے ق۔م۔ب کا مقابلہ معیاری خانہ کے ساتھ کرنا ہو) جوڑ دو۔ م۱ کی مزاحمت کو اب اس طرح ترتیب دو کہ شعری نلی والے پارے کی ہلالی سطح میں، ب کو جہ یا ع کے ساتھ جوڑنے سے، کوئی حرکت نہ ہونے پائے۔ فرض کرو کہ بکس م۲ کی مزاحمت، تعادل کی صورت میں م۲ ہے۔ اس کے بعد بجائے ق۱ کے معیاری خانہ کو، ق۱ کی جگہ جوڑ دو۔ تعادل کے لئے پھر تجربہ کو اس طرح دہراؤ کہ م۱ اور م۲ کا مجموعہ

ہر حالت میں دس ہزار اوم کے مساوی رہے۔

اگر ش۲، نکیس ش۲ کی مزاحمت اس صورت میں ہو تو

$$\frac{\text{ق}}{\text{ق}_{۱}} = \frac{\text{ش}_{۲}}{\text{ش}_{۱}}$$

اس ترتیب کو دیلے کے توہ پیماسے موسوم کیا جاتا ہے۔

لاپلاس والا سطحی تناؤ کا سالمی نظریہ (۲۲) :-

کسی شئے کے بین السالماتی فاصلے جب ایک خاص حد سے (جو بہت چھوٹی ہوتی ہے) بڑھ جاتے ہیں تو کسی دو سالمات کے درمیان قوت جاذبہ بالکل کم ہو جاتی ہے۔

ہر سالمہ کے گرد اگر ہم کرے اس طرح کھینچیں کہ ان کا نصف قطر ایسے اعظم ممکن فاصلہ کے مساوی ہو جہاں سے دوسرے سالمہ پر قابل لحاظ قوت جاذبہ عمل کر سکے تو ایسے کروں کو "سالمی کشش کے کروں" سے موسوم کیا جاتا ہے۔

گیس کی حالت کے برخلاف، مائع کی حالت میں کسی شئے کے سالمات ایک دوسرے کے بالکل قریب رہتے ہیں۔ یعنی اس صورت میں سالمی کشش کا کرہ سالمات کی ایک کثیر تعداد کو اپنے گرفت میں رکھتا ہے جن میں سے ہر ایک پر ایک خاص کششی قوت عمل کرتی ہے۔ نیوٹن کے تیسرے کلیۂ قوت کی رو سے عمل اور ردعمل ہمیشہ مساوی اور متضاد ہوتے ہیں۔ لہذا مائع کے اندر ہر سالمہ کو اس کے قریب کے دیگر سالمات مساوی قوت سے مختلف سمتوں میں جذب کرتے رہتے ہیں جس سے سالمہ اپنے ابتدائی مقام پر قائم رہتا ہے۔

ایک ایسے سالمہ پر اگر غور کیا جائے جو مائع کی آزاد سطح سے قریب ہوتا ہے تو ظاہر ہے کہ یہ بالکل مختلف حالات کے تحت رہتا ہے۔

سالمات گیس کی یا بخار کی حالت میں جو مائع کی سطح کے اوپر رہتے ہیں چونکہ ان کے درمیانی فاصلے بہت زیادہ ہوتے ہیں اس لئے مائع کی سطح پر کے سالمات

والے سالمی کشش کے گردوں کے اثر سے باہر ہوتے ہیں جس سے سطح پر کا کوئی سالمہ صرف اپنے گرد کے سطحی سالمات اور دیگر ایسے سالمات کی کشش سے جو سطح کے نیچے اس کے قریب میں واقع ہوتے ہیں متاثر ہوتا ہے۔ لہذا جب کوئی سالمہ مائع کے اندر سے سطح تک پہنچتا ہے تو اس کا مطلب یہ ہے کہ اپنے حاصل کشش کو، جو مائع کے اندر اس کو واپس کھینچ لیجانے کا تقاضا رکھتی ہے، مغلوب کر لیا، اور ظاہر ہے کہ اس طرح مائع کے اندر سے سطح تک پہنچنے میں سالمہ کو کام کرنا ہوگا جو اس کی توانائی بالفعل کے خرچ سے کیا جاتا ہے۔ لیکن مائع کی تپش کا انحصار اس کے سالمات کی توانائی بالفعل پر ہوتا ہے، اور چونکہ مائع کی سطح کی تپش بھی وہی ہوتی ہے جو اس کے اندرونی حصص کی ہے لہذا ایک سالمہ جو سطح تک پہنچتا ہو توانائی بالفعل میں اضافہ کے ساتھ مائع کی سطحی تپش میں بھی، بیرونی مبدا سے حرارت حاصل کرکے اضافہ کرتا ہے۔

جب کسی مائع کی سطح پھیلتی ہے تو اسکا رقبہ بڑھتا ہے جس کی وجہ سے سالمات کی ایک بڑی تعداد جو پہلے مائع کے اندر تھی اب مائع کی سطح پر آجاتی ہے۔ ان سالمات کی توانائی بالفعل وہی ہونے کے لئے جو مائع کے اندرونی سالمات کی ہے، بیرونی ذرائع سے حرارت کا داخل ہونا ضروری ہے تاکہ تعادل قائم رہے۔ اس طرح جب حرناگزار حالات کے تحت کسی مائع کی سطح پھیلتی ہے تو ہمیشہ تبرید کے اثرات ظاہر ہوتے ہیں۔ سالمات جو مائع کی سطح پر ایک دوسرے کے بالکل قریب واقع ہوتے ہیں آپس میں ایک خاص قوت سے چمٹ جاتے ہیں۔ اس کا نتیجہ یہ ہوتا ہے کہ مائع کی سطح کھنچی ہوئی لچک دار جھلی کی طرح عمل کرتی ہے جس سے سطحی تناؤ کے وجود کا پتہ چلتا ہے۔

جب کوئی سالمہ مائع کی سطح سے باہر فضا میں نکل جاتا ہے تو مائع کے اندر ہی سے اس کی رفتار اتنی تیز ہوتی ہے کہ سطحی سالمات کی کشش اس کو روک کر قابو میں نہیں رکھ سکتی۔ لہذا جب کسی مائع میں تبخیر کا عمل ہوتا ہے تو صرف

زیادہ تیز حرکت والے سالمات مائع سے باہر کی فضا میں نکل جاتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ اسکا اثر ہمیشہ تبرید ہوتا ہے جو مائع کے تبخیر کا نتیجہ ہے کیونکہ تبخیر کے عمل کو جاری رکھنے کے لئے یہ ضروری ہے کہ سالمات بیرونی ذرائع سے حرارت حاصل کرتے ہیں کسی مائع کے ایک گرام کو بخار میں تبدیل کرنے کے لئے اسکی مخفی حرارت کے مساوی مقدار حرارت اس میں داخل کرنی ہوتی ہے۔ حرارت کی یہ مقدار اس کام کے مساوی ہوتی ہے جو ایک گرام مائع کے سالمات کو اس کی اندرونی سطح سے، آزاد سطح تک اور پھر آزاد سطح سے سطحی سالمات کے کشش اثر کے باہر فضا میں، پہنچانے کے لئے درکار ہوتا ہے۔

اس سے ظاہر ہے کہ سطحی تناؤ اور مائع کے بخار کی حرارت مخفی میں ضرور کوئی خاص تعلق ہے۔ تبخیر کی تپش جب بڑھتی ہے تو کسی مائع کے بخار کی حرارت مخفی گھٹنے لگتی ہے، اس لئے تپش کے اضافہ سے سطحی تناؤ کی قیمت کو بھی گھٹنا چاہیئے۔

اوپر بیان کیا گیا ہے کہ تیل کی ایک پتلی جھلی اگر پانی پر موجود ہو، تو پانی کا سطحی تناؤ کم ہو جاتا ہے، اس کی وجہ غالباً یہ ہے کہ پانی اور تیل کے سالمات میں قوت کشش بالکل کم ہوتی ہے اس لئے سطح پہ پانی کے سالمات کی درمیانی فضا میں جب تیل کے سالمات گھس جاتے ہیں تو پانی کے سالمات کے لئے یہ امر بہت دشوار ہو جاتا ہے کہ اس پہلی بڑی قوت سے آپس میں اسطرح چمٹ جائیں جیسا کہ تیل کی عدم موجودگی میں وہ چمٹ جایا کرتے تھے۔ اسوجہ سے پانی کے سطحی تناؤ میں کمی واقع ہوتی ہے۔

اب ہم یہاں ایک ایسے نظریہ کو عام فہم شکل میں بیان کرنا چاہتے ہیں جو لاپلاس اور اس کے ساتھیوں نے پہلے پہل دنیا کے سامنے پیش کیا:۔

بخار کی حرارت مخفی:۔ فرض کرو کہ ک کمیت کا ایک سالمہ کسی مائع کی سطح سے ہلکر، اوسکے اوپر کی خالی فضا میں ایک ایسے فاصلہ پر پہنچ جاتا ہے جو سالمی کششی کرہ کے نصف قطر سے زیادہ ہے۔ ظاہر ہے کہ سالمہ پر کام صرف اس وقت کیا

جائے گا جب کہ وہ سطح سے، سالمی کشش کے نصف قطر کے فاصلے کی حد سے باہر ہو گا۔ سالمی کشش کی قوتوں کے کلیہ کو فرض کرنے کے بغیر یہ تصور کرو کہ سالمی کشش کے نصف قطر ص کو عین سطح مائع کے اوپر ہم طول کے ن چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ اس طرح ہر چھوٹے ٹکڑے یا عنصر کا طول $\frac{\text{ص}}{\text{ن}}$ کے مساوی ہو گا۔ فرض کرو کہ سالمہ پر قوت جبکہ وہ ان عناصر کے پہلے عنصر میں گزرتا ہے ک ثہ ق$_1$ کے مساوی اور، جبکہ وہ دوسرے عنصر میں سے گزرتا ہے ک ثہ ق$_2$ کے مساوی ہے۔ علیٰ ہذالقیاس آخری عنصر میں جب سالمہ گزرتا ہے تو قوت ک ثہ ق$_{\text{ن}}$ ہو گی جہاں ثہ = مائع کی کثافت اور ق$_1$، ق$_2$، ق$_3$ ...... وغیرہ سطح سے فاصلوں پر منحصر ہوں گے اور ان کی قیمتیں بتدریج گھٹتی جائیں گی۔

پہلے عنصر کو طے کرنے میں کام جو کیا گیا = ک ثہ ق$_1$. $\frac{\text{ص}}{\text{ن}}$

دوسرے " " " = ک ثہ ق$_2$ $\frac{\text{ص}}{\text{ن}}$

اسی طرح مجموعی کام جو سالمہ پر ن عنصروں میں گزرنے، یعنی فاصلہ ص طے کرنے میں کیا گیا

$$= \frac{\text{ص}}{\text{ن}} \left\{ \text{ک ثہ ق}_1 + \text{ک ثہ ق}_2 + \text{ک ثہ ق}_3 + \ldots\ldots + \text{ک ثہ ق}_{\text{ن}} \right\}$$

$$= \text{ک ثہ ص} \left\{ \frac{\text{ق}_1 + \text{ق}_2 + \text{ق}_3 + \ldots\ldots \text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ن}} \right\}$$

$$= \text{ک ثہ ص ق} \quad \text{جہاں ق} = \frac{\text{ق}_1 + \text{ق}_2 + \text{ق}_3 + \ldots\ldots + \text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ن}}$$

"لیکن کسی سالمہ کو مائع کے اندر سے مستوی سطح تک لانے میں جو کام کیا جاتا ہے وہ اس کام کے مساوی ہوتا جو سالمہ کو مائع کی سطح سے، مائع کی اوپر کی فضا میں ایسے فاصلے تک لیجانے میں کرنا ہوتا ہے جو سالمہ کے کششی قوت کی حد سے باہر ہو"

لہذا ایک سالمہ کو مائع کے اندر سے مستوی سطح تک لانے اور پھر یہاں سے

سطح کی اوپر کی فضا میں، سالمی کشش قوت کی حد سے باہر لے جانے میں جو کام کیا جائے گا وہ = ۲ک ثہ ص ق

فرض کرو کہ مائع کے اکائی حجم میں سالمات کی تعداد = ع

تب اکائی حجم مائع کی کمیت = ک ع = ثہ

لہٰذا ع سالمات کو مائع کی سطح سے اوپر کی فضا میں لے جانے کے لئے کام

= ع ک ثہ ص ق = ثہ² ص ق = گ ع (فرض کرو)

اکائی حجم کے مائع کی تبخیر کی صورت میں، اکائی حجم میں جو سالمات موجود ہوتے ہیں، وہ سطح کے اندر سے کشش کرے کی حد کے باہر تک فاصلہ طے کرتے ہیں اور چونکہ اکائی حجم کے سالمات کی کمیت = ثہ لہٰذا کام جو اس صورت میں کیا جائے گا

= ۲ ثہ² ص ق = ۲ گ ع

اگر مائع کی فی اکائی کمیت حرارت مخفی مخ ہو تو

ثہ مخ جو = ۲ گ ع .... (۶۵)

جہاں جو = حرارت کی اکائی مقدار کا معادل حیلی۔

کسی مائع کی تمدیدی طاقت :-

فرض کرو کہ ا ب (شکل ۴۳) کسی مائع کی سطح کے اندر کھینچے ہوئے ایک فرضی ستوی کی تراش کو تعبیر کرتا ہے۔



شکل ۴۳

مائع کی تمدیدی طاقت سے ا ب کے فی مربع سم پر عمل کرنے والی وہ قوت مراد ہے (مثلاً ثہ ڈائین فی مربع سم) جو ا ب کے اوپر کے مائع کو نیچے کے مائع سے علیحدہ کرنے کے لئے درکار ہوگی۔

ا ب کے نیچے کا مائع ان تمام سالمات کو جذب کریگا جو ا ب کے اوپر فاصلہ ص کے اندر واقع ہوں۔

چونکہ ۱ ب کے فی مربع سمر پر مجموعی قوت تہ عمل کرتی ہے لہذا ۱ ب کے اوپر اگر مائع میں ایک چھوٹا سا فاصلہ فہ ہٹاؤ واقع ہو تو فی اکائی رقبہ جو کام کیا جائے گا تہ فہ ہوگا، یہ کام اس قوت کشش کو مغلوب کرنے کے کام کے مساوی ہوگا جس قوت سے ۱ ب کے نیچے کا مائع، ۲ ب کے اُن اوپر کے سالمات پر عمل کرتا ہے (جو کہ ص موٹائی اور اکائی رقبہ والے مائع کی ایک پرت میں واقع ہوتے ہیں) فرض کرو کہ ص موٹائی کی اس پرت کو ہم سالمات کے ن پرتوں میں تقسیم کرتے ہیں اور ان میں سے ہر ایک پرت میں فی اکائی رقبہ ع سالمات ہیں۔

اس صورت میں ص موٹائی اور اکائی رقبہ والی پوری پرت کی کمیت، ن ع ک کے مساوی ہوگی جہاں ک ایک سالمہ کی کمیت ہے۔

لہذا کمیت فی اکائی حجم = $\frac{\text{ن ع ک}}{\text{ص}}$ = ثہ = مائع کی کثافت

∴ ن ع ک = ثہ ص

فرض کرو کہ ۱ ب کے نیچے کا مائع جس قوت سے، ۲ ب کی اوپر والی پہلی پرت کے ہر سالمہ پر عمل کرتا ہے وہ ک ثہ ق۱ کے مساوی ہے اور دوسرے، تیسرے .... ن ویں پرت تک قوتیں بالترتیب ک ثہ ق۲، ک ثہ ق۳ .... ک ثہ قن کے مساوی ہیں۔ جب ۱ ب کے اوپر اور عین نیچے کے مائع کے درمیان چھوٹا سا نقل مکان فہ واقع ہو تو سالمات کی ہر پرت میں بھی یکساں فاصلہ فہ کا نقل مکان اس قوت کے مقابلہ میں واقع ہوگا جو ۱ ب کی طرف اُن کو کھینچتی ہو۔

مائع جس قوت سے پہلی پرت کے تمام سالمات کو جذب کرتا ہے وہ ک ع ثہ ق۱ کے مساوی ہے۔ لہذا فہ نقل مکان کی وجہ سے جو کام ہوا = ک ع ثہ ق۱ فہ

اسی طرح دوسری پرت کے لئے کام = ک ع ثہ ق۲ فہ

لہذا مجموعی کام جو تمام پرتوں کی کشش کو مغلوب کرنے میں کیا گیا

= ک ع ثہ ق۱ فہ + ک ع ثہ ق۲ فہ + ... + ک ع ثہ قن فہ

= ک ن ع ثہ فہ { (ق۱ + ق۲ + ق۳ + ... قن) / ن }

= ثہ۲ ص فہ ق = گ‌ئ فہ = تہ فہ

∴ گ‌ئ = تہ .... (۶۶)

لہذا مساوات (۶۵) اور (۶۶) سے مخ اور تہ کے درمیان ہمیں ایک راست تعلق حاصل ہو جاتا ہے۔ لیکن اس نظریہ میں مائع کے سالمات کی حرکت کا کوئی لحاظ نہیں رکھا گیا، اس کی وجہ یہ ہے کہ لاپلاس کا یہ نظریہ اس وقت پیش کیا گیا تھا جبکہ گیسوں اور مائعات کے نظریہ تحرک کی بنیاد قائم نہیں ہوئی تھی۔

ہمیں اب اس بات کا علم ہے کہ جیسے تپش بڑھتی ہے، سالمات کی رفتار بھی بڑھنے لگتی ہے لہذا گ‌ئ کی قیمت کم ہونے لگتی ہے۔ یعنی اسکا مطلب یہ ہے کہ مائع کی تمدیدی طاقت کم ہونے لگتی ہے۔

اب فانڈر وال کی مساوات پر غور کرو جس سے کسی گیس یا مائع کے دباؤ د اور حجم ح کے درمیان تعلق ظاہر ہوتا ہے :-

(د + ا/ح۲) (ح − ب) = ر ت .... (۶۷)

جہاں ا، ب اور ر مستقل ہیں اور ت مطلق درجوں میں تپش ہے۔

حرارت کی کتابوں سے یہ ظاہر ہے کہ اس مساوات میں ا/ح۲ اس قوت کشش کو تعبیر کرتا ہے جو ایک مربع سمر رقبہ کے مستوی پر مقابل کے رُخ کے سالمات لگاتے ہیں۔ پس جب کوئی شے مائع کی حالت میں ہوتی ہے تو ا/ح۲ کی قیمت وہی ہوتی ہے جو گ‌ئ کی ہے۔

اگر اوپر کی مساوات کسی شے کے ایک گرام پر صادق آتی ہے تو ا/ح اس شے کی کثافت ثہ ہو جاتی ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ گ‌ئ، ا/ح کے

یا ت² کے متناسب ہے۔

پانی کے لئے تجربہ سے "گ" کی قیمت بھی ۱/ح² کے رتبہ کی حاصل ہوئی ہے۔
اس سے لاپلاس کے نظریہ کی تصدیق عجیب طرح سے ہوتی ہے۔

سطحی تناؤ:- شکل ۲۴۳ میں مستوی ا ب کے اوپر کے مائع کو ' ا ب کے نیچے کے مائع سے اس طرح علیحدہ کریں کہ درمیانی فاصلہ ص سے زیادہ ہو جائے تو مائع کی دو نئی سطح ہمیں حاصل ہوں گی۔ چونکہ کسی مائع کا سطحی تناؤ اس کام کے مساوی ہے جو مائع کی سطح میں اکائی رقبہ کا اضافہ کرنے کے لئے درکار ہوتا ہے لہذا ا ب کے ہر اکائی رقبہ کے لئے کام جو کرنا ہوگا وہ زیر بحث دو سطحوں کی وجہ سے مائع کے سطحی تناؤ کا دوگنا ہوگا۔

ہم یہاں یہ فرض کر لیتے ہیں کہ قوت کشش اس وقت تک مستقل رہتی ہے جب تک کہ سالمہ، سطح ا ب سے فاصلہ ص طے نہیں کرتا اور اس کے بعد وہ بالکل صفر ہو جاتی ہے۔

یہ اگرچہ کہ غیر تشفی بخش مفروضہ ہے لیکن اس سے ہمیں بہت سی قیمتی معلومات حاصل ہوں گی۔

جب ا ب کے اوپر کا مائع ' اس مستوی کے علی القوائم ہٹایا جاتا ہے تو سالمات کے پرت یکے بعد دیگرے ا ب کے نیچے کے مائع کی سالمی کشش قوت کے حد سے باہر گزرتے ہیں، حتیٰ کہ تمام پرتیں اس حد کے باہر ہو جاتے ہیں جبکہ نقل مکان ص ہوتا ہے۔ لہذا ' ص نقل مکان کے دوران میں ' ا ب کے نیچے کے مائع سے سالمات کے جن پرتوں پر قوت کشش عمل کرتی ہے، ان پرتوں کی اوسط تعداد ن/۲ ہوگی۔

جہاں ن سالمات کے پرتوں کی وہ مجموعی تعداد ہے جس میں ص پہلے کی طرح تقسیم کیا جاتا ہے لہذا مساوات (۶۲) کے حاصل کرنے میں جو طریق عمل اختیار کیا گیا تھا اسی طرح یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ کام جو کیا جاتا ہے وہ

$\left(\frac{\text{گ ع}}{۲} \times \text{ص}\right)$ کے مساوی ہے۔

لیکن یہ کام جیسا کہ اوپر بیان کیا گیا ہے مائع کے سطحی تناؤ کا دوگنا ہوتا ہے۔

$$\therefore ۲\text{س} = \frac{\text{گ ع ص}}{۲}$$

$$\text{یعنے س} = \frac{\text{گ ع ص}}{۴} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۶۸)$$

اس مساوات سے ص کی کم از کم ممکن قیمت حاصل ہوتی ہے جو سالمی کشش کا نصف قطر ہے۔ پانی کے لئے صفر درجہ مئی پر س = ۷۶ $\frac{\text{ڈائین}}{\text{سمر}}$

اور گ ع = ۲۶ر۱۰۲۲ × $۱۰^{۱۰}$ $\frac{\text{ڈائین}}{\text{مربع سمر}}$

لہذا پانی کے لئے ص کی کم از کم قیمت ۴ر۲ × $۱۰^{-۸}$ سمر حاصل ہوتی ہے ینگ نے ص کی کمترین قیمت دریافت کرنے کے لئے اس طریقہ کو استعمال کیا تھا۔

اوپر جو مساوات (۶۸) حاصل کی گئی ہے یہ کچھ زیادہ اطمینان کے قابل نہیں ہے۔ بعد میں یہ فرض کرنے کے بعد کہ دو سالمات ایک دوسرے کو ایسی قوت سے جذب کرتے ہیں جو ان کے مرکزوں کے درمیانی فاصلہ کی ن ویں طاقت سے تناسب معکوس رکھتی ہے س اور گ ع کے درمیان حسب ذیل تعلق دریافت کیا گیا ہے۔

$$\frac{\text{س}}{\text{گ ع}} = \frac{۳}{۱۶} \cdot \frac{(\text{ن} - ۴)}{(\text{ن} - ۵)} \cdot \text{ف}$$

جہاں ف = سالمی قطر

اس مساوات سے ظاہر ہے کہ ن کی قیمت ۵ سے زیادہ ہونی چاہئے۔ اکثر مائعات کے لئے تجربہ سے تصدیق کے بعد یہ دریافت کیا گیا ہے کہ

$$\frac{ف}{۴} = \frac{س}{گ ع}$$

اس مساوات سے ن کی قیمت ۸ ہونی چاہیئے۔ لہذا اس سے ظاہر ہے کہ سالمی کشش قوت فاصلہ کی ۸ ویں طاقت سے تناسب معکوس رکھتی ہے۔

مائع کی سطح سے نکل کر باہر جانے والے سالمہ کی رفتار :-

ایک ایسے سالمہ کے لئے جو مائع کی سطح کے نیچے ص فاصلہ پر ہو اس بات کا امکان ہے کہ سطح کو پہنچنے تک یہ دوسرے سالمات کے ساتھ متعدد دفعہ متصادم ہو۔ ہر تصادم کے ساتھ سالمہ کی رفتار میں تبدیلی واقع ہوتی ہے۔ اس لئے مائع کی سطح کے نیچے کسی سالمہ کی رفتار کا تعین ناممکن ہے اور یہ بھی یقین کے ساتھ نہیں کہا جا سکتا کہ آیا اس کی کوئی خاص رفتار سطح کے باہر اس کو لے جائے گی یا نہیں۔

اگر کوئی سالمہ مائع کی سطح کو انتصاباً س رفتار سے چھوڑتا ہو تو وہ اس صورت میں باہر بچ نکلے گا جبکہ اس کی توانائی بالفعل، اس کام سے زیادہ ہو جو اس کو مائع کے سالمی کشش کی حد سے باہر لے جانے کے لئے درکار ہوتا ہے۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ ع سالمات کو مائع کی سطح سے اوپر کی فضا میں لے جانے کے لئے گ ثہ² کام درکار ہوتا ہے جہاں ع مائع کے اکائی حجم میں سالمات کی تعداد ہے۔

چونکہ ثہ = ک ع لہذا ک کمیت کے ہر سالمہ کو لے جانے میں کام جو کرنا ہوتا ہے

$$= \frac{گ ثہ^2}{ع} = \frac{ک گ ثہ^2}{ثہ}$$

لہذا ایک سالمہ باہر نکل جائے گا اگر

$\frac{1}{2}$ ک سا^{2} > $\frac{\text{ک گ ع}}{\text{ثہ}}$

یعنی اگر سا^{2} > $\frac{\text{۲ گ ع}}{\text{ثہ}}$

پانی کے لئے صفر درجہ مئی پر چونکہ ثہ کی قیمت ۱ ہوتی ہے اور گ ع =

= ۱٫۲۶ × ۱۰^{۱۰} $\frac{\text{ڈائمین}}{\text{مربع سمر}}$

لہذا سا کی قیمت ۱٫۴۵ × ۱۰^{۵} $\frac{\text{سمر}}{\text{ثانیہ}}$ سے زیادہ ہونی چاہیئے۔

لیکن بخار کی حالت میں پانی کے سالمہ کی اوسط رفتار صفر درجہ مئی پر

= ۶ × ۱۰^{۴} سمر فی ثانیہ

لہذا اس سے ظاہر ہے کہ ایک سالمہ، مائع کی سطح کے باہر نہیں نکل سکتا جب تک کہ اس کی رفتار اس کے ہمسایہ سالمات کی اوسط رفتار سے زیادہ نہ ہو۔

Chapter VII.

(١) Properties of Matter "Wagstaff" P237, (1924)
(٢) " " " P233, (1924)
(٣) General Physics for Students "Edser," P305 (1926)
(٤) Properties of Matter "McEwen". P214 (1923)
(٥) Properties of Matter "Poynting & Thomson", P152 (1922)
(٦) " " " P154, (1922)
(٧) Wiedemann's Annalen, 30 P209
(٨) Pogg Annalen, 119, 176 (1863) or
Advanced Practical Physics "Worsnop & Flint" P125 (1927)
(٩) Advanced Practical Physics "Worsnop & Flint" P143, (1927)
(١٠) " " " P142, (1927)
(١١) Phil Mag; 30, 386, (1890)
(١٢) Phil. Mag. 44, 369 (1897)
(١٣) Phil. Mag. Feb. & April (1916)
(١٤) Proc Phys. Soc. 36, 73 (1923)
(١٥) " " 44, 511, (1932)
(١٦) " " 45 88 (1933)
(١٧) Phil. Mag. 4,358 (1927)
(١٨) Properties of Matter "Newman & Searle" P171 (1928)
(١٩) Wiedemann's Annalen, 27, 448 (1886)
(٢٠) Properties of Matter "Poynting & Thomson". P167 (1922)
(٢١) Electricity and Magnetism "J. H. Jeans" P81 (1925)
(٢٢) General Physics for students "Edser" P289, P351 (1926)

آٹھواں باب

لزوجیت

مائع اگر کسی نالی میں سے بہہ رہا ہو تو اس کے مختلف پرت مختلف رفتاروں کے ساتھ ایک دوسرے پر سے پھسلتے ہوئے حرکت کرتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ اوپر کے پرت کی رفتار، نچلے پرتوں کی رفتار سے اس وجہ سے زیادہ ہوگی کہ نچلے پرت نالی کی سطح سے چمٹے ہوئے ہوتے ہیں۔ نالی کی نچلی سطح پر مائع کی رفتار اسی لئے صفر تصور کی جاتی ہے۔ کناروں پر بھی درمیانی حصوں کی بہ نسبت مائع کی رفتار بہت کم ہوا کرتی ہے۔

اگر کسی شعری نلی میں سے مائع بہہ رہا ہو تو نلی کی سطح کے قریب رفتار بہت کم اور محور پر بہت زیادہ ہوتی ہے۔ ایسی صورت میں مائع کے پرتوں کی رفتار میں ان کے درمیانی فاصلوں اور مائع کی لزوجیت کے لحاظ سے تبدیلی ہوتی رہتی ہے۔

ٹھوس اشیاء میں استواری کے معیار سے بحث کی گئی تھی لیکن مائعات اور گیسوں میں استواری کے معیار کے بجائے "لزوجیت" سے بحث کی جاتی ہے۔ میکسول کے کہنے کے مطابق قدر لزوجیت اس قوت کو کہتے ہیں جس کی وجہ سے یکائی رقبہ والی دو ایسی سطحوں کے درمیان جو ایک دوسرے سے یکائی فاصلہ پر ہوں یکائی تفاوت رفتار پیدا ہوتی ہے۔

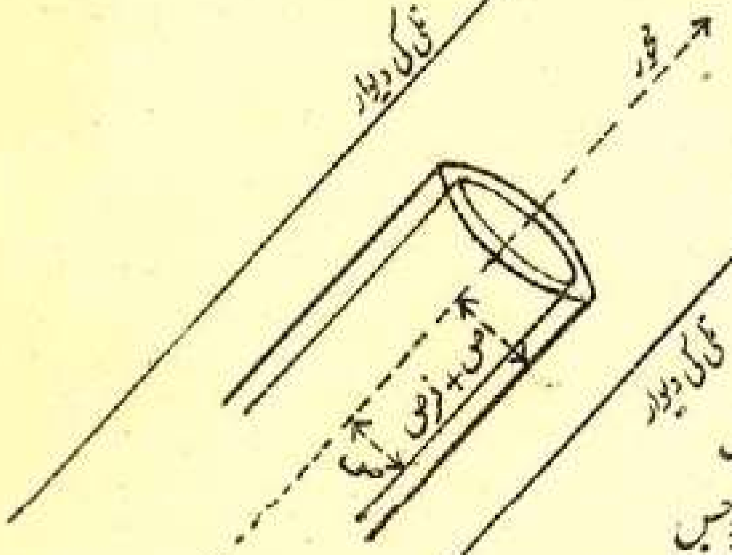


شکل ۸۔۱

چنانچہ لزوجت لہ = $\dfrac{\dfrac{\text{قوت}}{\text{رقبہ}}}{\dfrac{\text{تفاوت رفتار}}{\text{سطحوں کا درمیانی فاصلہ}}} = \dfrac{\dfrac{\text{ق}}{۲}}{\dfrac{\text{س}}{\text{لا}}} = \dfrac{\text{ق لا}}{\text{۲ س}}$

اس سے لہ کی تعریف کی جا سکتی ہے۔

(۱) **شعری نلی میں سے مائع کا بہنا :۔** مائع کو ہم چونکہ پچکا نہیں سکتے لہٰذا کسی نلی میں جتنے حجم کا مائع داخل ہوگا اتنا ہی اس میں سے خارج بھی ہوگا۔



تشکل ۲

شکل ۲ میں ایک شعری نلی بڑے پیمانہ پر دکھائی گئی ہے جس میں مائع بہہ رہا ہے۔ اس مائع کے ایک ایسے اسطوانہ پر غور کرو جس کا طول یکائی اور اندرونی نصف قطر ص اور بیرونی نصف قطر ص + فرص ہے۔ فرض کرو کہ مائع کی اندرونی سطح کی رفتار س + فرس (محور کے قریب ہونے کی وجہ سے) اور بیرونی سطح کی س ہے۔

میکسول کے کلیہ کی رو سے اس اسطوانہ کی اندرونی سطح پر مماسی قوت
= ۲ π ص لہ $\dfrac{\text{فرس}}{\text{فرص}}$ = ص کا کوئی تفاعل = ف (ص)

اور مماسی قوت اُس اسطوانہ کی بیرونی سطح پر = ف (ص + فرص) =

= ف (ص) + فرص فَ (ص)

لہذا حاصل قوت مائع کے اسطوانہ پر = ف (ص + فرص) - ف (ص)

= فرص فَ (ص)

$= \text{فرص}\ 2\pi\ \text{لہ} \frac{\text{فر}}{\text{فرص}} \left(\text{ص} \frac{\text{فرس}}{\text{فرص}} \right)$

فرض کرو کہ نلی کا طول = ل اور اسکے دونوں سروں کا فرق دباؤ = د

اس صورت میں دباؤ فی اکائی طول $= \frac{\text{د}}{\text{ل}}$

اس اسطوانہ پر دباؤ کی وجہ سے حاصل قوت $= 2\pi\ \text{ص فرص} \frac{\text{د}}{\text{ل}}$

اب چونکہ مائع کی حرکت یکساں ہے اسوجہ سے کہ وہ چکایا نہیں جارہا ہے۔

$\therefore 2\pi\ \text{ص فرص} \frac{\text{د}}{\text{ل}} + \text{فرص}\ 2\pi\ \text{لہ} \frac{\text{فر}}{\text{فرص}} \left(\text{ص} \frac{\text{فرس}}{\text{فرص}} \right)$

= صفر

یعنی $\text{لہ} \frac{\text{فر}}{\text{فرص}} \left(\frac{\text{ص فرس}}{\text{فرص}} \right) = - \frac{\text{د}}{\text{ل}} \text{ص}$

$\therefore \text{لہ فر} \left(\frac{\text{ص فرس}}{\text{فرص}} \right) = - \frac{\text{د}}{\text{ل}} \text{ص فرص}$

اس کو تکملانے سے $\text{لہ} \frac{\text{ص فرس}}{\text{فرص}} =$

$= - \frac{\text{د}}{\text{ل}} . \frac{\text{ص}^2}{2} + \text{گ}$

جہاں گ = مستقل

یعنی $\text{لہ فرس} = - \frac{\text{د}}{\text{ل}} \frac{\text{ص}}{2} \text{فرص} + \text{گ} \frac{\text{فرص}}{\text{ص}}$

اس کو دوبارہ تکملانے سے $\text{لہ س} = - \frac{\text{د}}{\text{ل}} \frac{\text{ص}^2}{4} +$

$+ \text{گ لوگ}_{\text{و}}\ \text{ص} + \text{گَ}$

جہاں گَ = دوسرا مستقل

اب جبکہ ص = صفر یعنی محور پر رفتار سا جیسا کہ ضابطہ میں اندراج سے حاصل ہوتا ہے ∞ کے مساوی نہیں ہے (بلکہ صرف اعظم ہے) اس لئے گ کو صفر ہونا چاہیئے۔

$$\therefore \text{لہ سا} = -\frac{\text{د}}{\text{ل}}\cdot\frac{\text{ص}^2}{4} + \text{گ}'$$

اب جبکہ ص = ف = نلی کا نصف قطر

تو سا = صفر (کیونکہ نلی کی دیوار پر رفتار صفر ہے)

ان کا اندراج کرنے سے :۔

$$\text{گ}' = \frac{\text{د}}{\text{ل}}\cdot\frac{\text{ف}^2}{4}$$

$$\therefore \text{لہ سا} = \frac{\text{د}}{4\,\text{ل}}\left(\text{ف}^2 - \text{ص}^2\right)$$

$$\text{یعنی سا} = \frac{\text{د}}{4\,\text{ل لہ}}\left(\text{ف}^2 - \text{ص}^2\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

مائع کا وہ حجم جو فی ثانیہ خارج ہوا = حہ = رفتار × رقبہ

$$= \int_{\text{صفر}}^{\text{ف}} \text{سا}\left(2\pi\,\text{ص}\,\text{د ص}\right) = \int_{\text{صفر}}^{\text{ف}} \frac{\text{د}}{4\,\text{ل لہ}}\left(\text{ف}^2 - \text{ص}^2\right) 2\pi\,\text{ص د ص}$$

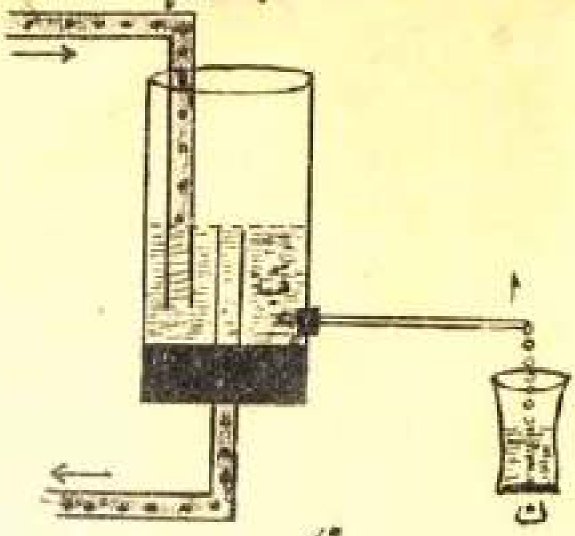
$$= \frac{\text{د}\,\pi\,\text{ف}^4}{8\,\text{لہ ل}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

اس ضابطہ کو پوائیسل نے ۱۸۴۰ء میں حاصل کیا تھا۔

تجربی تفصیلات :۔ شکل ۱۰۳ میں ا ب ایک شعری نلی ہے جو ایک اسطوانہ نما برتن میں قائم کردی گئی ہے۔ برتن میں پانی کی بلندی مستقل رکھی جاتی ہے تاکہ نلی کے سرے ب پر دباؤ مستقل رہے۔

اس بلندی کو اور نیز شعری نلی کو بدل بدل کر مشاہدات لئے جاتے ہیں۔

ن میں پانی کی وہ مقدار جو ایک خاص وقفہ کے بعد جمع ہوتی ہے، تول لی جاتی ہے اور اس طرح فی ثانیہ جمع ہونے والے پانی کا وزن دریافت ہو جاتا ہے۔ چونکہ پانی کی کثافت (جو ایک ہے) ہمیں معلوم ہے لہذا فی ثانیہ جس حجم کا پانی جمع ہوا یا نلی سے خارج ہوا معلوم ہو جاتا ہے۔



شکل ۳۷

اگر د، ف اور ل کی قیمتیں معلوم ہوں تو ہم لہ معلوم کر سکتے ہیں۔

ا پر صرف کرہ ہوائی کا دباؤ ہے اور بَ پر کرہ ہوائی کا دباؤ + ب ج ثہ
جہاں ب = پانی کے اسطوانہ کی بلندی، سطح سے بَ تک اور ثہ = پانی کی کثافت

∴ فرق دباؤ = ب ج ثہ = ب ج چونکہ پانی کے لئے ثہ = ۱

$$\therefore \text{حہ} = \frac{\text{ب ج } \pi \text{ ف}^{4}}{\text{۸ لہ ل}}$$

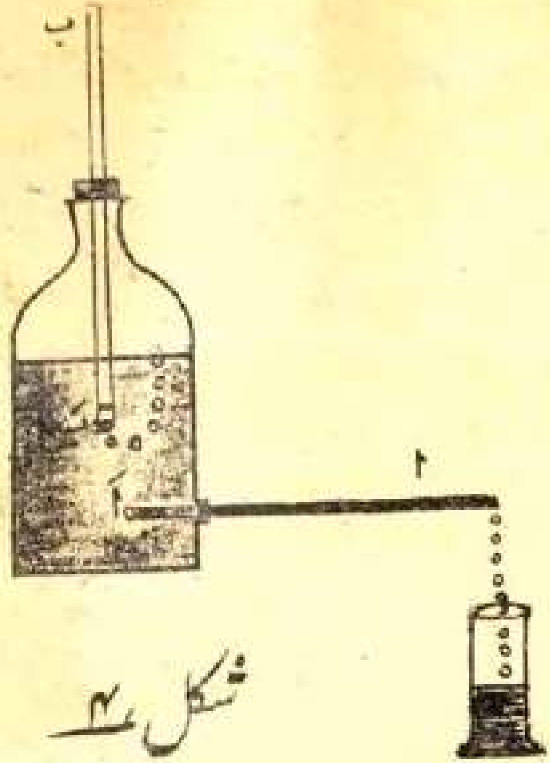
اس سے پانی کیلئے لزوجت معلوم کر سکتے ہیں۔

لزوجت کو ”ڈائین فی مربع سمر فی رفتاری ڈھال“ یا زیادہ سہولت کے لئے ”پوائیسوں“ میں لکھا جاتا ہے۔ اس اصطلاح کو سب سے پہلے ڈیلی اور یارنے سنہ ۱۹۱۳ء میں پیش کیا تھا۔

اگر کوئی مائع لیا جائے تو $\frac{\text{ب ج ثہ } \pi \text{ ف}^{4}}{\text{۸ لہ ل}} = \frac{\text{م}}{\text{ثہ}}$، جہاں م = فی ثانیہ جمع شدہ مائع کی کمیت۔

اسی تجربہ کو شکل ۴۲ کی ترتیب کے مطابق بھی کیا جا سکتا ہے۔

ب بَ ایک معمولی شیشہ کی نلی ہے جو ایک بوتل میں شکل ۴۲ کے مطابق کاک اور موم یا لاک وغیرہ سے جوڑ دی جاتی ہے۔ نچلا سرا ایک مائع میں ڈوبا ہوا ہوتا ہے۔ ا اَ ایک شعری نلی ہے جس میں سے مائع جب باہر نکلتا ہے تو بوتل میں چونکہ ہوا بند ہے، ایک خاص وقت کے بعد نلی کے سرے بَ سے ہوا کے بلبلے نکلنے لگتے ہیں۔



شکل ۴۲

یعنی اس کا مطلب یہ ہوگا کہ بَ پر کرہ ہوائی کا دباؤ ہے جو وہاں مستقل ہوتا ہے۔ اَ پر کے دباؤ کو ہم معلوم کر سکتے ہیں اور یہ، بَ پر کے کرہ ہوائی کے دباؤ + ب ج ثہ کے مساوی ہے جہاں ب سے اَ اور بَ کی درمیانی بلندی مراد ہے جس کو متحرک خوردبین کے ذریعہ معلوم کر لیا جا سکتا ہے۔

اس طرح کے عمل سے یہ فائدہ ہے کہ اَ پر دباؤ مستقل رہتا ہے اور مائع کی زیادہ مقدار لینے کی ضرورت نہیں رہتی۔ اس کو میریٹ کی بوتل سے موسوم کیا جاتا ہے۔

اس تجربہ میں ضروری ہے کہ شعری نلی کے تراش عمودی کا رقبہ حتی الامکان یکساں ہو۔ نلی کے نصف قطر کی چوتھی طاقت ضابطۂ لزوجت میں استعمال ہونے کی وجہ سے نہایت احتیاط کے ساتھ نلی کے نصف قطر کی

قیمت دریافت کرنی ہوگی۔ اس کے لئے نلی کو پارے سے بھر کر' ڈوری کے طول کو نہایت صحت کے ساتھ دریافت کر لینا چاہیئے۔ پھر پارے کو تول کر اس کی معلوم کثافت سے اس کا حجم دریافت کرنا ہوگا۔ پارے کے اس حجم کو اس کی ڈوری کے طول سے تقسیم کرنے سے نلی کے تراش عمودی کا رقبہ معلوم ہو جائے گا۔ اس طرح نصف قطر کی صحیح قیمت معلوم ہو جائے گی۔

چونکہ مائع کی لزوجیت' اس کی تپش کے ساتھ فوراً متغیر ہونے لگتی ہے اس لئے دوران تجربہ میں تپش کو مستقل رکھنا بھی ضروری ہے۔

صحیح ضابطہ :- شعری نلی کے سرے ب پر دباؤ د نہیں ہے جو ب کے اوپر کے حصہ پر ہوتا ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ اوپر والے مائع کا حصہ' لزوجیت کی قوتوں کے باوجود' مائع کو صرف شعری نلی میں' داخل ہی نہیں کرتا بلکہ مائع میں رفتار' یعنی توانائی بالحرکت بھی پیدا کرتا ہے۔ اوپر والے مائع کا حصہ مائع کو متحرک رکھنے کے لئے کام بھی کرتا رہتا ہے' اس لئے دباؤ د' ب ج ثہ کے مساوی نہ ہوگا بلکہ اس سے کم ہوگا کیونکہ مائع کے داخل کرنے اور اس میں توانائی بالحرکت پیدا ہونے سے دباؤ بٹ کر کم ہو جاتا ہے۔

لہذا کام اکائی وقت میں = دباؤ × حہ = ب ج ثہ حہ' بشرطیکہ مائع ساکن ہوتا۔ لیکن یہ کام' مائع کو' لزوجیت والی قوتوں کی مزاحمت کے باوجود' نلی میں داخل کرنے اور اس میں توانائی بالحرکت پیدا کرنے میں صرف ہوتا ہے۔

اور صحیح کام جو اکائی وقت میں ہمیں چاہیئے = د حہ

جہاں د = صحیح دباؤ

اس لئے یکائی وقت میں کام میں فرق = ب ج ثہ حہ − د حہ

= وہ کام جو یکائی وقت میں توانائی بالحرکت پیدا کرنے میں صرف ہوا

$$= \frac{1}{2}\ \text{ثہ} \int_{\text{صفر}}^{\text{ق}} \text{ر}^{2} \times \text{ر}\ 2\pi\ \text{ص ذص}$$

مساوات (۱) اور (۲) کی مدد سے $\text{س} = \frac{۲\,\text{حہ}}{\pi\,\text{ف}^{۴}}\left(\text{ف}^{۲} - \text{ص}^{۲}\right)$

لہذا وہ کام جو اکائی وقت میں توانائی باحرکت پیدا کرنے میں صرف ہوا

$$= \frac{۱}{۲}\,\text{ثہ}\int_{\text{صفر}}^{\text{ف}}\left\{\frac{۲\,\text{حہ}}{\pi\,\text{ف}^{۴}}\left(\text{ف}^{۲} - \text{ص}^{۲}\right)\right\}^{۲} ۲\pi\,\text{ص}\;\text{ذص}$$

$$= \frac{\text{ثہ}\,\text{حہ}^{۲}}{\pi\,\text{ف}^{۴}}$$

$$\therefore\ \text{ب ج ثہ حہ} - \text{د حہ} = \frac{\text{ثہ}\,\text{حہ}^{۲}}{\pi^{۲}\,\text{ف}^{۴}}$$

$$\text{یعنی}\ \text{ب ج ثہ} - \text{د} = \frac{\text{ثہ}\,\text{حہ}}{\pi^{۲}\,\text{ف}^{۴}}$$

$$\text{یعنی}\ \text{ج ثہ}\left(\text{ب} - \frac{\text{حہ}}{\text{ج}\,\pi^{۲}\,\text{ف}^{۴}}\right) = \text{د}$$

اس مساوات سے ظاہر ہے کہ د، ب ج ثہ کے مساوی نہیں ہے بلکہ اس سے کم ہے، یعنی بلندی ب، اصل سے کسی قدر کم ہے لہذا اس تجربہ میں بلندی ب (جو خوردبین سے حاصل ہوتی ہے) میں سے $\frac{\text{حہ}}{\text{ج}\,\pi^{۲}\,\text{ف}^{۴}}$ کو تفریق کرنا چاہیے۔

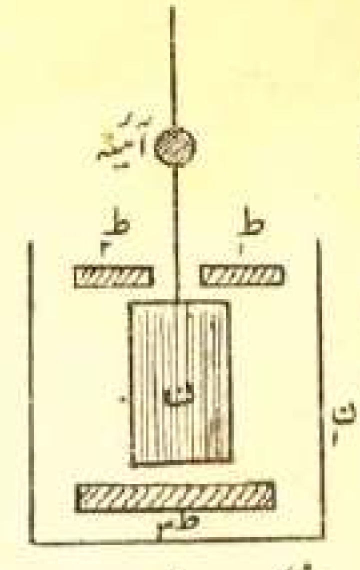
$$\text{چنانچہ صحیح بلندی} = \text{ب} - \frac{\text{حہ}}{\text{ج}\,\pi^{۲}\,\text{ف}^{۴}}$$

$$= \text{ب} - \frac{\text{م}^{۲}}{\text{ج}\,\text{ثہ}^{۲}\,\pi^{۲}\,\text{ف}^{۴}}$$

یہ ڈلبرفوس، ہیگن باق اور کائڈیٹے کی تصحیح کہلاتی ہے[1]۔

لہذا کسی مائع کے لئے صحیح ضابطہ:-

$$\frac{\text{م}}{\text{ثہ}} = \frac{\left(\text{ب} - \frac{\text{م}^{۲}}{\text{ج}\,\text{ثہ}^{۲}\,\pi^{۲}\,\text{ف}^{۴}}\right)\text{ج ثہ}\,\pi\,\text{ف}^{۴}}{۸\,\text{ہ}\,\text{ل}} \quad \ldots\ldots(۳)$$



شکل ۵

(۲) گردشی اسطوانہ کا طریقہ :- شکل ۵ میں ن ایک پیتل کا ٹھوس اسطوانہ ہے اور ن۱ اسطوانہ نما برتن ہے۔

ن کو فاسفر برانز کے تار کے ذریعہ لٹکایا گیا ہے۔ ن اور ن۱ کے درمیانی حصہ میں وہ مائع ڈالا جاتا ہے جس کی لزوجت دریافت کرنی ہوتی ہے۔

بیرونی اسطوانہ ن۱ کو موٹر کے ذریعہ گھمایا جاتا ہے چنانچہ مائع کے پرت بھی دائری وضع میں گھومتے ہیں جوں جوں ہم اسطوانہ ن کی سطح سے قریب ہوتے جائیں گے ان دائری پرتوں کی رفتار بھی بتدریج گھٹتی جائے گی۔ جب ن۱ کو گھمایا جاتا ہے تو ن بھی ایک خاص زاویہ میں گھوم جاتا ہے۔ اس کو آئینہ کے ذریعہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔

ط، ط۱ اور ط۲ محافظ حلقے ہیں جو ن کے اوپر اور نیچے گھومنے والے مائع کے اثر کو ساقط کر دیتے ہیں۔ یہاں مائع کی حرکت دائری ہے لیکن شعری نلی میں مائع خط مستقیم میں حرکت کرتا ہے۔

$$ل = \frac{ق\ لا}{س\ ۲}$$

فرض کرو کہ ن ویں پرت کی زاویائی رفتار ω ہے اور نصف قطر ص اور (ن + ۱) ویں پرت کی زاویائی رفتار ω + فرω اور نصف قطر ص + فرص ہے اس صورت میں دونوں کے زاویائی رفتاروں میں فرق = فرω

اور دونوں پرتوں کے درمیان فاصلہ لا = فرص

اور دونوں میں تفاوت رفتار = ص فر ω

∴ قوت ق = لہ ۲ ص فر ω / فرص =

= لہ ۲ π ص ل ص فر ω / فرص

جہاں ل = اندرونی اسطوانہ ت کا طول مائع کی سطح سے اس کے نچلے حصہ تک۔

∴ جفت جو اس اسطوانہ ت پر عمل کرتا ہے = گ (فرض کرو)

= لہ ۲ π ص ل ص فر ω ص / فرص

یعنی گ فرص / ص³ = ۲ π لہ فر ω ل

لہذا پورا جفت = ∫ (ا سے ب تک) گ فرص / ص³ = ∫ (صفر سے ω تک) ۲ π لہ ل فر ω

جہاں ا = اندرونی اسطوانہ کا نصف قطر، ب = بیرونی اسطوانہ کا نصف قطر

اور ω = بیرونی اسطوانہ کی زاوئی رفتار

∴ گ [− ۱ / ۲ ص²] (ا سے ب تک) = ۲ π لہ ل ω

یعنے ۱ / ب² + ۱ / ا² = ۴ π لہ ω ل / گ

∴ گ = ۴ π لہ ω ل · ا² ب² / (ب² − ا²) = ٹہ طہ .... (۴)

جہاں ٹہ = پیچیدگی کا جفت فی اکائی زاویہ

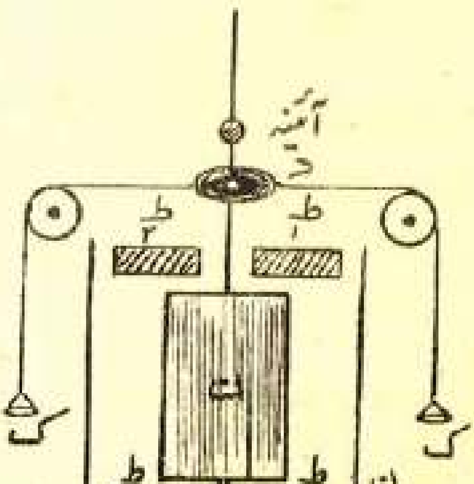
اور طہ = زاویۂ انصراف

اس ضابطہ میں اگر ٹہ معلوم ہو جائے تو لہ معلوم ہو سکتا ہے۔

ہمیں معلوم ہے کہ اندرونی اسطوانہ کا وقت دوران و = ۲ π √(مج / ٹہ) جہاں مج = جمود کا معیار اثر اندرونی اسطوانہ کا اُسکے محور کے گرد۔ ٹہ اس ضابطہ سے معلوم ہو جاتا ہے۔

اس آلہ سے پانی، تیل وغیرہ کی لزوجیت معلوم کی جا سکتی ہے۔

ایسے مائعات مثلاً ارنڈی کا تیل، گلیسرین وغیرہ جن کی لزوجیت بہت زیادہ ہوتی ہے دئے جائیں تو شکل ۶ میں بتایا ہوا آلہ استعمال کیا جاتا ہے، اس لئے کہ پہلے طریقہ میں (مائع زیادہ لزج ہونے کی وجہ سے) زاویہ طہ کے کافی بڑھ جانے کا احتمال ہے۔



شکل ۶

اس شکل میں د ایک چرخی ہے جس کے اطراف ایک ڈوری لپیٹی جاتی ہے اور اسکے دونوں سروں سے دو ترازو کے پلڑے باندھ دئے جاتے ہیں، اس تجربہ میں بھی بیرونی اسطوانہ، پہلے کی طرح موٹر کے ذریعہ گھمایا جاتا ہے اور دونوں پلڑوں میں ایسی متناسب کمیتیں ک رکھی جاتی ہیں کہ اندرونی اسطوانہ میں کوئی حرکت یا انصراف نہ ہو یعنی یہ اپنی اصلی حالت پر جبکہ بیرونی اسطوانہ گھوم رہا ہو قائم رہے۔

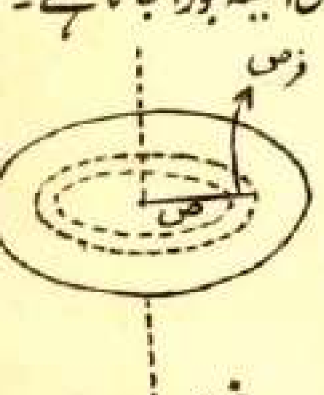
اس صورت میں جفت گ = ۲ ک ج ف جہاں ف = چرخی کا نصف قطر اور ک ج = کسی ایک پلڑے کا وزن

∴ ۲ ک ج ف = ۴ π² لہ ω̄ ل . ا² ب² / (ب² − ا²)

پس لہ کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہے۔

اس میں بھی محافظ حلقے استعمال کئے جاتے ہیں ورنہ سروں کا اثر زائل کرنے کے لئے دو تجربے کرنے کی ضرورت ہوگی۔ ک، ل اور ω̄ کو بدلکر درج کرنے اور اس طرح حاصل کردہ دونوں مساواتوں کو تفریق کرنے سے سروں کے اثر کا مستقل ساقط کیا جا سکتا ہے۔

(۳) **گردشی قرص کا طریقہ** ⑦:— فرض کرو کہ بڑے قطر کا ایک دائری قرص، مستقل رفتار سے، ایسے انتصابی محور کے گرد گردش کر رہا ہے جو قرص کے مرکز میں سے گزرتا ہے اور قرص کے مستوی کے علی القوائم بھی ہے۔ اس قرص کے ٹھیک اوپر فرض کرو کہ ایک دوسرا دائری قرص، نہایت پتلے تار سے لٹکایا جاتا ہے اور اس تار کے ساتھ ایک مستوی آئینہ جوڑا جاتا ہے۔



شکل ۷

اوپر کا قرص اس طرح رکھا جاتا ہے کہ دونوں قرص ایک دوسرے کے متوازی رہتے ہیں اور تار نچلے قرص کے محور سے منطبق رہتا ہے۔ اب اگر دونوں قرصوں کے درمیان ایسا کوئی مائع بھر دیا جائے جس کی لزوجت مطلوب ہو تو نچلے قرص کی گردش کی وجہ سے متحرک مائع کا، تقاضا یہ ہوگا کہ اوپر کے قرص کو اس کے محور کے گرد گھمانے لگے۔

فرض کرو کہ نچلے قرص کی زاوئی رفتار ω ہے۔ تب اس پر کے کسی نقطہ کی (جو مرکز قرص سے ص فاصلہ پر ہو) رفتار ω ص کے مساوی ہوگی۔ اوپر کے قرص کو ہم مرکزی چھوٹے چھوٹے دھجیوں میں تقسیم کرو (دیکھو شکل ۸)

اور ان میں سے ایک دھجی کی، جو مرکز سے ص فاصلہ پر ہے، موٹائی فرص
کے مساوی تصور کرو۔ اس صورت میں دھجی کا رقبہ ۲ π ص فرص ہوگا۔
میکسول کے کلیہ سے، اوپر والے قرص کے اس چھوٹے سے رقبہ پر عمل کرنے
والی مماسی قوت

$$= \frac{\text{لہ}\ 2\pi\ \text{ص}\ \text{فرص}\ \text{ص}\ \omega}{\text{ف}}$$ (جہاں ف دونوں قرصوں کا درمیانی فاصلہ ہے)

∴ جفت جو محور کے گرد عمل کریگا $= \frac{\text{لہ}\ 2\pi\ \text{ص}\ \text{فرص}\ \text{ص}\ \omega\ \text{ص}}{\text{ف}}$

لہذا دیگر دھجیوں کی باعث جو مجموعی جفت عمل کرے گا =

$$\int_{\text{صفر}}^{\text{ط}} \frac{\text{لہ}\ 2\pi\ \omega\ \text{ص}^3\ \text{فرص}}{\text{ف}} = \frac{\text{لہ}\ \pi\ \omega\ \text{ط}^4}{2\ \text{ف}}$$

جہاں ط = اوپر والے قرص کا نصف قطر
لہذا اوپر کا قرص اگر عہ زاویہ گھوم جائے تو تھامنے والا
جفت = ٹہ عہ جہاں ٹہ = پیچیدگی کا جفت فی اکائی زاویہ

$$\therefore\ \text{ٹہ}\ \text{عہ} = \frac{\text{لہ}\ \pi\ \omega\ \text{ط}^4}{2\ \text{ف}} \quad \ldots\ldots\ldots\ (۵)$$

اگر اس قرص کو اہتزاز میں لاکر اسکا وقت دوران دریافت کر لیا جائے اور اس کے جمود کا معیار اثر معلوم ہو تو ٹہ کی قیمت معلوم کی جاسکتی ہے اور اس طرح مائع کے لئے لہ کی قیمت دریافت کی جاسکتی ہے۔

اس طریقہ کا اطلاق کسی گیس کے لئے بھی ہوسکتا ہے۔

(۴) قرص کو اہتزاز میں لانے سے (۲): — کوئی جسم کسی لزج مائع میں اہتزاز کرے تو اس کی حرکت میں واسطہ کی اندرونی رگڑ کی وجہ سے رکاوٹ پیدا ہونے لگے گی۔ لزوجت کی رقوم میں اس اثر کا حسابی طریقہ سے دریافت

کرنا، آسان نہیں ہے۔

او۔ ای۔ میئیر نے ثابت کیا ہے کہ اگر ایک پتلے قرص کو اس تار کی مروڑ کے زیر اثر جس سے کہ یہ قرص بندھا ہوا ہوتا ہے کسی مائع یا گیس میں اہتزاز کرتے دیا جائے تو

$$ل = \frac{16\ مج^2}{\pi\ ثہ\ و\ (ط^4 + 2ط^3 ف)^2} \cdot \left\{ \left(\frac{فہ_1 - فہ}{\pi} \right) + \frac{(فہ_1 - فہ)^2}{\pi^2} + \ldots\ldots\ldots \right\}^2$$

جہاں مج = قرص اور اسکے سہاروں کے جمود کا معیار اثر

ط = قرص کا نصف قطر

ف = قرص کی موٹائی

و = وقت دوران جبکہ قرص خلا (یا ہوا) میں لٹکایا گیا ہو

$فہ_1$ = لوکارتمی تنزل (اساس "ق" "یہ") مائع میں چھوٹے اہتزاز کیلئے۔

فہ = " " " " " ہوا " " "

ثہ = مائع کی کثافت

(۵) اسٹوک کے کلیہ سے :۔ ایک چھوٹا کرہ کسی واسطہ (مائع یا گیس) میں بالکل خفیف یکساں رفتار سے حرکت کرے تو اس کی حرکت کو روکنے والی (یا مزاحم) قوت = ۶ π ل ص س جہاں ل = واسطہ کی لزوجت، ص = کرہ کا نصف قطر،

اور س = کرہ کی یکساں رفتار۔

اس ضابطہ کو سب سے پہلے سر جارج اسٹوک نے پیش کیا۔

جب کرہ کسی مائع یا گیس میں گرتا ہے تو ابتدا میں اس کی رفتار کم ہوتی ہے یعنی اس وقت واسطہ کی مزاحم قوت (جو لزوجت کی وجہ سے ہوتی ہے) زیادہ ہوتی ہے۔ پھر رفتار بڑھتی جاتی ہے حتیٰ کہ مزاحم قوت کرہ کے موثر وزن کے

مساوی ہو جاتی ہے اور اس کے وقوع کے بعد کرہ یکساں رفتار سے گرنے لگتا ہے۔ اس یکساں رفتار کو "فاصل رفتار" سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

$$\text{کرہ کا موثر وزن} = \frac{4}{3}\pi\,\text{ص}^3\,(\text{ث} - \text{ثہ})\,\text{ج}$$

جہاں ث = کرہ کی کثافت

ثہ = واسطہ کی کثافت

ص = کرہ کا نصف قطر

$$\text{تعادل کیلئے}\qquad 6\pi\,\text{لہ}\,\text{ص}\,\text{س} = \frac{4}{3}\pi\,\text{ص}^3\,(\text{ث} - \text{ثہ})\,\text{ج}$$

$$\text{یعنی لہ} = \frac{\frac{2}{9}\,\text{ص}^2\,(\text{ث} - \text{ثہ})\,\text{ج}}{\text{س}}$$

$$\text{اگر کرہ کی کمیت} = \text{ک}\ \text{تو}\ \frac{\text{ک}}{\frac{4}{3}\pi\,\text{ص}^3} = \text{ث}$$

$$\text{یعنی ص}^3 = \frac{3\,\text{ک}}{4\pi\,\text{ث}}$$

$$\therefore\ \text{ص}^2 = \left(\frac{3\,\text{ک}}{4\pi\,\text{ث}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{لہذا واسطہ کی لزوجیت لہ} = \left\{\frac{2}{9}\,\text{ج}\left(\frac{3\,\text{ک}}{4\pi\,\text{ث}}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{(\text{ث} - \text{ثہ})}{\text{س}}\right\}$$

اگر کرہ کی کمیت اور اس کی رفتار و کثافت معلوم ہو جائے تو آسانی سے واسطہ کی لزوجیت دریافت کی جا سکتی ہے۔

کوئی لزج مائع مثلاً ارنڈی کا تیل یا گلیسرین وغیرہ لیکر شیشہ کے اسطوانہ میں رکھ دیا جاتا ہے اور پارہ کے نہایت چھوٹے چھوٹے قطرے (جو کروی وضع کے تصور کئے جا سکتے ہیں) مائع میں سے گرائے جاتے ہیں۔

شکل ۸۰

اسطوانے کی دیوار کے درمیانی حصہ میں لا اور ما

دو نشانات مقرر کر لئے جاتے ہیں اور ان کا درمیانی فاصلہ پیمانہ سے ناپ لیا جاتا ہے۔ چلرکنی گھڑی کی مدد سے لا ما فاصلہ طے کرنے کے لئے پارہ کا قطرہ جو وقت لیتا ہے وہ دریافت کر لیا جاتا ہے اس طرح پارہ کے قطرہ کی رفتار معلوم ہو جاتی ہے جس کو یکساں اس وجہ سے مان لیا جا سکتا ہے کہ لا اور ما نقطے اسطوانہ کے درمیانی حصہ میں واقع ہیں۔ پارہ کی کثافت معلوم ہے۔ کرہ کا وزن کسی حساس ترازو کی مدد سے دریافت کر لیا جاتا ہے اور مائع کی کثافت یہ کثافت اضافی کی بوتل سے معلوم کر لی جا سکتی ہے۔

تجربہ میں پارہ کے قطروں کو بہت چھوٹے لینا چاہیئے ورنہ نظریہ صحیح نہ ہوگا۔ گرتے وقت قطرے اگر بڑے ہوں تو ان کی شکل کروی نہیں بلکہ ناقص نما ہوگی اور قطروں کے اطراف جو مائع ہوگا اس میں تلاطم یا ہیجان پیدا ہو جائیگا۔

تجربہ میں چونکہ ک کی قیمت بالکل چھوٹی ہونی چاہیئے تاکہ نتائج صحیح حاصل ہوں اس لئے ک کو ۰.۱ گرام سے بھی کم لینا چاہیئے لیکن اتنا کم وزن معمولی ترازو سے زیادہ صحت کے ساتھ نہیں دریافت کیا جا سکتا اس میں فیصد خطا کے زیادہ ہو جانے کا احتمال رہتا ہے اس لئے تجربہ میں ایک بڑا قطرہ تقریباً ۱.۰ گرام کا لیا جاتا ہے اور ایک حساس ترازو میں تول کر اسکا صحیح وزن ف گرام معلوم کر لیا جاتا ہے۔ اسکے بعد اس قطرہ کو تقریباً مساوی جسامت والے دس بارہ قطروں میں تقسیم کر دیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ ان کی کمیتیں $ک_۱$، $ک_۲$ .... وغیرہ ہیں اور ان کی یکساں رفتاریں ما اور لا کے درمیان بالترتیب $سا_۱$، $سا_۲$، $سا_۳$ .... وغیرہ ہیں۔

تب پہلے قطرہ کے لئے $لہ = \left\{ \frac{۲}{۹} \, ج \left(\frac{۳ \, ک_۱}{۴ \, \pi \, ث} \right)^{\frac{۲}{۳}} \left(\frac{ث - ثہ}{سا_۱} \right) \right\}$

$$= \frac{عہ (ک_۱)^{\frac{۲}{۳}}}{سا_۱} \quad \text{جہاں } عہ = \text{مستقل}$$

$$= \frac{۲}{۵}\, ج \left(\frac{۳}{۴\pi\, ث}\right)^{\frac{۲}{۳}} (ث - ثہ)$$

اسی طرح دوسرے قطرہ کے لئے $ل_۲ = \dfrac{ع\,(ک_۲)^{\frac{۲}{۳}}}{س_۲}$

اور تیسرے قطرہ کے لئے $ل_۳ = \dfrac{ع\,(ک_۳)^{\frac{۲}{۳}}}{س_۳}$

علیٰ ہذا ن قطروں تک ....

چونکہ لزوجت ایک خاص تپش پر مستقل رہتی ہے اسلئے

$ل_۱ = ل_۲ = ل_۳ = ل_۴ =$ ...... ن اعداد تک

یعنی $\dfrac{(ک_۱)^{\frac{۲}{۳}}}{س_۱} = \dfrac{(ک_۲)^{\frac{۲}{۳}}}{س_۲} = \dfrac{(ک_۳)^{\frac{۲}{۳}}}{س_۳} =$ ...... ن اعداد تک

ہم جانتے ہیں کہ اگر $\dfrac{ا_۱}{ب_۱} = \dfrac{ا_۲}{ب_۲} = \dfrac{ا_۳}{ب_۳}$ .... ن عدد تک

تب $\dfrac{ا_۱}{ب_۱} + \dfrac{ا_۲}{ب_۲} + \dfrac{ا_۳}{ب_۳} +$ .... ن عدد تک =

$$= ن \left(\frac{ا_۱ + ا_۲ + ا_۳ + ا_۴ + \text{......... ن عدد تک}}{ب_۱ + ب_۲ + ب_۳ + \text{......... ن عدد تک}}\right)$$

کیونکہ $(ب_۱ + ب_۲ + ب_۳ + \text{...... ن عدد تک})\left(\dfrac{ا_۱}{ب_۱} + \dfrac{ا_۲}{ب_۲} + \dfrac{ا_۳}{ب_۳} + \text{... ن عدد تک}\right)$

$= (ا_۱ + ا_۱ + ا_۱ + \text{...... ن مرتبہ}) + (ا_۲ + ا_۲ + ا_۲ + \text{...... ن مرتبہ}) +$

$+ (ا_۳ + ا_۳ + ا_۳ \text{...... ن مرتبہ}) + (ا_۴ + ا_۴ + ا_۴ + \text{...... ن مرتبہ}) +$

(............) + (............) .... ن عدد تک

$$= \text{ن} \left(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 + \text{ا}_4 + \cdots\cdots \text{ن عدد تک} \right)$$

اسی طرح

$$\text{ل}_1 + \text{ل}_2 + \text{ل}_3 + \cdots\cdots = \text{عد} \frac{(\text{ک}_1)^{\frac{2}{3}}}{\text{ر}_1} + \text{عد} \frac{(\text{ک}_2)^{\frac{2}{3}}}{\text{ر}_2} + \cdots\cdots$$

$$= \text{عد} \left[\frac{(\text{ک}_1)^{\frac{2}{3}}}{\text{ر}_1} + \frac{(\text{ک}_2)^{\frac{2}{3}}}{\text{ر}_2} + \frac{(\text{ک}_3)^{\frac{2}{3}}}{\text{ر}_3} + \cdots\cdots \text{ن قطروں تک} \right]$$

$$= \text{عد ن} \left[\frac{(\text{ک}_1)^{\frac{2}{3}} + (\text{ک}_2)^{\frac{2}{3}} + (\text{ک}_3)^{\frac{2}{3}} + \cdots\cdots \text{ن قطروں تک}}{\text{ر}_1 + \text{ر}_2 + \text{ر}_3 + \cdots\cdots \text{ن قطروں تک}} \right]$$

$$= \text{عد ن} \left\{ \frac{\Sigma (\text{ک}_1)^{\frac{2}{3}}}{\Sigma \text{ر}_1} \right\}$$

$$\therefore \frac{\text{ل}_1 + \text{ل}_2 + \text{ل}_3 + \cdots\cdots \text{ن قطروں تک}}{\text{ن}} = \text{ل} = \text{اوسط قیمت لزوجت کی}$$

$$= \text{عد} \left\{ \frac{\Sigma \text{ک}_1^{\frac{2}{3}}}{\Sigma \text{ر}_1} \right\} \qquad \therefore \text{ل}^{\frac{3}{2}} = \text{عد}^{\frac{3}{2}} \cdot \left[\frac{\Sigma \text{ک}_1}{(\Sigma \text{ر}_1)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

لیکن $\Sigma \text{ک}_1 = \text{ث}$ = سب قطروں کی کمیت = بڑے قطرے کی کمیت

$$\therefore \text{ل}^{\frac{3}{2}} = \frac{\text{عد}^{\frac{3}{2}} (\text{ث})}{(\Sigma \text{ر}_1)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{یعنی} \quad \text{ل} = \frac{\text{عد ث}^{\frac{2}{3}}}{\left[(\Sigma \text{ر}_1)^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{2}{3}}}$$

$$\therefore \text{ل} = \frac{\frac{2}{9} \text{ج} (\text{ث} - \text{ثہ}) \left(\frac{3\,\text{ث}}{4 \pi\, \text{ث}} \right)^{\frac{2}{3}}}{\left\{ \Sigma \text{ر}_1^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{2}{3}}} \quad \cdots\cdots\cdots (۶)$$

اس طریقہ سے جونس نے ۱۸۹۴ء میں گلیسرین کی لزوجت دریافت کی تھی۔

۱۳۵۱ ✓ مائعات کی لزوجت پر تپش کا اثر:- تپش میں اضافہ ہو تو مائعات کی لزوجت تیزی کے ساتھ گھٹنے لگتی ہے۔ پوائیسل (۴) پہلا شخص تھا۔

جس نے تپش اور لزوجت کے درمیان تعلق دریافت کیا۔ اسکا ضابطہ حسب ذیل ہے :-

لتٖ = لہ / (۱ + عہ ت + بہ ت²)

جہاں لتٖ = لزوجت ت° ہر پر اور لہ = لزوجت صفر سئی پر اور عہ اور بہ مستقل ہیں۔

کاق نے دریافت کیا کہ پارہ کی لزوجت -۴ر۲۱° ہر اور +۳۴۰° ہر کے درمیان حسب ذیل ضابطہ سے حاصل کی جاسکتی ہے (۴) :-

لتٖ = ۰٫۰۱۶۹۶۹ – ۰٫۰۰۰۰۶۶۰۵۲ ت + ۰٫۰۰۰۰۰۰۲۰۸۴۷ ت²۔

یومنی کے مطابق پارہ کی لزوجت ۰° ہر پر = ۰٫۰۱۵۷۷ پوائس

اکثر سائنس دانوں نے متعدد ضابطے تجویز کئے۔ کم تپشوں کے لئے میئر نے یہ ضابطہ تجویز کیا (۴) لتٖ = لہ / (۱ + عہ ت)

سلاٹ (۵) نے بھی متعدد ضابطے تجویز کئے جن میں سے ایک ہماری اغراض کے لئے حسب ذیل ہے :- لتٖ = ج / (۱ + ب ت)ⁿ جہاں ج، ب اور ن مستقل ہیں جو مائع کی نوعیت پر منحصر ہوتے ہیں۔ اس ضابطہ کو تھارپ اور راجر نے تجربہ سے صحیح پایا اور عملی کاموں میں یہ کارآمد ثابت ہوا ہے۔ تھارپ اور راجر نے ان مستقلوں کی قیمتیں بہت سے مائعات کے لئے دریافت کی تھیں جن میں سے چند حسب ذیل ہیں (۶) :-

مائع	ج	ب	ن
پانی	۰٫۰۱۷۹۴۴	۰٫۰۲۳۱۲۱	۱٫۵۴۲۳
برومین	۰٫۰۱۲۵۳۵	۰٫۰۰۸۹۳۵	۱٫۴۰۷۷
کلوروفارم	۰٫۰۰۷۰۰۶	۰٫۰۰۶۳۱۶	۱٫۸۱۹۶

کاربن بائیسلفائڈ	۰٫۰۰۴۲۹۴	۰٫۰۰۵۰۲۱	۱٫۶۳۲۸
ایتھر	۰٫۰۰۲۸۶۴	۰٫۰۰۷۳۳۲	۱٫۴۶۴۴
بنزین	۰٫۰۰۹۰۵۵	۰٫۰۱۱۹۶۳	۱٫۵۵۵۴
میتھیل الکوہل	۰٫۰۰۸۰۸۳	۰٫۰۰۶۱۰۰	۲٫۶۷۹۳
ایتھیل الکوہل	۰٫۰۱۷۷۵۳	۰٫۰۰۴۷۷۰	۴٫۳۷۳۱

ازمکاز کا اثر مائع کی لزوجیت پر :۔ جب کسی مائع میں کوئی شے حل کی جاتی ہے تو محلول کی لزوجیت، خالص مائع کی لزوجیت سے زیادہ بھی ہو سکتی ہے یا کم بھی، لہٰذا آمیزوں یا محلولوں کے لئے کوئی عام کلیہ اب تک نہیں دریافت کیا گیا ہے۔

دباؤ کا اثر مائع کی لزوجیت پر ⑦ :۔

لزج مائعات کی لزوجیت پر دباؤ کا اثر بالکل کم ہوتا ہے۔ رونٹگن نے یہ دریافت کیا کہ پانی کی لزوجیت دباؤ کے اضافہ سے کم ہو جاتی ہے۔

کاربن ڈائی آکسیڈ، ایتھر اور بنزین وغیرہ کے لئے وار برگ نے یہ ثابت کیا کہ لزوجیت، دباؤ کے اضافہ سے بڑھتی ہے اور اس کے لئے حسب ذیل ضابطہ اس نے پیش کیا :۔

لپ = لہ (۱ + عہ د)   جہاں لپ = دباؤ د پر لزوجیت

لہ = کرہ ہوائی کے دباؤ پر لزوجیت

اور عہ = کوئی مستقل

عام طور پر کئی سو کرۂ ہوائی کے دباؤ پر اکثر مائعات کی لزوجیت میں اضافہ ہوتا ہے۔

مائعات کی لزوجیت پر ترکیب کا اثر :۔ گارتن میسٹر نے حسب ذیل ضابطہ ایسے مرکبات کے لئے اخذ کیا جن میں تمام تیشوں پر، کاربن کے یکساں تعداد کے جواہر موجود ہوں ⑧ $\frac{لہ}{م}$ = مستقل

جہاں ھ = مائع کا سالمی وزن

تھارپ اور راجر[9] نے "سالمی لزوجیت" کی اصطلاح وضع کی۔ انھوں نے لہ اور ح کے حاصل ضرب کو مائع کی "سالمی لزوجیت" سے تعبیر کیا۔

جہاں ح = سالمی حجم۔ انہوں نے یہ بھی دریافت کیا کہ (CH_2) گروپ کے لئے (لہ ح) کی قیمت عملی طور پر مستقل رہتی ہے۔

ڈنسٹن نے حسب ذیل ایک اہم ضابطہ دریافت کیا[10]:۔

$$\log_{10} \text{لہ} = \text{ا}\,\text{ھ} + \text{ب}$$

جہاں ا = ایک مشترک مستقل

اور ب بھی ایک مستقل ہے جو زیر غور سلسلہ پر منحصر ہوتا ہے۔

وقت کا اثر مائع کی لزوجیت پر[11]:۔ مارڈلس نے یہ دریافت کیا کہ بعض محلولوں مثلاً سلولوز ایسٹیٹ (cellulose acetate) بنزائل الکوہل وغیرہ کی لزوجیت، وقت کے گزرنے پر بڑھتی جاتی ہے۔

لزوجیت پیما (مائعات کی اضافی لزوجیتوں کی دریافت کیلئے):۔

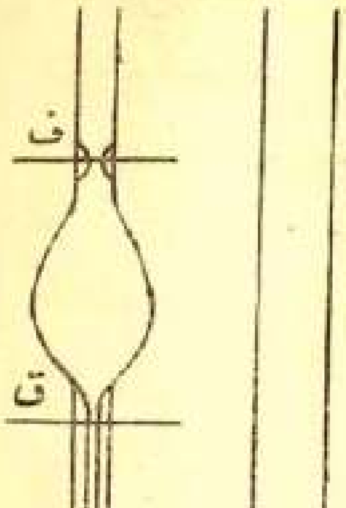
بعض دفع کسی خاص مائع کی لزوجیت، کسی دوسرے معیاری مائع مثلاً خالص پانی کی لزوجیت کے رقوم میں مستقل تپش پر دریافت کرنے سے بہت سہولت ہوتی ہے۔

اس غرض کے لئے عموماً شعری نلی کا طریقہ اختیار کیا جاتا ہے اور وہ آلہ جو تقریباً ہر جگہ استعمال کیا جاتا ہے اوسٹوالڈ کا لزوجیت پیما ہے جس کی معمولی ساخت کو شکل ۴۹ میں دکھایا گیا ہے۔

داہنی ساق میں مائع کا ایک مستقل حجم رکھا جاتا ہے، اور بائیں ساق میں نشان ف کے اوپر کھینچ کر اس کو لایا جاتا ہے۔ اس کے بعد پھر مائع کو واپس بہنے دیا جاتا ہے اور ف سے ق تک گرنے میں جتنا وقفہ ہوتا

ہے اسکو ایک چار کمی گھڑی کی مدد سے دریافت کرلیا جاتا ہے۔ مائع کے بہنے کی وجہ اوسط دباؤ کی قیمت ب ج ثہ تصور کی جاسکتی ہے۔ جہاں ب = مائع کی اوسط بلندی اور ثہ = مائع کی کثافت

فرض کرو کہ یکساں بلندی ب کے تحت دونوں نشانوں ف اور ق کے درمیان گرنے میں لہ لزوجت کے مائع کے لئے جو وقفہ و اور لہَ لزوجت کے معیاری مائع کے لئے جو وقفہ وَ درکار ہوتا ہے دریافت کرلیا جاتا ہے۔ پوائیسل کے ضابطے سے :-



شکل ۹

$$\frac{\text{لہَ}}{\text{لہ}} = \frac{\text{ثہَ وَ}}{\text{ثہ و}} \quad \text{......... (۷)}$$

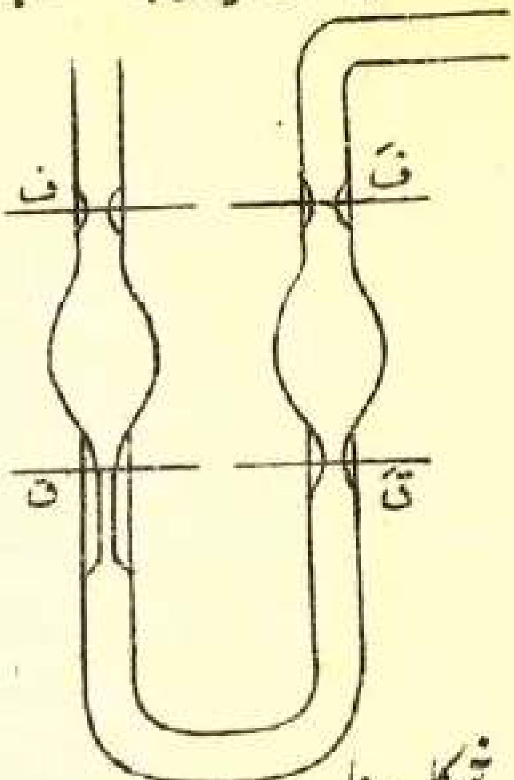
جہاں ثہَ = معیاری مائع کی کثافت

لہٰذا معیاری مائع کی رقوم میں کسی دوسرے مائع کی مطلوبہ لزوجت دریافت کی جاسکتی ہے۔

مائع کی لزوجت اور کثافت میں نسبت "حرکی لزوجت" کہلاتی ہے۔ اس آلہ سے دونوں مائعات کی حرکی لزوجتوں میں نسبت آسانی کے ساتھ، ف اور ق کے نشانوں کے درمیان مائع کے گرنے کے اوقات کی نسبتوں کے رقوم میں دریافت کی جاسکتی ہے۔

مائع کی کثافت کو جاننے کی (جو اوسٹوالڈ کے لزوجت پیما میں ضروری ہے) یوبلاڈ اور بنگھیم[12] کے لزوجت پیما میں ضرورت باقی نہیں رہتی۔ یوبلاڈ کا

آلہ شکل عنا میں دکھلایا گیا ہے۔ اس آلہ میں مائع بیرونی ہوا کے دباؤ سے بہنے لگتا ہے۔



شکل عنا

دونوں جوف ایک ہی ناپ اور گنجائش کے ہوتے ہیں اور ایک ہی بلندی پر ایک دوسرے کے متصل رکھے جاتے ہیں۔

لزوجت پیما میں مائع کو کھینچکر اتنا بھرا جاتا ہے کہ اس کی سطح ف اور ق پر رہتی ہے۔ پھر ہوا کے دباؤ سے اس کو اوپر چڑھایا جاتا ہے اور فَ اور قَ کے نشانوں کے درمیان مائع کے چڑھنے کا وقت دریافت کرلیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ لہ لزوجت کے مائع کے لئے وقت اور دباؤ کی قیمتیں بالترتیب و اور د ہیں اور معیاری مائع کے لئے جس کی لزوجت لہَ ہے متناظر وقت اور دباؤ وَ اور دَ ہیں تب

$$\frac{لہَ}{لہ} = \frac{دَ\,وَ}{د\,و} \quad \text{..........} \quad (۸)$$

اس امر کا خیال رکھنا ضروری ہے کہ توانائی بالفعل کی رقم یہاں نظرانداز کردی گئی ہے۔ بنگہیم نے اس آلہ کے ذریعہ مطلق لزوجت کی قیمتیں دریافت کی تھی، اس نے آلہ کے ابعاد کا حساب پہلے ہی سے لگا لیا تھا۔

اور جس لزوجت پیما کا ذکر کیا جاچکا ہے اس میں اساسی مفروضہ یہ ہے کہ

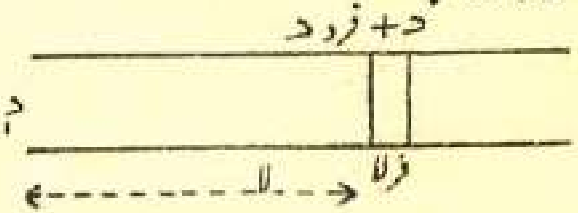
مائع کی اوسط بلندی مستقل رہتی ہے جس کے متعلق یہ فرض کیا جاتا ہے کہ یہ آلہ میں ایک مستقل حجم کا مائع بھرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اگر تپش کی وسعت بہت چھوٹی نہ ہو تو لزوجت پیما اور شیشہ کے آلہ کے پھیلاؤ کو مستقل حجم کی پیمائش میں نظر انداز نہیں کیا جا سکتا لہذا اوسط بلندی مستقل نہیں رہ سکتی۔ مائعات کے سطحی تناؤ کی مختلف قیمتوں کی وجہ سے بھی اوسط بلندی میں فرق ہونے لگتا ہے۔ متعدد سائنسدانوں نے[12] ان خطاؤں کو ساقط کرنے کی مختلف ترکیبیں اختیار کی ہیں۔ ولیم اور واشبرن نے آلہ کی شکل میں ایسی تبدیلیاں کی ہیں کہ نہ صرف مذکورہ بالا خطاؤں کی تصحیح ہو جاتی ہے بلکہ چند چھوٹے چھوٹے نقائص بھی مثلاً صاف کرنے والے مائعات اور پانی کے عمل سے نلی کے اندرونی قطر میں تبدیلی کا واقع ہونا اور حل شدہ شیشہ سے پانی کا خالص پن باقی نہ رہنا وغیرہ، دور ہو جاتے ہیں۔

انھوں نے آلہ کو کوارٹز سے بنایا، اور اس کے ابعاد مناسب رکھے، آلے کی اس پوری ترتیب کو ایک تھرموسٹیٹ (مستقل تپش کے حمام) میں داخل کر دیا جاتا ہے، اور دونوں ساقوں کو تبخیر سے بچانے کے لیے (اگر کوئی طیران پذیر مائع استعمال کیا جائے) ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ دیا جاتا ہے۔ اضافی لزوجت دریافت کرنے کا طریقۂ عمل وہی ہے جو اوسٹوالڈ کے لزوجت پیما میں بیان کیا جا چکا ہے۔

بعد میں ڈکلا نے یہ رائے دی کہ بہت ہی کم لزوجت کے مائعات کے لئے شعری نلی کو نکالکر آلہ میں ایسے مسام دار مادے کو رکھنا چاہیئے کہ جس کے مسامات نہ تو دائری ہوں اور نہ تراش عمودی میں بالکل سیدھے رہیں، اور اسی طریقۂ عمل سے کام لیکر جو اوسٹوالڈ نے اختیار کیا تھا، کسی مائع کی اضافی لزوجت دریافت کی جا سکتی ہے۔ ان چیزوں کا تفصیلی بیان موجودہ حالت میں زیادہ ضروری نہیں معلوم ہوتا لہذا یہاں اس کو چھوڑ دیا جاتا ہے۔

گیسوں اور بخارات کی لزوجیت :- پوائسیل کے ضابطہ کو حاصل کرنے کے دوران میں یہ فرض کیا گیا تھا کہ شعری نلی کے کسی تراش میں سے گزرنے والے مائع کا حجم مستقل رہتا ہے یعنی دباؤ کے باوجود کثافت وہی رہتی ہے۔ اس میں کوئی شک نہیں کہ مائعیات کے لئے یہ مفروضہ صحیح ہے لیکن گیسوں کی صورت میں چونکہ دباؤ کی تبدیلی کے ساتھ کثافت میں بھی تبدیلی واقع ہوتی ہے اس لئے یہ ضابطہ نہیں استعمال کیا جا سکتا۔

حقیقت میں گیس کی وہ کمیت، جو نلی کے کسی تراش میں سے ایک دیئے ہوئے وقت میں گزرتی ہے مستقل ہوتی ہے۔



شکل ۱۱

ایک شعری نلی پر جو شکل ۱۱ میں دکھائی گئی ہے غور کرو۔ فرض کرو کہ اسکا طول ل اور اسکے دونوں سروں پر دباؤ علی الترتیب د۱ اور د۲ ہے۔ نلی میں گیس کی ایک چھوٹی مقدار ایسی لو جس کی موٹائی فرلا اور نلی کے ایک سرے سے فاصلہ لا پر واقع ہو، اس چھوٹے سے ٹکڑے کے دونوں سروں پر فرض کرو کہ دباؤ بالترتیب د اور د + فرد ہے، نیز یہ بھی فرض کیا جائے کہ گیس کا یہ ٹکڑا اتنا چھوٹا ہے کہ گیس کی کثافت اس کے درمیان مستقل تصور کی جا سکتی ہے۔

اس ٹکڑے کے دونوں سروں کے درمیان دباؤ میں فرق = - فرد
پوائسیل کے ضابطہ سے، گیس کا وہ حجم جو فی ثانیہ اس ٹکڑے میں سے گزرتا ہے :-

$$ح = -\frac{فرد \ \pi \ ف^{4}}{8 \ لہ \ فرلا}$$

یعنی ثہ لہ حہ فرلا = — ثہ فرد π ف^{۴}

جہاں ثہ = اس ٹکڑے کے درمیان گیس کی کثافت (جس کو مستقل فرض کیا گیا ہے۔)

∴ م لہ فرلا = — ثہ π ف^{۴} فرد / ۸

جہاں م = گیس کی وہ کمیت، جو فی ثانیہ اس ٹکڑے میں سے گزرتی ہے۔
کلیہ بائیل کی رو سے:—

د م / ثہ = لا ت

یعنی د = گ ثہ

جہاں
- م = سالمی وزن
- ت = تپش مطلق
- لا = گیس کا مستقل فی گرام سالمہ
- گ = ایک مستقل

∴ م لہ فرلا = — π ف^{۴} د فرد / ۸ گ

∴ کل نلی کے لئے:—

م لہ ∫ (صفر سے ل تک) فرلا = — (π ف^{۴} / ۸ گ) ∫ (د$_{۱}$ سے د$_{۲}$ تک) د فرد

∴ م گ = (π ف^{۴} / ۱۶ ل لہ) (د$_{۱}^{۲}$ — د$_{۲}^{۲}$) .... (۹)

فرض کرو کہ حہ$_{۱}$ = گیس کا وہ حجم جو د$_{۱}$ دباؤ پر فی ثانیہ نلی کے اندر داخل ہوتی ہے
∴ نلی میں فی ثانیہ جو کمیت داخل ہوگی = م = حہ$_{۱}$ د$_{۱}$ / گ = حہ$_{۱}$ ثہ$_{۱}$

∴ م گ = حہ$_{۱}$ د$_{۱}$

چونکہ فی ثانیہ جو گیس کی کمیت نلی میں داخل ہوتی ہے، وہ مساوی ہے اُس گیس کی کمیت کے جو کہ نلی سے فی ثانیہ خارج ہوتی ہے

∴ م = حہ$_{۲}$ ثہ$_{۲}$ = حہ$_{۲}$ د$_{۲}$ / گ

جہاں حج_2 = گیس کا وہ حجم جو د_2 دباؤ پر فی ثانیہ نلی میں داخل ہوتا ہے۔

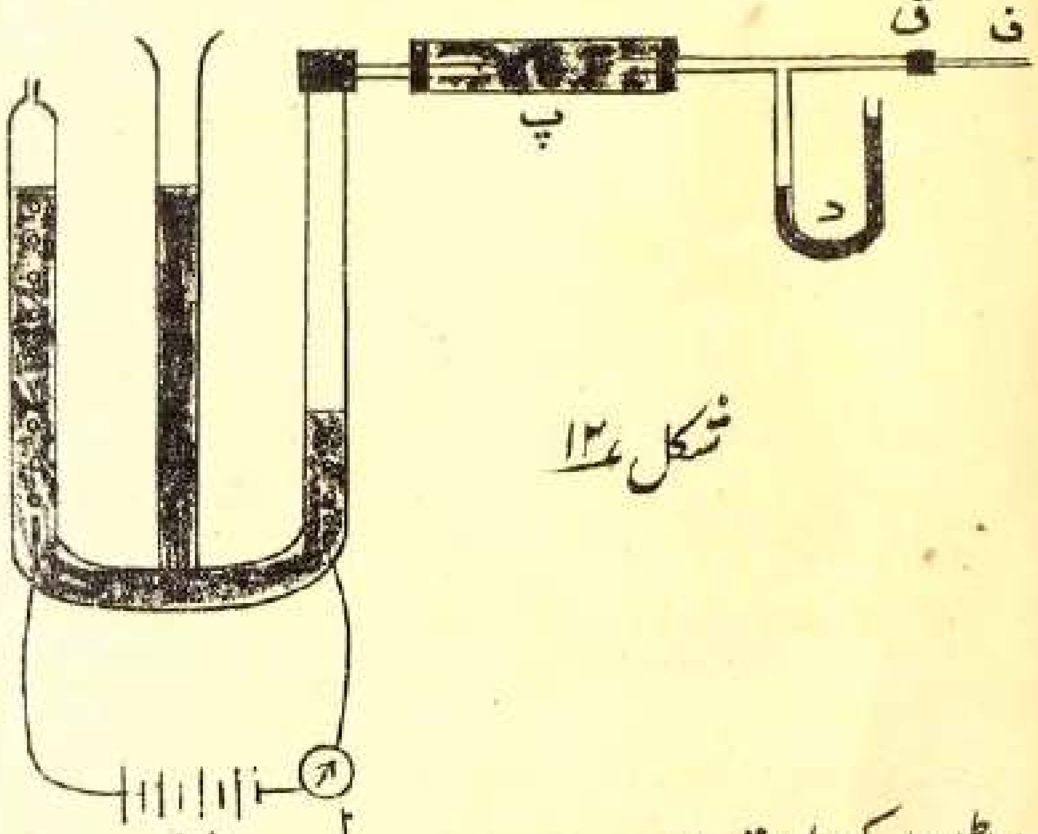
$$\therefore \text{م گ} = \text{حج}_2 \, \text{د}_2 = \text{حج} \, \text{د}$$

$$\therefore \text{حج}_2 \, \text{د}_2 = \text{حج} \, \text{د} = \frac{\pi \, \text{ف}^4}{16 \, \text{ل لہ}} (\text{د}_1^2 - \text{د}_2^2) \quad \ldots\ldots\ldots \; (10)$$

یہ کسی گیس کے لئے "میئر" کا ضابطہ کہلاتا ہے۔

مساوات (۹) سے $\text{م} = \frac{\text{مُر}}{\text{لا ت}} \cdot \frac{\pi \, \text{ف}^4}{16 \, \text{ل لہ}} (\text{د}_1^2 - \text{د}_2^2)$

مساوات (۱۰) کو ڈاکٹر لیفیلڈ نے ہائڈروجن اور آکسیجن کی لزوجت بالراست دریافت کرنے کے لئے استعمال کیا تھا[۱۴] اس کا طریقہ حسب ذیل ہے:۔



شکل ۱۲

او لٹا پیما کے طریقے سے:۔

شکل ۱۲ میں ہائیڈروجن اور آکسیجن معمولی کیمیائی آبی او لٹا پیما سے

حاصل کئے جاتے ہیں، آکسیجن کو آزادانہ ہوا میں نکل جانے دیا جاتا ہے اور ہائیڈروجن کو جس کی لزوجیت دریافت کرنی ہے ایک خشک کرنے والی نلی ب میں گزارنے کے بعد ایک شعری نلی ف ق میں سے گزرنے دیا جاتا ہے۔ ہائیڈروجن جس دباؤ د پر شعری نلی میں داخل ہوتی ہے اس کو داب پیما د کی مدد سے دریافت کر لیا جاتا ہے، جس دباؤ $\text{د}_۲$ پر گیس شعری نلی میں سے نکلتی ہے ظاہر ہے کہ وہ کرۂ ہوائی کا دباؤ ہوگا۔ برقی رو جو گزاری جاتی ہے اس کو امپیما ا سے پڑھ لیا جاتا ہے۔ فیراڈے کے کلیہ برق پاشی کی رو سے، ہائیڈروجن کی وہ کمیت جو فی ثانیہ حاصل ہوتی ہے، بذریعہ حساب دریافت کی جا سکتی ہے۔

کلیہ بائیل اور شارل کی رو سے $\frac{\text{د ح}}{\text{ت}} = \frac{\text{د}_۱\text{ح}_۱}{\text{ت}_۱}$ .... (۱۱)

جہاں $\text{ت}_۱$ = گیس کی تپش مطلق

د = طبعی دباؤ

ت = طبعی تپش

ح = طبعی دباؤ اور تپش پر فی ثانیہ حاصل ہونے والی گیس کا حجم

فیراڈے کے کلیہ برق پاشی کی رو سے

فی ثانیہ خارج ہونے والی گیس کی کمیت = ع × س

جہاں ع = ہائیڈروجن کا برقی کیمیائی معادل

س = رو امپیروں میں

لیکن ہمیں یہ معلوم ہے کہ طبعی تپش اور دباؤ پر ایک گرام ہائیڈروجن کا حجم = ۱۱۲۰۰ مکعب سم =

لہٰذا ع س گرام ہائیڈروجن کا حجم طبعی تپش اور دباؤ پر =

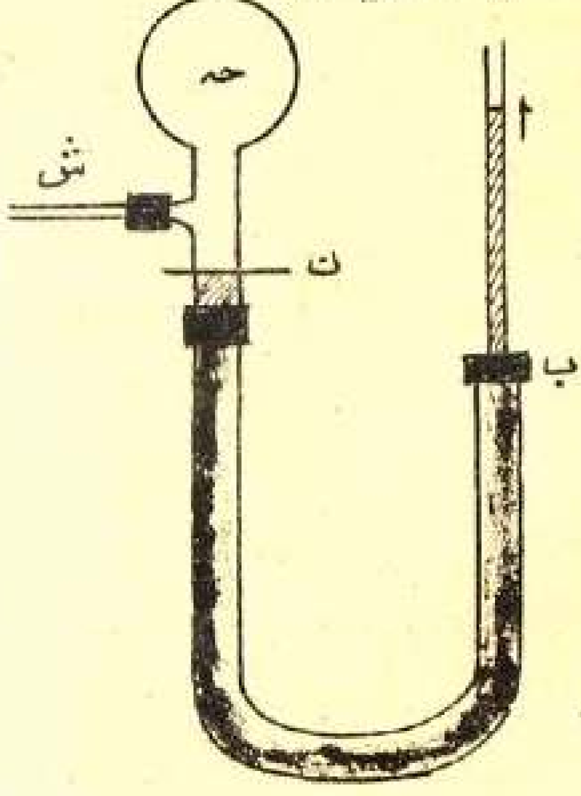
= ۱۱۲۰۰ × ع س مکعب سم، اور یہ مقدار = ح

∴ مساوات (۱۱) سے $\text{د}\,\text{ح}_۱ = \frac{\text{د ت}_۱}{\text{ت}}\,(۱۱۲۰۰ \times \text{ع س})$ ......(۱۲)

لہٰذا اس مساوات سے د حہ کی قیمت معلوم ہوجاتی ہے اور د۱ اور د۲ کی قیمتیں تو پہلے ہی سے معلوم ہیں اسلئے مساوات (۱۰) سے لہ کی قیمت ہائڈروجن کے لئے دریافت کی جاسکتی ہے۔

اے اینڈرسن کا طریقہ: — اس طریقہ کو بعض دفعہ "مستقل حجم کے طریقہ سے" بھی موسوم کیا جاتا ہے۔ ۱۹۲۱ء میں پروفیسر اینڈرسن⑮ نے گیسوں کی لزوجت کی دریافت کے لئے اسکو استعمال کیا تھا۔

آلہ کی ترتیب شکل ۱۳ء میں دکھائی گئی ہے۔ یہ ایک اُلٹی صراحی حہ پر مشتمل ہے جس کی گردن ربر کی نلی کے ذریعہ ایک شیشہ کی نلی ۱ ب کے ساتھ جوڑ دی جاتی ہے۔ نلی ۱ ب اور صراحی حہ میں پارہ ایک خاص بلندی تک جس کو ۲ اور ن سے تعبیر کیا گیا ہے بھر دیا جاتا ہے۔ صراحی کے جونے کے نیچے ایک شعری نلی ش بھی جوڑ دی جاتی ہے جس کے دوسرے سرے پر ربر کی نلی لگائی جاتی ہے، اس ربر کی نلی کو حسب ضرورت چٹکی سے بند کردیا جاتا ہے۔ اس پورے آلہ کو لوہے کے ایک استادہ کے ساتھ لگادیا جاتا ہے اور بازو اب کو ایک حساس ترتیب کی مدد سے اوپر یا نیچے ہٹایا جاسکتا ہے۔



شکل ۱۳ء

تجربہ میں، گیس کا وہ حجم دریافت کر لیا جاتا ہے جو صراحی کے اندر (معہ شعری نلی کے کسی خاص نشان ن تک بھری ہوئی ہوتی ہے۔ پھر ا ب کو ترتیب دے کر پارہ نشان ن کے نیچے لایا جاتا ہے۔ اسکے بعد شعری نلی کے سرے پر جو چھوٹی ربر کی نلی ہوتی ہے اس کو بند کر کے اور ا ب کو اوپر اٹھا کر گیس بھچکائی جاتی ہے تاکہ پارہ کی سطح پھر ن تک آجائے۔ چند دقیقوں کے بعد جب اسکا یقین ہو جاتا ہے کہ گیس کی تپش کمرے کی تپش پر آگئی ہے، پارہ کی ڈوری کی سطح کا فرق لکھ لیا جاتا ہے۔ ن کے پاس والی چھوٹی ربر کی نلی کو پھر ایک معلوم وقفہ تک کھلا رکھ کر (جیسے جیسے گیس شعری نلی میں سے باہر نکلتی جاتی ہے) پارہ کی سطح کو مسلسل اس طرح ترتیب دیا جاتا ہے کہ وہ ہمیشہ نشان ن پر قائم رہے۔ اس طرح گیس، صراحی میں ہمیشہ مستقل حجم کے تحت رہتی ہے۔ اس وقفہ کے اختتام پر پارہ کی سطح کا فرق پھر لکھ لیا جاتا ہے۔ گیس کے مستقل حجم حہ، اور وقفہ و کے دوران میں بالترتیب دونوں دباؤ د اور دً سے، اور نیز بارپیما کی بلندی د کے مشاہدات سے، گیس کی لزوجیت دریافت کی جاتی ہے۔ اگر فی ثانیہ نلی میں داخل ہونے والی گیس کا حجم حہ اور اسکا دباؤ $د_۱$ ہو تو حہ $د_۱$ = د $\frac{\text{فرحہ}}{\text{فرو}}$

کلیہ بائیل اور شارل کی رو سے گیس کے داخلہ کے وقت اگر حجم اور دباؤ کی قیمتیں حہ اور د ہوں تو د حہ = مستقل

$$\therefore \quad د\,\frac{\text{فرحہ}}{\text{فرو}} + حہ\,\frac{\text{فرد}}{\text{فرو}} = \text{صفر}$$

$$\therefore \quad د\,\frac{\text{فرحہ}}{\text{فرو}} = -\,حہ\,\frac{\text{فرد}}{\text{فرو}} = حہ\,د_۱$$

لہذا مساوات (۱۰) سے $(د_۱^۲ - د_۲^۲)\,\frac{\pi}{۱۶}\,\frac{ف^۴}{\text{ل لہ}} =$

$$= -\,حہ\,\frac{\text{فرد}}{\text{فرو}} \quad \ldots\ldots (۱۳)$$

جہاں $\frac{فرد}{فرو}$ داخلہ کے اختتام پر شرح تغیر دباؤ ہے اور حہ گیس کا مستقل حجم ہے۔

تجربہ میں $د_2$، کرۂ ہوائی کا دباؤ ہے اور $د_1$ کی قیمتیں و ثانیوں کے دوران میں دَ اور دً ہیں۔

مساوات (۱۳) سے:-

$$\frac{\pi ف^4}{16 ال لہ حہ}\int_{صفر}^{و} فرو = \frac{1}{2د_2}\int_{دَ}^{دً}\left(\frac{1}{د_1+د_2} - \frac{1}{د_1-د_2}\right) فرد$$

$$= \frac{1}{2د_2}\left[لوک\ \frac{د_1+د_2}{د_1-د_2}\right]_{دَ}^{دً}$$

$$\therefore \frac{\pi ف^4 و}{16 ال لہ حہ} = \frac{1}{2د_2}\left[لوک\ \frac{دً+د_2}{دً-د_2} - لوک\ \frac{دَ+د_2}{دَ-د_2}\right]$$

اب چونکہ $د_2 = د =$ کرۂ ہوائی کا دباؤ

$$\therefore لہ = \frac{\pi ف^4 د و}{8 ل حہ\ لوک\left[\left(\frac{دً+د}{دً-د}\right)\cdot\left(\frac{دَ-د}{دَ+د}\right)\right]} \quad ......(14)$$

$\frac{\pi ف^4}{8 ل حہ}$ آلہ کے لئے مستقل ہے، اگر اس کی قیمت ایک مرتبہ دریافت کرلی جائے تو پھر اسکے دریافت کرنے کی ضرورت نہیں باقی رہتی۔ اس طریقہ سے گیسوں کی لزوجیت مختلف تپشوں پر ایڈورڈ نے دریافت کی تھی۔

لہ کی قیمت "مستقل دباؤ کے طریقہ" سے بھی دریافت کی جاسکتی ہے یعنی اسکا مطلب یہ ہے کہ پارہ کی ڈوری کو کسی خاص فرق بلندی پر رکھ کر دباؤ کے فرق کو مستقل رکھنے سے یہ قیمت دریافت ہوسکتی ہے۔ نقطہ ن کو صراحی کی گردن کے نیچے لیا جاسکتا ہے اور کسی حجم مثلاً حم کے وقفہ کو جون کے ابتدائی

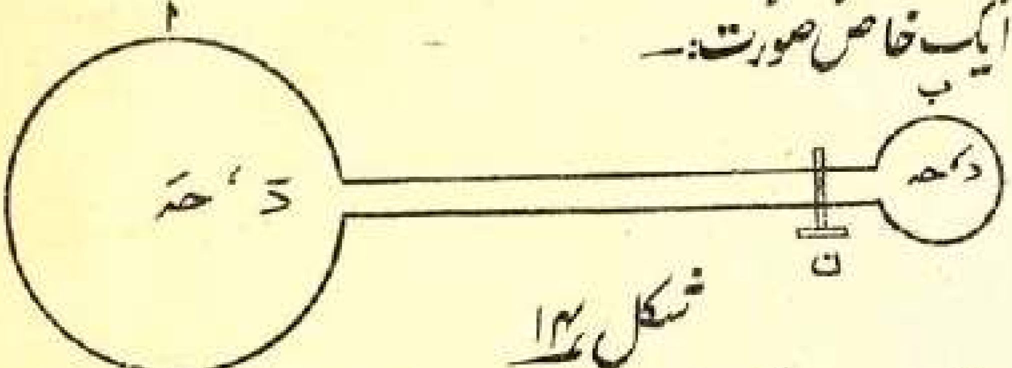
اور آخری مقاموں کے درمیانی طول کے متناظر ہو لکھ لیا جاتا ہے۔

فرض کرو کہ صراحی کے اندر مجموعی دباؤ دَ ہے تو مساوات (۱۰) سے :-

$$\text{حہ} = \frac{(\text{دَ}^2 - \text{دً}^2)\,\pi\,\text{ف}^4}{16\,\text{ل}\,\text{لہ}\,\text{دَ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

تجربہ میں پارہ کی سطحوں کو ہمیشہ ایک دوسرے کے درمیان ایک خاص فاصلہ پر رکھنا دشوار ہوتا ہے۔

ایک خاص صورت :-



شکل ۱۴۲

شکل ۱۴۲ میں گیس کے دو برتن ا اور ب ایک شعری نلی کے ذریعہ ملائے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ ا میں ابتدائی دباؤ دِ اور حجم حہَ اور ب میں ابتدائی دباؤ دِ اور حجم حہ ہے، جب ٹونٹی ن کھولی جاتی ہے تو وقفہ کے بعد فرض کرو کہ ا میں دباؤ دَ اور حجم حہَ اور ب میں دباؤ د اور حجم حہ علی الترتیب ہو جاتا ہے۔

مساوات (۹) سے

$$\text{م} = \frac{\text{مہ}}{\text{لات}} \cdot \frac{\pi\,\text{ف}^4}{16\,\text{ل}\,\text{لہ}} (\text{دَ}^2 - \text{د}^2)$$

لیکن اگر ثہ گیس کی کثافت ہو تو

$$\text{م} = \frac{\text{فہ}}{\text{فو}}(\text{حہ ثہ}) = \frac{\text{فہ}}{\text{فو}}\left(\frac{\text{حہ د مہ}}{\text{لات}}\right) =$$

$$= \frac{\text{حہ مہ}}{\text{لات}} \cdot \frac{\text{فد}}{\text{فو}}$$

$$\therefore \frac{\text{حہ م}}{\text{لا ت}} \cdot \frac{\text{فر د}}{\text{فر و}} = \frac{\text{م}}{\text{لا ت}} \cdot \frac{\pi\ \text{ف}^4}{16\ \text{ل لہ}} (\text{دَ}^2 - \text{د}^2)$$

$$\therefore \frac{\text{حہ فر د}}{(\text{دَ}^2 - \text{د}^2)} = \frac{\pi\ \text{ف}^4}{16\ \text{ل لہ}} \cdot \text{فر و}$$

چونکہ ا میں دباؤ دَ گر رہا ہے اور ب میں دباؤ د بڑھ رہا ہے اس وجہ سے دَ اور د دونوں یہاں متغیر ہونے والی مقداریں ہیں، اس لئے اس جملہ کو آسانی سے تکملایا نہیں جاسکتا۔

کلیہ بائیل سے $\text{دَ حَ} + \text{د حہ} = \text{د}_1 \text{حَ} + \text{د}_2 \text{حہ} =$ مستقل = عہ فرض کرو

$$\therefore \text{دَ} = \frac{\text{د}_1 \text{حَ} + \text{د}_2 \text{حہ} - \text{د حہ}}{\text{حَ}} = \frac{\text{عہ} - \text{د حہ}}{\text{حَ}}$$

$$\therefore \frac{\text{حہ فر د}}{\left(\frac{\text{عہ} - \text{د حہ}}{\text{حَ}}\right)^2 - \text{د}^2} = \frac{\pi\ \text{ف}^4}{16\ \text{ل لہ}} \cdot \text{فر و}$$

د وقفہ کے لئے ا اور ب میں اوسط دباؤ کی حد فرض کرو د_2 سے د_1 تک ہوگی

$$\therefore \int_{\text{د}_2}^{\text{د}_1} \frac{\text{حَ}^2 \text{حہ فر د}}{\text{عہ}^2 + \text{دَ}^2 \text{حہ}^2 - 2\,\text{عہ د حہ} - \text{حَ}^2 \text{د}^2} = \frac{\pi\ \text{ف}^4}{16\ \text{ل لہ}} \int_{\text{صفر}}^{\text{و}} \text{فر و}$$

اسکو تکملانے سے:-

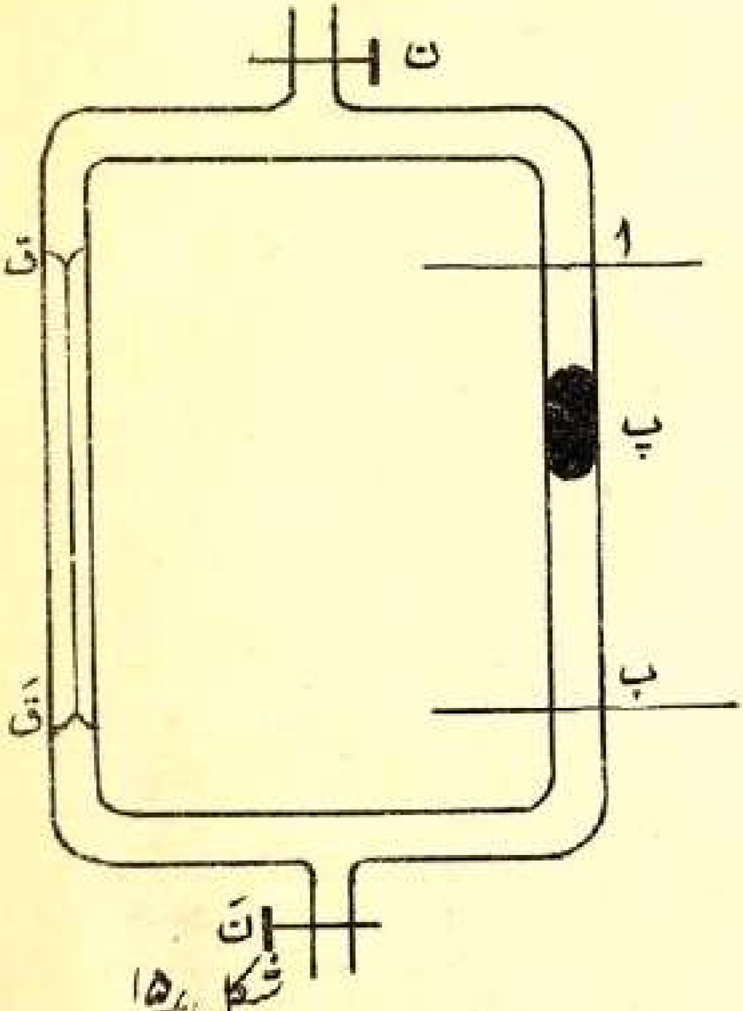
$$\frac{\text{حَ حہ}}{2\,\text{عہ}} \text{لوک} \frac{\text{حہ} + \text{حَ}}{\text{حہ} - \text{حَ}} +$$

$$\frac{\text{حَ حہ}}{2\,\text{عہ}} \text{لوک} \left[\frac{\{(\text{حہ} - \text{حَ})\text{د}_1 - \text{عہ}\}\{(\text{حہ} + \text{حَ})\text{د}_2 - \text{عہ}\}}{\{(\text{حہ} + \text{حَ})\text{د}_1 - \text{عہ}\}\{(\text{حہ} - \text{حَ})\text{د}_2 - \text{عہ}\}} \right] = \frac{\pi\ \text{ف}^4\ \text{د}}{16\ \text{ل لہ}}$$

اس مساوات سے گیس کیلئے لہ کی قیمت حاصل کی جاسکتی ہے۔

رینکن کا لزوجیت پیما:۔ پروفیسر اے، او، رینکن نے سنہ ۱۹۱۰ء میں (۱۷) مختلف گیسوں کی لزوجیت دریافت کرنے کے لئے ایک لزوجیت پیما تجویز کیا۔ عملی کام کے لئے یہ لزوجیت پیما نہایت سادہ سی چیز ہے لیکن اسکا نظریہ کسی قدر مشکل ہے۔ خصوصاً کمیاب گیسوں مثلاً کرپٹن، نیین، وغیرہ کی لزوجیت کی دریافت میں یہ بیحد کار آمد ہے۔

شکل نمبر ۱۵ میں اس لزوجیت پیما کو دکھایا گیا ہے۔ اس میں دو بالکل پاک صاف شیشہ کی نلیاں ہوتی ہیں جن میں سے ہر ایک کا تقریباً طول ۵۰ سمر ہوتا ہے۔ ان میں سے ایک ق قَ، بالکل پتلی شعری نلی ہوتی ہے جس کا قطر تقریباً ۰٫۲ ممر کا ہوتا ہے اور موٹی نلی کا اندرونی قطر تقریباً ۳ ممر کا ہوتا ہے۔



شکل نمبر ۱۵

موٹی نلی پر ا اور ب دو نشانات کئے جاتے ہیں جو انکے ہر ایک سرے سے تقریباً دس سمر کے فاصلہ پر ہوتے ہیں، نلیوں کو یا تو بالکل بند کر دیا جاتا ہے یا ربر کی نلیوں سے ان کو جوڑ کر ایک تختہ سے باندھ دیا

جاتا ہے جو انتصابی مستوی میں گھوم سکتا ہے۔ پ پارہ کا ایک نمایندہ ہے جسکا طول تقریباً ۵ر۱ سم ہے۔ جب پارہ کا یہ نمایندہ آہستہ آہستہ نیچے اترتا ہے تو اس کے نیچے کی گیس شعری نلی میں داخل ہونے پر مجبور ہوتی ہے، اور پھر نمایندے کی اوپر کی فضا میں پھیل جاتی ہے۔ کسی خاص وقت میں نمایندہ کی دُم، نشان ا پر سے اور سر نشان ب سے گزرتا ہے۔

فرض کرو کہ گیس کا مجموعی حجم = ح اور کسی نقطہ و پر پارہ کے نیچے اور اوپر گیس کا دباؤ اور حجم علی الترتیب $د_1$، $ح_1$ اور $د_2$، $ح_2$ ہے۔

اس صورت میں میئر کے کلیہ سے :-

$$\text{م} = \frac{\text{مُ}}{\text{لا ت}} \cdot \frac{\pi\, \text{ف}^{4}}{16\, \text{ل لہ}} \left(\text{د}_1^{2} - \text{د}_2^{2}\right)$$

جہاں م = شعری نلی میں فی ثانیہ داخل ہونے والی یا اس میں سے خارج ہونے والی گیس کی کمیت،

$$\therefore \text{م} = \frac{\text{فر}}{\text{فرو}}\left(\text{ح}_2\, \text{ث}_2\right) = \frac{\text{فر}}{\text{فرو}}\left(\frac{\text{ح}_2\, \text{د}_2\, \text{مُ}}{\text{لا ت}}\right)$$

جہاں ث_2 = گیس کی کثافت

$$\therefore \frac{\text{مُ}}{\text{لا ت}} \cdot \frac{\text{فر}}{\text{فرو}}\left(\text{د}_2\, \text{ح}_2\right) = \frac{\text{مُ}}{\text{لا ت}} \cdot \frac{\pi\, \text{ف}^{4}}{8\, \text{ل لہ}}\left(\text{د}_1 - \text{د}_2\right) \cdot \frac{\left(\text{د}_1 + \text{د}_2\right)}{2}$$

$$\therefore \text{فر}\left(\text{د}_2\, \text{ح}_2\right) = \frac{\text{گ}\ \text{فرو}}{2}\left(\text{د}_1 - \text{د}_2\right)\left(\text{د}_1 + \text{د}_2\right)$$

جہاں $\text{گ} = \frac{\pi\, \text{ف}^{4}}{8\, \text{ل لہ}}$

$$\therefore \text{د}_2\, \text{فرح}_2 + \text{ح}_2\, \text{فرد}_2 = \frac{\text{گ}\ \text{فرو}}{2}\left(\text{د}_1 - \text{د}_2\right)\left(\text{د}_1 + \text{د}_2\right)$$

جب پارہ کا نمایندہ یکساں طریقہ سے نیچے اُترتا ہے تو نمایندہ کے وزن کی وجہ دباؤ د اور وہ دباؤ جو اوپر سے اُسے دباتا ہے، نمایندہ کے نیچے کے دباؤ کو تعادل میں رکھتا ہے۔

∴ د$_1$ = د$_2$ + د = د$_2$ + م ج / پ   جہاں م = پارہ کے نمایندہ کی کمیت
اور پ = اسکے تراش عمودی کا رقبہ

∴ د$_2$ فرحہ$_2$ + حہ$_2$ فر د$_2$ = (گ فرو / ۲) (د$_1$ + د$_2$) د .... (۱۶)

فرض کرو کہ نلی کے اندر جبکہ وہ افقی ہو، یکساں دباؤ = ع

اب چونکہ ح = حہ$_1$ + حہ$_2$ اسلئے کلیہ بائیل سے:—

ع ح = د$_1$ حہ$_1$ + د$_2$ حہ$_2$ = (د$_2$ + د) (ح − حہ$_2$) + د$_2$ حہ$_2$

∴ د$_2$ = ع − د + د حہ$_2$ / ح

اب مساوات (۱۶) میں د$_1$ اور د$_2$ کی قیمتیں لکھنے سے:—

(ع − د + د حہ$_2$ / ح) فرحہ$_2$ + حہ$_2$ د فرحہ$_2$ / ح =

= گ (فرو / ۲) (۲ع − د + ۲د حہ$_2$ / ح) د

یعنی (ع + ۲د حہ$_2$ / ح − د) فرحہ$_2$ =

= (گ د / ۲) (۲ع − د + ۲د حہ$_2$ / ح) فرو

فرض کرو کہ لا = ۲ع − د + ۲د حہ$_2$ / ح

∴ فرلا = (۲د / ح) فرحہ$_2$ یعنی فرحہ$_2$ = (ح / ۲د) . فرلا

∴ (ح / د) (لا − ع) فرلا = گ د لا فرو .... (۱۷)

فرض کرو کہ و ثانیوں میں حہ$_2$، حہ$_2$ میں متغیر ہوجاتا ہے

تب لاَ = ٢ ع ـ د + ٢ د حہَ / حَ

مساوات (١٧) کو حدود لا اور لاَ کے درمیان وثانیوں میں تکملانے سے :-

حَ/د (لا ـ ع لوک لا)^{لاَ}_{لا} = گ دو

اس مساوات میں لا اور لاَ کی قیمتیں لکھنے سے :-

٢ (حَ٢ ـ حہ٢) ـ ع حَ/د لوکو [(١ ـ د/ع٢ (١ ـ ٢ حہَ٢/حَ)) / (١ ـ د/ع٢ (١ ـ ٢ حہ٢/حَ))] = گ دو

اگر باہر نکلنے والی گیس کا حجم اس نظام کے ساتھ باقرینہ ہو اور حہ کے مساوی ہو، یعنی ا اور ب نشانوں کے درمیان گیس کا حجم اگر حہ کے مساوی ہو جو وقت و میں پارہ کے نمایندہ سے باہر نکالی جاتی ہے تو

حَ٢ ـ حہ٢ = حہ اور حہَ٢ + حہ٢ = حَ

∴ ٢ حہَ٢ = حَ + حہ اور ٢ حہ٢ = حَ ـ حہ

اور اوپر کی مساوات یوں لکھی جا سکتی ہے :-

٢ حہ ـ ع حَ/د لوکو [(١ + د حہ/ع٢ حَ) / (١ ـ د حہ/ع٢ حَ)] = گ دو

اب چونکہ د حہ/ع٢ حَ بہت چھوٹی مقدار ہے اسلئے لوکو کے سلسلہ کو پھیلانے میں اسکے اونچے قوت نما والی رقوم کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

∴ ٢ حہ ـ ع حَ/د [{ د حہ/ع٢ حَ ـ ١/٢ . د٢ حہ٢/ع٤ حَ٢ ...... } ـ { ـ د حہ/ع٢ حَ ـ ١/٢ . د٢ حہ٢/ع٤ حَ٢ ...... }] = گ دو

$$\text{یعنی}\ ۲\,\text{حہ} - \frac{\text{عح}}{\text{د}}\cdot\frac{\text{د}^۲\,\text{حہ}}{\text{دع}^۲} = \text{گ.دو}$$

$$\therefore\ \text{حہ} = \frac{\pi\,\text{ف}^۴\,\text{دو}}{۸\,\text{ل}\,\text{لہ}} = \frac{\pi\,\text{ف}^۴\,\text{مَ}\,\text{ج}\,\text{و}}{۸\,\text{ل}\,\text{لہ}\,\text{بہ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۸)$$

یہاں ہم نے پارہ کی کمیت مَ کی وجہ سے جو دباؤ پڑتا ہے اسکو $\frac{\text{مَ ج}}{\text{بہ}}$ لیا تھا۔ لیکن سطحی تناؤ کی باعث اور پارہ کے نمایندہ کے دونوں سروں کے انحنا کی وجہ سے جبکہ نمایندہ حرکت میں ہو، نمایندہ کے دونوں رخوں پر موثر فرق دباؤ $\text{د} = \frac{(\text{مَ} - \text{فہ})\,\text{ج}}{\text{بہ}}$ جہاں فہ ایک بہت چھوٹی مقدار ہے اور تجربہ کے لئے مستقل ہے۔ یہاں یہ امر قابل لحاظ ہے کہ مَ کی قیمت میں ایک بالکل چھوٹی مقدار کی کمی ہوگئی ہے۔ اسکا مطلب یہ ہے کہ پارہ کا نمایندہ نلی کے دیواروں کے ساتھ گرنے کے دوران میں کسی قدر چمٹ جاتا ہے۔

حہ کی قیمت تجربہ میں کچھ تھوڑی سی متغیر ہوتی ہے، اسکی وجہ نمایندہ کی حرکت ہے لیکن $\frac{\text{دو}}{\text{حہ}}$ کی قیمت تجربہ میں ہمیشہ مستقل رہتی ہے۔

$$\therefore\ \frac{\text{دو}}{\text{حہ}} = \text{گ} = \text{مستقل}$$

ہم نے پہلے یہ فرض کیا ہے کہ حہ، نشانات ا اور ب کے درمیان گیس کا حجم ہے لیکن حقیقت یہ ہے کہ ان دونوں نشانات کے درمیان نمایندہ کی موجودگی ہے

$\text{حہ} = \text{حا} - \frac{\text{مَ}}{\text{ثہ}}$ جہاں حا = ا اور ب کے درمیان صحیح حجم، اسکی قیمت ا اور ب کے درمیان پارہ بھر کر تولنے سے دریافت کی جاسکتی ہے۔

اور ثہ = پارہ کی کثافت

$$\therefore\ \text{گ}\left(\text{حا} - \frac{\text{مَ}}{\text{ثہ}}\right) = \frac{(\text{مَ} - \text{فہ})\,\text{ج}\,\text{و}}{\text{بہ}}$$

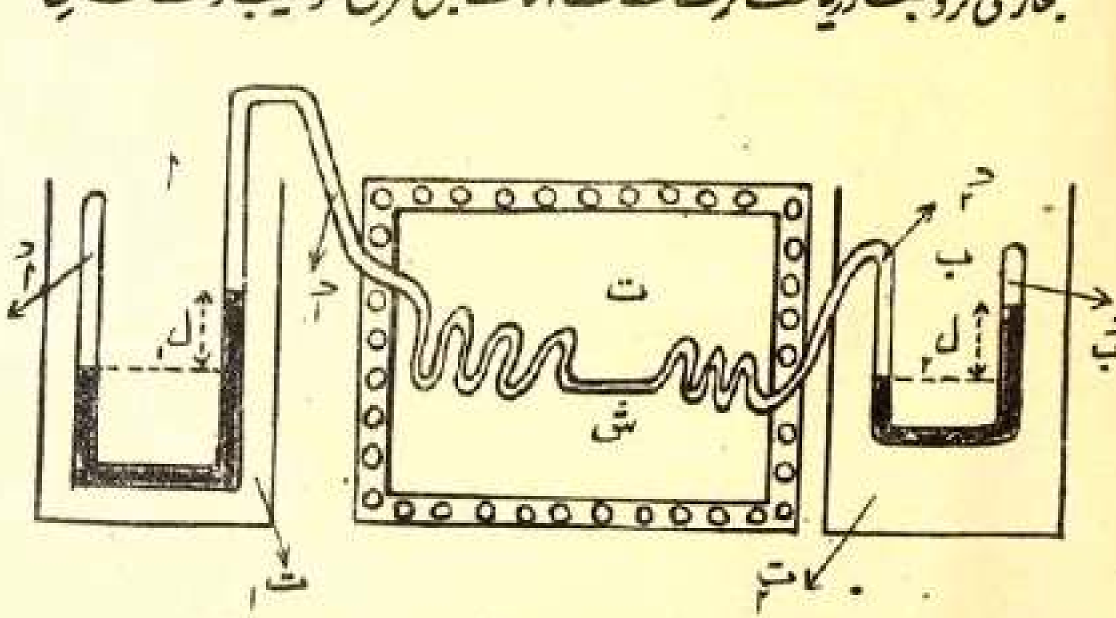
$$\text{یعنی}\ (\text{مَ} - \text{فہ}) = \frac{\text{گ}\,\text{بہ}}{\text{ج}\,\text{و}}\left(\text{حا} - \frac{\text{مَ}}{\text{ثہ}}\right)$$

یہ مَ اور (حا − $\frac{م}{ج}$) کے درمیان خطی تعلق کو ظاہر کرتا ہے۔ اسلئے مَ اور و کی مختلف قیمتیں لیکر منحنی مرتسم کرنے سے ایک خط مستقیم حاصل ہوتا ہے جس کے میلان سے $\frac{گ ب}{ج}$ حاصل ہوتا ہے اور اس کی مدد سے گ کی قیمت نکالی جا سکتی ہے۔ لہذا گیس کے لئے ل کی صحیح قیمت مساوات (۱۸) سے دریافت کی جا سکتی ہے۔ اس خط کے مقطوعہ سے ($\frac{حا - \frac{م}{ج}}{و}$ محور پر) فہ کی قیمت حاصل ہو جاتی ہے۔

اس طریقہ سے پروفیسر رینکن نے متعدد گیسوں کی لزوجت دریافت کی اور یہ ثابت کیا کہ دباؤ کے ساتھ اسکا کوئی تعلق نہیں ہے۔

۱۹۲۶ء میں ایڈورڈ نے نیین کی لزوجت صفر° م — ۴۴۰° م کی وسعت کے اندر اسی لزوجت پیما سے دریافت کی۔ اور ولیم نے صفر° م — ۱۰۰۰° م تک اسکی پیمائش کرنے میں کامیابی حاصل کی اور یہ دریافت کیا کہ مختلف تپشوں پر گیسوں کی لزوجت سے متعلق سدرلینڈ کے کلیہ میں کسی قدر فرق ہے۔

بخارات کی لزوجت: — پروفیسر رینکن نے ۱۹۱۳ء میں برومین کے بخار کی لزوجت دریافت کرنے کے لئے آلات جس طرح ترتیب دئے تھے ان



شکل ۱۶۱

کو شکل ۱۶ میں دکھایا گیا ہے۔ جن لانما نلیوں میں بر ومین مائع کی حالت میں رکھی گئی تھی، ان کو ا اور ب حماموں میں رکھا گیا ہے اور ان کی تپشیں $ت_۱$ اور $ت_۲$ مستقل رکھی گئی ہیں۔ چونکہ $ت_۱$ تپش $ت_۲$ سے زیادہ ہے، اس لئے بخاری دباؤ $د_۱$، $د_۲$ سے زیادہ ہوگا۔ $د_و$ اور $د_ب$، دونوں نلیوں میں، علی الترتیب بخار دباؤ کی قیمتیں اُن خاص تپشوں پر ہیں۔ ب میں بخار ا سے آکر منجمد ہونے لگتا ہے اور لانما نلی میں $ل_۲$ کی بلندی کے مساوی استوانہ نیچے اتر آتا ہے۔ ا میں مائع کی سطحوں میں فرق $ل_۱$ ہے۔ شعری نلی ش میں سے جب بخار گزرتا ہے تو یہ آتشدان کی مدد سے ت تپش تک زاید گرم کیا جاتا ہے۔ مرغولہ نما نلیاں (جس طرح کہ شکل میں دکھایا گیا ہے) آتشدان کے اندر اس لئے رکھی جاتی ہیں کہ بخارات ان میں سے گزرتے ہوئے آتشدان کی تپش تک گرم کئے جا سکیں۔

$$د_۱ = د_و - ث_۱ ج ل_۱ \quad \text{اور} \quad د_۲ = د_ب + ث_۲ ج ل_۲$$

جہاں $ث_۱$ = برومین کے بخار کی کثافت $ت_۱$ تپش پر

اور $ث_۲$ = 〃 〃 〃 〃 $ت_۲$ 〃

مییر کے کلیہ سے

$$م = \frac{مے}{ت} \cdot \frac{\pi ف^۴}{۱۶ ل لہ}(د_۱^۲ - د_۲^۲)$$

$$\text{اور}\quad د_۱ حم_۱ = \frac{\pi ف^۴}{۱۶ ل لہ}(د_۱^۲ - د_۲^۲)$$

جہاں $حم_۱$ = تپش ت اور دباؤ $د_۱$ پر فی ثانیہ تبخیر پانیوالے بخار کا حجم۔

کلیہ بائیل اور شارل کی رو سے:-

$$\frac{د_۱ حم_۱}{ت} = \frac{د_ہ حم_ہ}{ت_ہ}$$

جہاں $د_ہ$ اور $ت_ہ$ کرہ ہوائی کے دباؤ اور تپش کی قیمتیں علی الترتیب ہیں، اور $حم_ہ$ اس تپش اور دباؤ پر فی ثانیہ تبخیر پانے والے بخار کا حجم ہے۔

$$\therefore لہ = \frac{\pi ف^۴}{۱۶ ل}\left(\frac{د_۱^۲ - د_۲^۲}{د_ہ حم_ہ ت}\right) ت_ہ$$

$$= \frac{\pi\, ف^{4}}{16\, ل}\left(\frac{د_1^{2} - د_2^{2}}{د_0\, م_0\, ت}\right) ت_0\, ش_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

جہاں ثہ = کرہ ہوائی کے دباؤ اور تپش پر کثافت اور

ثہ = فی ثانیہ تبخیر پانے والے بخار کی کمیت کرہ ہوائی کے دباؤ اور تپش پر جس کی پیمائش گرم لانما نلی کی بلندی کے تغیر کی شرح سے کی جاتی ہے اگر کثافت معلوم ہو۔

لہٰذا اوپر کی مساوات میں ح اور ح کی قیمتیں درج کرنے سے بروئمین کے بخارات کی لزوجت دریافت کی جاسکتی ہے۔ اس کے بعد ۱۹۲۴ء میں اسمیتھ اور ۱۹۲۹ء میں شیسینی نے اس آلہ میں خفیف سی تبدیلیاں کیں[14]۔

اس طریقہ سے فائدہ یہ ہے کہ بغیر کسی علیحدہ داب پیما کے دباؤ کی پیمائش ہوسکتی ہے چونکہ شعری نلی میں سے گزرتے ہوئے بخارات ملطف ہوجاتے ہیں اس لئے کنڈسن نے یہ تجویز کی کہ اوپر کے ضابطہ سے لزوجت کی جو قیمت حاصل ہوتی ہے اس کو $\left(1 + \frac{4\, جہ}{ف}\right)$ سے ضرب دینا ضروری ہے جہاں جہ تصحیحی جز ہے اور جو سالمات کی اوسط آزاد راہ کے متناسب ہے۔

گیسوں کی لزوجت پر دباؤ کا اثر:۔ گیسوں کے نظریہ تحرک سے میکسویل نے یہ ثابت کیا کہ لزوجت پر دباؤ کا کوئی اثر نہیں ہوتا۔ اس نتیجہ کی تصدیق پروفیسر ریٹیکون اور دیگر اشخاص نے، دباؤ کی ایک بڑی وسعت تک کی ہے اور ہر حالت میں اس کو صحیح پایا۔

بہت ہی کم دباؤ پر (مثلاً پارہ کے ۰.۱ مم کے نیچے) دباؤ کی کمی سے لزوجت میں کمی واقع ہوتی ہے۔

اور بہت ہی اونچے دباؤ پر بھی میکسول کا کہنا درست نہیں۔ اس کے متعلق دسویں باب میں بحث کی جائے گی۔

گیسوں کی لزوجت پر تپش کا اثر:۔ عام طور پر تپش کے بڑھنے سے لزوجت

میں اضافہ ہوتا ہے۔

میکسول کا بیان ہے کہ $لہ \propto ت^{\frac{1}{2}}$ جہاں ت = گیس کی تپش مطلق لیکن بعد میں $ق \propto \frac{1}{ص^{5}}$ کو کلیہ قوت فرض کرتے ہوئے، اس نے ایک کلیہ وضع کیا:—

$$لہ \propto ت$$

جہاں ق = دو سالمات کے درمیان کششی قوت

ص = سالمات کے درمیان فاصلہ

پروفیسر جیمین نے بعد میں صرف یہ فرض کرتے ہوئے کہ سالمات کے درمیان دفع کی قوت $ق \propto \frac{1}{ص^{ن}}$ کی شکل کی ہوتی ہے یہ نتیجہ اخذ کیا:—

$$لہ \propto ت^{\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{ن-1}\right)}$$

جہاں ن = کوئی صحیح عدد

اسکے بعد سدرلینڈ[5] نے کششی قوت ق کو $ف\left(\frac{1}{ص}\right)$ کے متناسب فرض کرتے ہوئے ایک کلیہ حاصل کیا جو حسب ذیل ہے:—

$$لہ \propto \frac{ت^{\frac{1}{2}}}{1 + \frac{س}{ت}} \propto \frac{ت^{\frac{3}{2}}}{س + ت}$$

جہاں س = ایک مستقل، جس کو سدرلینڈ کے مستقل سے موسوم کیا جاتا ہے۔ یہ ضابطہ تپش کی بڑی بڑی قیمتوں یعنی تقریباً ۱۰۰۰° م تک صحیح ثابت ہوا ہے۔ لیکن اس سے زائد تپش پر اسکا استعمال درست نہیں ہے۔

۱۹۲۴ء میں جونس نے دونوں کلیات قوت کو (یعنی جذب اور دفع دونوں کو) میکسول اور جیمین کی طرح فرض کرتے ہوئے یہ ثابت کیا:—

$$لہ \propto \frac{ت}{ت^{\frac{ن-گ}{2(ن-1)}} + \frac{گ}{ت^{\frac{1}{2}}}}$$ جہاں گ = مستقل

سدرلینڈ کا کلیہ یوں لکھا جا سکتا ہے:۔ $لیت = \frac{گہ\ ت^{3/2}}{س + ت}$

جہاں گہ = کوئی دوسرا مستقل

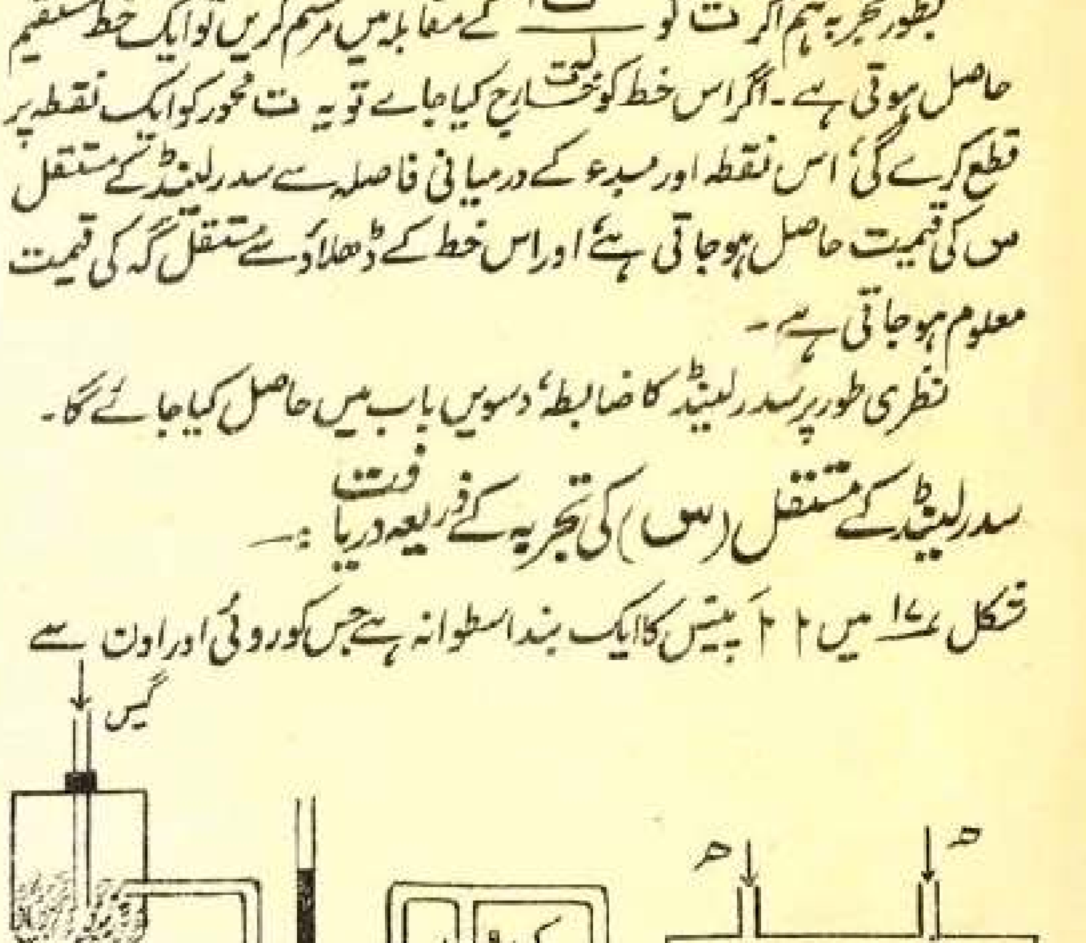
یعنی $\frac{گہ\ ت^{3/2}}{لیت} = س + ت$

بطور تجربہ ہم اگر ت کو $\frac{ت^{3/2}}{لیت}$ کے مقابلہ میں ترسیم کریں تو ایک خط مستقیم حاصل ہوتی ہے۔ اگر اس خط کو خارج کیا جائے تو یہ ت محور کو ایک نقطہ پر قطع کرے گی، اس نقطہ اور مبدء کے درمیانی فاصلہ سے سدرلینڈ کے مستقل س کی قیمت حاصل ہو جاتی ہے اور اس خط کے ڈھلاؤ سے مستقل گہ کی قیمت معلوم ہو جاتی ہے۔

نظری طور پر سدرلینڈ کا ضابطہ، دسویں باب میں حاصل کیا جائے گا۔

سدرلینڈ کے مستقل (س) کی تجربہ کے ذریعہ دریافت:۔

شکل ۱۷ء میں اَ اَ پیتل کا ایک بند استوانہ ہے جس کو روئی اور اون سے



شکل ۱۷ء

لپیٹ دیا جاتا ہے۔ اس اسطوانہ کے اندر شیشہ کا ایک بڑا جوفہ ب ہے جس کو شعری نلی ن ق سے احتیاط کے ساتھ جوڑ دیا جاتا ہے۔ شعری نلی مرغولہ نما بنائی جاتی ہے۔ جوفہ کا دوسرا سرا پارے کے داب پیما د سے ملایا جاتا ہے۔ اس داب پیما میں، خشک کرنے والی ایک بوتل ن کے ذریعہ، ہوا یا گیس ٹونٹی ک کو کھول کر، پمپ سے داخل کی جاتی ہے۔ بھاپ یا سرد پانی، پیتل کے اسطوانہ میں سے گزارا جاتا ہے تاکہ شعری نلی میں سے گزرنے والی گیس کو کسی خاص تپش پر رکھا جا سکے۔ تجربہ کے وقت، داب پیما میں ہوا، پمپ کے ذریعہ داخل کی جاتی ہے اور ٹونٹی ک بند کر دی جاتی ہے۔ پارہ کی سطحوں میں باہمی فرق ہونے سے ہوا پر زائد دباؤ عمل کرتا ہے اور اس کی وجہ سے شعری نلی میں سے ہوا آہستہ آہستہ گزرتی ہے، اور چنانچہ داب پیما کی داہنی جانب پارہ کا اسطوانہ بتدریج بڑھنے لگتا ہے۔ ایک متحرک خوردبین (جس کو شکل میں نہیں دکھایا گیا ہے) میں پارے کے اسطوانہ کی داہنی ساق کو ماسکہ میں لایا جاتا ہے اور چشمہ والے پیمانہ کے کسی خاص نشان کو دیکھ لیا جاتا ہے۔ جب پارے کی ڈوری کا ہلالی سرا داہنی جانب بڑھتے ہوئے اس خاص نشان سے منطبق ہونے لگتا ہے تو ایک چلرکنی گھڑی چلا دی جاتی ہے۔ اس کے بعد متحرک خوردبین کو اس کے پیمانہ پر کچھ فاصلہ (مثلاً "۱" ملی میٹر) اوپر اٹھایا جاتا ہے، اور پھر جب پارے کی ہلالی سطح اس خاص نشان سے منطبق ہونے لگے تو چلرکنی گھڑی میں وقت کا وقفہ دیکھ لیا جاتا ہے۔ اس طرح زائد دباؤ کی ایک خاص قیمت سے کسی مقررہ دباؤ کی قیمت "تک"، وقت کے وقفہ کے متعدد مشاہدات حاصل کئے جاتے ہیں اور پھر ان سب وقفوں کا اوسط دریافت کر لیا جاتا ہے۔

دو تجربے کرنا ضروری ہے۔ ایک تجربہ میں، تپش کمرہ کی تپش کے مساوی رکھی جاتی ہے اور دوسرے تجربہ میں زائد دباؤ کی ان ہی قیمتوں کے لئے، بھاپ

کی تپش رکھنی ہوتی ہے یعنے کسی ایک ہی زائد دباؤ دسے زائد دباؤ دَ تک پہنچنے میں جتنا وقفہ درکار ہوتا ہے، وہ دونوں صورتوں میں دریافت کرلیا جاتا ہے۔ درحقیقت، یہ طریقۂ عمل رینکن کے لزوجت پیما کی ایک خاص صورت ہے۔ پارہ کی ڈوری سے یہاں گیس ڈھکیلی جاتی ہے لیکن رینکن کے لزوجت پیما میں، پارے کا نمایندہ گیس کو ڈھکیلتا ہے۔

فرض کرو کہ کمرہ کی تپش تِ ہے جو کہ ہلالی سرے سے ط تک تصور کی جاسکتی ہے۔

اور یہ بھی فرض کرو کہ اس حصہ کا دباؤ دَ، اور کسی وقت د میں حجم ھ ہے اور نیز بھاپ کی تپش یعنی جوف کے اندر گیس کی تپش ت ہے مزخولہ نما شعری نلی کے دوسرے سرے پر دباؤ (دِ) کرہ ہوائی کے دباؤ کے مساوی ہوگا۔

اب نلی میں ایک چھوٹی سی دھجی فرلا ط سے لا فاصلہ پر لو۔

لا پر تپش = ت کا کوئی تفاعل = ھ (ت)

$$\therefore\ \text{فرلا} = \text{ھَ}\,(\text{ت})\ \text{فرت}$$ ، جہاں ھَ (ت)، ھ (ت) کا تفرقی سر ہے۔

میئر کے ضابطہ سے

$$\text{م} = \frac{\text{ھ}}{\text{لا ت}}\left(\text{دَ}^{2} - \text{دِ}^{2}\right)\frac{\pi\ \text{ف}^{4}}{16\ \text{ل لَ}} \qquad \ldots\ldots\ldots(20)$$

$$\text{لیکن م} = \frac{\text{فرح}}{\text{فرو}}\left(\text{ح ثہ}_{\text{ت}} + \int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}} \text{۱ فرلا ثہ}\right)$$

جہاں ثہ = گیس کی کثافت کمرہ کی تپش تِ پر

اور $\text{ثہ}_{\text{ت}}$ = 〃 〃 بھاپ 〃 ت 〃

اور ۱ فرلا = ط کی داہنی جانب اجس چھوٹی سی دھجی کا حجم۔

$$\text{چونکہ} \int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}} \text{۱ فرلا ثہ} = \int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}} \text{۱ فرلا}\,\frac{\text{ھ د}}{\text{لا ت}} = \frac{\text{۱ د ھ}}{\text{لا}}\int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}}\frac{\text{فرلا}}{\text{ت}} =$$

$$= \frac{\text{ا د م}}{\text{۸ ت}} \int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}} \text{ھ(ت) فت} =$$

$$= \frac{\text{ا د م}}{\text{۸}} \left(\text{ء(ت)} - \text{ء(ت}_1\text{)} \right) \text{ فرض کرو}$$

$$\therefore \text{۲۰} = \frac{\text{ف}}{\text{فو}} \left[\frac{\text{د م}}{\text{۸}} \left\{ \frac{\text{ح}}{\text{ت}_1} + \text{۱} \left(\text{ء(ت)} - \text{ء(ت}_1\text{)} \right) \right\} \right]$$

$$= \frac{\text{د م}}{\text{۸ ت}_1} \cdot \frac{\text{فح}}{\text{فو}}$$

مساوات (۲۰) سے

$$\frac{\text{د م}}{\text{۸ ت}_1} \cdot \frac{\text{فح}}{\text{فو}} = \frac{\text{م}}{\text{۸ ت}} \left(\text{د}^2 - \text{د}_0^2 \right) \frac{\pi \text{ ف}^4}{\text{۱۶ ل ل}}$$

$$\therefore \text{د فح} = \frac{\text{ت}_1}{\text{ت}} \left(\text{د}^2 - \text{د}_0^2 \right) \frac{\pi \text{ ف}^4}{\text{۱۶ ل ل}} \cdot \text{فو}$$

گیس کے مجموعی حجم ح کے لئے جو و ثانیوں میں گزرتا ہے تکملانے سے :-

$$\text{د ح} = \frac{\text{ت}_1}{\text{ت}} \left(\text{د}^2 - \text{د}_0^2 \right) \frac{\pi \text{ ف}^4}{\text{۱۶ ل ل}} \cdot \text{و}$$

$$\therefore \text{لی}_{\text{ت}} = \frac{\text{ت}_1}{\text{ت}} \left(\text{د}^2 - \text{د}_0^2 \right) \cdot \frac{\pi \text{ ف}^4}{\text{۱۶ ل دح}} \cdot \text{و} = \frac{\text{ت}_1}{\text{ت}} \cdot \text{و بہ}$$

جہاں $\text{بہ} = \frac{\left(\text{د}^2 - \text{د}_0^2 \right) \pi \text{ ف}^4}{\text{۱۶ ل د ح}}$ اور $\text{لی}_{\text{ت}}$ = ت تپش پر گیس کی لزوجت۔

تجربہ میں جبکہ کمرہ کی تپش ت_1 ہو تو $\text{ت} = \text{ت}_1$ اور $\text{لی}_{\text{ت}} = \text{لی}$
فرض کرو کہ وقت $\text{و} = \text{و}_1$ تب

$$\text{لی}_{\text{ت}_1} = \text{و}_1 \text{ بہ} \quad \text{.......... (۲۱)}$$

تجربہ کے دوسرے حصہ میں جبکہ وہ بھاپ کی تپش ت پر کیا جاتا ہے، چونکہ بڑے جوفہ کے حجم کے مقابلہ میں، بھاپ کے اسطوانہ کی بیرونی نلی کا حجم بالکل چھوٹا ہوتا ہے اسلئے ہم یہ فرض کر لیتے ہیں کہ شعری نلی میں داخل ہونے والی گیس کی تپش، بھاپ کی تپش ت کے مساوی ہے، یعنی پارے کے نمائندہ اور نشان ط کے درمیان گیس ت تپش پر ہے۔

لہذا اس صورت میں $\text{ت}_1 = \text{ت}$ اور وقت $= \text{و}$

$\therefore\ \text{ل}_{\text{ت}} = \text{و ب}$ .... (۲۲)

$\therefore$ مساوات (۲۱) اور (۲۲) سے

$$\frac{\text{ل}_{\text{ت}}}{\text{ل}_{\text{ت}_1}} = \frac{\text{و}}{\text{و}_1} = \left(\frac{\text{گ ت}^{\frac{3}{2}}}{\text{س} + \text{ت}}\right) \times \left(\frac{\text{س} + \text{ت}_1}{\text{گ ت}_1^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\therefore\ \frac{\text{و}}{\text{و}_1} = \left(\frac{\text{س} + \text{ت}_1}{\text{س} + \text{ت}}\right) \cdot \frac{\text{ت}^{\frac{3}{2}}}{\text{ت}_1^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{.................... (۲۳)}$$

اس مساوات سے سدرلینڈ کے مستقل س کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہے۔

موصلیت حرارت اور کسی گیس کی لزوجیت:۔ گیسوں کے نظریۂ تحرک سے یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ موصلیت حرارت اور لزوجیت کے درمیان کوئی خاص تعلق ضرور ہے، یعنی

$\text{صہ} = \text{لہ} \cdot \text{ن}_{\text{ح}}$ جہاں $\text{ن}_{\text{ح}} =$ مستقل حجم پر کسی گیس کی حرارت نوعی

اور $\text{صہ} =$ گیس کی موصلیتِ حرارت

گیس کے سالمات کو لچکدار کرّوں سے تعبیر کرتے ہوئے بعد میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ

$\text{صہ} = \text{ٹہ لہ ن}_{\text{ح}}$

جہاں $\text{ٹہ} =$ مستقل $=$ ۲٫۵۰۰ (پروفیسر[۱۹] چیپمن کے مطابق)

اس مساوات کو عملی طور پر جانچا گیا اور ایک جوہری گیسوں کے لئے یہ صحیح ثابت بھی ہو چکی ہے لیکن ایسی گیسوں مثلاً ایتھیلین، کاربن ڈائی آکسیڈ وغیرہ کے لئے تجربی نتائج اور اس ضابطہ میں مطابقت نہیں ہوتی، صرف مطابقت اس وقت ہوتی ہے جبکہ ہم ثہ = $\frac{۱}{۴}$(۹ نہ − ۵) لیں[۵]۔

جہاں نہ = $\frac{\text{گیس کی حرارت نوعی مستقل دباؤ پر}}{\text{گیس کی حرارت نوعی مستقل حجم پر}}$

ذیل میں مختلف تپشوں پر چند گیسوں کی لزوجت کی قیمتیں دی گئی ہیں:۔

گیس	تپش °م	لزوجت س۔گ۔ث اکائیوں میں
ہوا	صفر	۰.۰۰۰۱۷۱
	۱۵	۰.۰۰۰۱۸۱
ہائیڈروجن	صفر	۰.۰۰۰۰۸۶۴
	۱۰۰	۰.۰۰۰۱۰۶
آکسیجن	صفر	۰.۰۰۰۱۸۷
	۵۴	۰.۰۰۰۲۱۶
نائیٹروجن	صفر	۰.۰۰۰۱۶۶
	۵۴	۰.۰۰۰۱۹۰
کلورین	صفر	۰.۰۰۰۱۲۹
	۲۰	۰.۰۰۰۱۴۷
کاربن ڈائی آکسیڈ	صفر	۰.۰۰۰۱۳۹
	۱۰۰	۰.۰۰۰۱۸۷
نائٹرس آکسیڈ	صفر	۰.۰۰۰۱۳۵
	۱۰۰	۰.۰۰۰۱۸۳

کاربن مان آکسیڈ	صفر	۰ر۰۰۰۱۶۳
	۲۰	۰ر۰۰۰۱۸۴
پانی (بخار)	صفر	۰ر۰۰۰۰۹۱
	۱۰۰	۰ر۰۰۰۱۳۳

ذیل کی جدول میں کمیاب گیسوں کے لئے لزوجتوں کی وہ قیمتیں دی گئی ہیں جن کو پروفیسر رینکن نے دریافت کیا تھا :—

گیس	تپش °م	لزوجت س۔گ۔ث اکائیوں میں
ہیلیم	۹ر۸	۰ر۰۰۰۱۹۱
نیین	۱۰ر۱	۰ر۰۰۰۳۰۴
آرگن	۱۲ر۳	۰ر۰۰۰۲۱۷
کرپٹن	۱۰ر۶	۰ر۰۰۰۲۴۱
زینن	۱۰ر۹	۰ر۰۰۰۲۱۸

ذیل کی جدول میں سدرلینڈ کے مستقل کی قیمتیں دی گئی ہیں :—

گیس	سدرلینڈ کا مستقل "س"	سدرلینڈ کا مستقل "گ"
ہوا	۱۲۰	۰ر۰۸۷
ہائیڈروجن	۷۲	۰ر۰۷۷
آکسیجن	۱۲۷	۰ر۰۸۹
نائٹروجن	۱۱۰	۰ر۰۸۵
ہیلیم	۸۰	۰ر۰۷۸

آرگن	۱٫۷۰	۰٫۰۹۸
کاربن ڈائی آکسائیڈ	۲٫۴۰	۰٫۱۱۴
کاربن مان آکسائیڈ	۱٫۰۲	۰٫۰۸۳
نائٹرس آکسائیڈ	۳٫۱۳	۰٫۱۳۰

ذیل کی جدول میں مہ/لہ ثح کی وہ قیمتیں دیگئی ہیں جو تجربہ سے حاصل ہوئیں اور ان کا مقابلہ ثہ کی قیمتوں سے کیا گیا ہے :-

گیس	مشاہدہ کی ہوئی قیمتیں مہ/لہ ثح	ثہ = ۱/۴ (۹ نہ − ۵)
ہائیڈروجن	۱٫۸۹	۱٫۹۰
ہیلیم	۲٫۳۸	۲٫۴۴
کاربن مان آکسائیڈ	۱٫۸۸	۱٫۹۱
نائٹروجن	۱٫۹۱	۱٫۹۱
ہوا	۱٫۹۱	۱٫۹۱
آکسیجن	۱٫۹۳	۱٫۹۰
کاربن ڈائی آکسائیڈ	۱٫۵۲	۱٫۷۲
ایتھیلین	۱٫۵۵	۱٫۵۵

Chapter VIII.

(۱) Properties of Matter "Poynting & Thomson"; P210 (1922)
A Monograph of Viscometry by "G. Barr"; P17 (1931)
(۲) General Physics E. Edser; P504 (1926)
(۳) Properties of Matter "Newman & Searle", P209 (1928)
(۴) Viscosity of Liquids "E. Hatschek"; P63 (1928)
(۵) ,, ,, ,, P65 (1928)
(۶) Phil. Trans; A, P1 (1894)
(۷) Viscosity of Liquids "E. Hatschek"; P79 (1928)
(۸) ,, ,, ,, ,, P99, (1928)
(۹) Phil. Trans; AP397 (1894)
(۱۰) Viscosity of Liquids "Dunstan & Thole" P31 (1914)
(۱۱) Trans Faraday Soc. 18, P3 (1923)
(۱۲) Viscosity of Liquids "E. Hatschek"; P29 (1928)
(۱۳) J. Amer. Chem. Soc. 35, P737 (1913)
(۱۴) General Physics "E. Edser" P516 (1926)
(۱۵) Phil. Mag. 42, P1022 (1921)
(۱۶) Proc. Roy. Soc. A83 P265 (1910)
(۱۷) A Monograph of Viscometry by "G. Barr"; P169 (1931)
(۱۸) Phil. Mag. 36, P507 (1893)
(۱۹) Properties of Matter "Newman & Searle"; P242 (1928)
(۲۰) Text Book of Heat "Saha & Srivastava"; P132 (1931)

نواں باب

نفوذ اور ولوجی دباؤ

نفوذ:۔ ایک گہرے برتن کے پیندے میں کسی نمک کے محلول کو ڈالدیا جائے اور احتیاط کے ساتھ پانی سے برتن کو اس طرح بھرا جائے کہ محلول میں رویں نہ پیدا ہوں تو یہ دیکھا گیا ہے کہ محلول برتن کے پیندے میں نہیں رہتا بلکہ پورے برتن میں سالمات کی حرکت کی وجہ سے بتدریج پھیل جاتا ہے۔

پوٹاسیم پرمینگینیٹ یا کاپر سلفیٹ، یا کرومک ترشہ کے مرتکز محلول کو کسی خاص گہرائی تک شیشہ کے گہرے برتن میں رکھ کر صاف پانی آہستہ آہستہ اس طرح اُس میں ڈالا جائے کہ مائع میں کوئی رویں نہ پیدا ہوں تو ابتدا میں رنگین اور بے رنگ حصہ کے درمیان نمایاں طور پر ایک واضح سطح نظر آتی ہے لیکن کچھ دیر کے بعد اوپر والا حصہ بتدریج رنگین ہونے لگتا ہے اور برتن کے نچلے حصہ والے مائع کا رنگ پہلے کی نسبت پھیکا ہونے لگتا ہے۔ رنگ کی یہ تبدیلی اسوقت تک برابر جاری رہتی ہے جب تک کہ پورے برتن میں مائع کا رنگ ایک نہ ہو جائے۔ اس عمل کو "نفوذ" سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ مائعات میں یہ عمل گیسوں کے مقابلہ میں بہت سست ہوتا ہے۔

گریہیم پہلا شخص تھا جس نے سنہ ۱۸۵۱ء میں نفوذ پر تجربے کئے۔ اس نے ایک چوڑے منہ کی بوتل لی اور اس میں زیر تجربہ محلول کو بھر دیا۔ اس بوتل کو ایک اور بڑے برتن میں رکھ کر اتنا پانی اس برتن میں ڈالا گیا کہ پانی کی سطح کھلی بوتل کے اوپر آگئی۔ چند دنوں کے بعد بوتل کے اندر کے محلول کو یہ دریافت کرنے کی غرض سے جانچا گیا کہ کتنا نمک نفوذ کے ذریعہ بڑے برتن

میں پہنچ گیا ہے۔ اس وقت یہ معلوم ہوا کہ (الف) مختلف نمکوں کے محلولوں کی شرح نفوذ مختلف ہوتی ہے۔ (ب) نمک، شکر، دھاتی ترشوں وغیرہ کے محلول البومن، گوند، جیلیٹن وغیرہ کی بہ نسبت بہت زیادہ تیزی سے نفوذ پذیر ہوتے ہیں۔ (ج) حل شدہ اشیاء کی وہ مقدار جو اکائی وقت میں ایک پرت سے دوسرے پرت تک گزرتی ہے، ان پرتوں کے درمیان جو فرق ارتکاز ہوگا اس کے متناسب ہوتی ہے۔ (د) نفوذ کی شرح تپش کے ساتھ بڑھتی ہے۔ سادہ ریاضی کی شکل میں ۱۸۵۵ء میں فِک نامی ایک شخص نے ان نتائج کو پیش کیا تھا چنانچہ یہ فِک کے کلیہ سے تعبیر کئے جاتے ہیں۔

فک کا کلیہ۔ فوریئر کے موصلیت حرارت کے کلیہ کو پیش نظر رکھکر فک (۱) نے نفوذ کے کلیہ کو اخذ کیا تھا۔ موصلیت حرارت کا کلیہ یوں بیان کیا جاسکتا ہے:۔

$$\text{ح} = \text{م}\,\frac{\text{فرت}}{\text{فرلا}} \qquad \text{(۱)}$$

جہاں ح حرارت کی وہ مقدار ہے جو اکائی وقت میں ایسی دو متوازی مستویوں کے اکائی رقبہ میں سے گزرتی ہے جن کے درمیان چھوٹا سا "فرلا" فاصلہ ہوتا ہے اور دونوں کی تپش علی الترتیب ت اور ت + فرت ہوتی ہے۔ م موصلیت حرارت کی شرح ہے۔

اسی طرح سے نفوذ کا کلیہ بھی لکھا جاسکتا ہے:۔

$$\text{حہ} = \text{مہ}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} \qquad \text{(۲)}$$

جہاں حہ کسی نمک کی وہ مقدار ہے جو اکائی وقت میں ایسی دو متوازی مستویوں کے اکائی رقبہ میں سے گزرتی ہے جن کے درمیان بہت ہی چھوٹا فاصلہ "فرلا" ہو اور دونوں کے ارتکاز علی الترتیب ع اور ع + فرع ہوں۔ مہ ایک مستقل ہے جسکو حل پذیر شے کے لئے نفوذ کی قدر کہتے ہیں۔

محلول میں اکائی رقبوں کے دو مستوی ایسے لو جو ایک دوسرے سے فرلا فاصلہ پر ہوں۔ اس صورت میں پہلی مستوی سے اکائی وقت میں نمک کی درآمد مساوات (۲) سے مہ $\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$ کے مساوی ہے۔ اکائی وقت میں دوسری مستوی سے نمک کی برآمد مساوی ہے $\text{مہ}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} + \text{فر}\left(\text{مہ}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}\right) =$

$$= \text{مہ}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\text{مہ}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}\right)\text{فرلا}$$

لہٰذا دونوں مستویوں کی درمیانی فضا میں $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\text{مہ}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}\right)\text{فرلا}$ نمک کی مقدار کا اضافہ اکائی وقت میں ہوتا ہے۔ دونوں مستویوں کے درمیان

چونکہ حجم فرلا ہے لہٰذا نمک کی مقدار میں اضافہ فی اکائی حجم فی اکائی وقت مساوی ہے مہ $\frac{\text{فر}^2\text{ع}}{\text{فرلا}^2}$ اور یہ ارتکاز کی شرح تبدیلی کے مساوی ہے۔ لیکن شرح تبدیلی ارتکاز مساوی ہے $\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}}$ جہاں فرت وقت کے وقفہ کی ایک چھوٹی مقدار ہے۔

$$\text{لہٰذا}\quad \frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = \text{مہ}\,\frac{\text{فر}^2\text{ع}}{\text{فرلا}^2} \quad \text{.........(۳)}$$

یہ تفرقی مساوات نفوذ کے سوالات کے حل کرنے میں بہت ہی مفید ہے بشرطیکہ ابتدائی حالات دیئے جائیں۔

مثلاً ع ارتکاز کا ایک ایسا محلول لو جو ایک اسطوانہ نما برتن میں ل طول رکھتا ہے۔ فرض کرو کہ ل طول کا محلل اس پر اوپر کی جانب سے منطبق کیا جاتا ہے۔ مساوات (۳) کو حل کرنے سے ل طول میں کسی نقطہ پر کسی وقت میں ارتکاز ع کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہے جبکہ لا کی وسعت کے حدود [۲] لا = صفر سے لا = ل تک لئے جائیں جبکہ ت = صفر ہو اور نیز جبکہ ت = ∞ ہو۔

$$\text{ح} = \frac{\text{ع}_{\text{صفر}}}{\text{ل} + \text{ل}_{۱}} \left[\text{ل} + \frac{۴\,\text{ل}}{\pi^{2}} - \sum \text{و}^{-\text{مہ}\,\text{ن}^{2} \left(\frac{\pi}{\text{ل}}\right)^{2} \text{ت}}\ \text{جب}\ \frac{\text{ن}\,\pi\,\text{لا}}{\text{ل}} \right\} \quad \ldots (۴)$$

جبکہ ن = ۱، ۳، ۵، ۷، وغیرہ

نفوذ کی قدر کی دریافت :۔ مساوات (۴) سے مہ کی قیمت دریافت کی جاسکتی ہے بشرطیکہ وقتاً فوقتاً کسی نقطہ پر ارتکاز کی تبدیلی (مائع کو بحیثیت مجموعی کسی طرح چھیڑنے کے بغیر) معلوم کی جاسکے۔

۱۸۵۶ء میں لارڈ کلون نے ایک انتصابی برتن کے نچلے نصف حصہ میں محلول بھر کر اوپر کے نصف حصہ میں خالص پانی ڈالا۔ مختلف کثافتوں والے شیشہ کے منکے جب محلول میں رکھے گئے تو ابتدا میں وہ پانی اور محلول کے مقام اتصال پر تیرتے رہے لیکن جوں جوں نفوذ کا عمل ہونے لگا وہ علیحدہ ہونے لگے اور ان میں سے جو زیادہ وزن دار تھے نیچے بیٹھنے اور ہلکے اوپر آنے لگے۔

معلوم کثافت کے منکوں کے مقام سے محلول میں نمک کی تقسیم یا کسی نقطہ پر ارتکاز کسی خاص وقت میں معلوم کیا گیا اور اس طرح مہ کی قیمت دریافت کی گئی۔ اس طریقہ میں ایک یہ اعتراض پیدا ہوتا ہے کہ منکوں پر ہوا کے بلبلے پیدا ہو سکتے ہیں جن سے ان کی اوچھال میں تبدیلی ہو سکتی ہے۔

وائنر نے ۱۸۹۳ء محلول کے مختلف نقاط پر انعطاف نماؤں کی پیمائش کر کے مختلف پرتوں کے ارتکاز کو کسی خاص وقفہ کے بعد دریافت کرنے میں کامیابی حاصل کی۔ اس سے پہلے اس نے یہ دریافت کر لیا تھا کہ ارتکاز کے ساتھ ساتھ کس طرح انعطاف نما بدلتا ہے۔ شکر کے محلولوں کی صورت میں تقطیب کے مستوی کے گھماؤ کے ذریعہ ارتکاز کی قیمت دریافت کی گئی تھی۔

۱۸۷۹ء میں فک کے کلیہ کی تصدیق، زنک سلفیٹ کے محلول کی صورت میں، ملغم جست کی دو تختیوں کے درمیان قوت محرکہ برقی کو ناپ کر، ویبر نے کی تھی۔

اس نے پہلے یہ دریافت کرلیا تھا کہ قوت محرکہ برق تختیوں سے مس کرنے والے محلول کے ارتکاز کے ساتھ ساتھ کس طرح متغیر ہوتی ہے بعد میں ٹِسلوڈ نے ۱۹۲۲ء میں اور کلیک نے ۱۹۲۴ء میں، ایک خاص وقفہ کے بعد کسی نقطہ پر نفوذ کے دوران میں ارتکازوں کی قیمتیں نور کی شعاعوں کے خماؤ کے ذریعہ دریافت کی تھیں۔ شعاعوں کا یہ خماؤ گہرائی کے ساتھ کثافت کی تبدیلی کی وجہ سے اس صورت میں پیدا ہوتا ہے جبکہ شعاعیں اوپر کی سطح پر تقریباً مماسی زاویے بناتی ہوئی واقع ہوں۔ (۴)

یہاں اس کو یاد رکھنا چاہیئے کہ نفوذ کی قدر "مہ" کی قیمت نمک اور محلل کی نوعیت کے علاوہ تپش اور محلول کی طاقت پر بھی منحصر ہوتی ہے۔

یہ اوپر بیان کیا جا چکا ہے کہ گیسوں میں نفوذ مائعات کی بہ نسبت بہت زیادہ تیز واقع ہوتا ہے۔ گیسوں کے لئے بھی مائعات کی طرح فک کے کلیہ کی شکل کے ایک کلیہ کا اطلاق کیا جا سکتا ہے۔ دو ایسی گیسوں پر غور کرو جن میں سے پہلی کی کثافت کی ڈھال کسی خاص نقطہ پر $\frac{\text{فہ ثہ}}{\text{فز لا}}$ ہے۔ ایسی صورت میں پہلی گیس کی کمیت جو افقی مستوی کے اکائی رقبہ میں سے اکائی وقت میں گزرے گی مہ $\frac{\text{فہ ثہ}}{\text{فز لا}}$ کے مساوی ہوگی جہاں ثہ پہلی گیس کی کثافت کسی قائم افقی مستوی سے لا بلندی کے اوپر ہے اور مہ اُن دونوں گیسوں کی نوعیت پر منحصر ہے۔ مہ کی پیمائش آسان اس لئے نہیں ہے کہ دونوں گیسوں کی ابتدائی معلوم تقسیم کی ترتیب نہایت دشوار کام ہے۔

لاشمیٹ اور اوبرمیئر نے ایک لمبا اسطوانہ ایسا استعمال کیا جو ایک قرص سے دو حصوں میں تقسیم ہو جاتا تھا۔ اس کے نچلے حصہ میں زیادہ کثیف گیس رکھی گئی تھی اور اوپر کے حصہ میں ہلکی۔ اس کے بعد قرص یا

دیا فرغمہ کو باحتیاط تمام رویں پیدا کرنے کے بغیر ہٹا دیا گیا اور گیسوں کو باہمی نفوذ پذیر ہونے کا موقع دیا گیا۔ ایک خاص وقت کے بعد قرص کو پھر رکھ دیا گیا اور اسطوانہ کے اوپر کے حصہ میں بھاری گیس کی مقدار معلوم کر لی گئی۔ اس سے مہ کی قیمت دریافت کی گئی۔ ۱۸۸۲ء میں وٹیز نے ڈامان کے تداخل پیما کے ذریعہ کسی مقام پر انعطاف نما کی وقتاً فوقتاً پیمائش کر کے گیسوں کا تناسب کاربن ڈائی آکسائڈ اور ہوا کی صورت میں دریافت کیا تھا۔

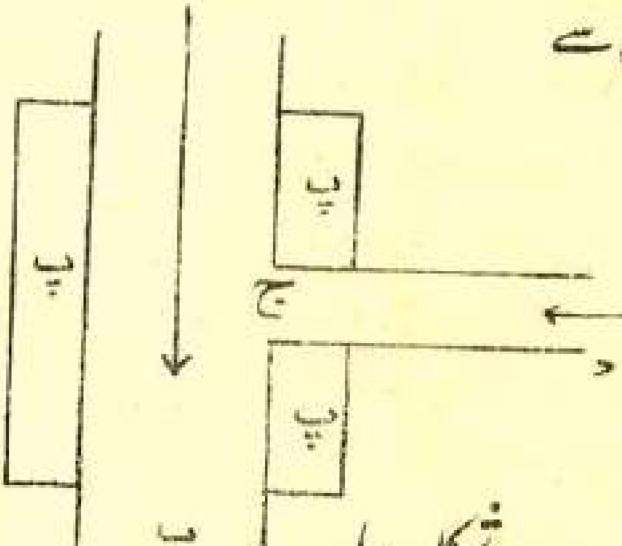
گیسوں کی صورت میں بھی مائعات کی طرح مہ کی قیمت تپش کے ساتھ بڑھتی ہے۔ گیسوں میں مہ دباؤ سے بھی متاثر ہوتا ہے یعنی گیسوں کے آمیزہ کے مجموعی دباؤ سے مہ کی قیمت تناسب معکوس رکھتی ہے۔

ایسی صورت میں جبکہ نفوذ پذیر گیسوں میں سے ایک کسی مائع کا بخار ہوتا ہے اور گیس اور اس بخار کے مابین نفوذ کی قدر مہ دریافت کرنا ہو تو ایک اسطوانہ نما نلی کے پیندے میں کسی تپش پر کچھ مائع لیا جاتا ہے اور بخارات سے پاک گیس کی تیز رو نلی کے منہ پر سے گزاری جاتی ہے (۴)۔ جب کچھ دیر تک یہ رو گزرتی ہے تو بخار کی یکساں کثافت کی ڈھال نلی میں پیدا ہو جاتی ہے۔ بخار کی یہ کثافت کی ڈھال $\frac{د}{ل}$ ہے جہاں د مائع کا اعظم بخاری دباؤ دوران تجربہ کی تپش پر ہے اور ل، نلی کے منہ سے مائع کی سطح تک کا فاصلہ ہے۔ اکائی وقت میں نلی سے باہر بہنے والے بخار کی کمیت، جو اکائی وقت میں تبخیر پانے والے مائع کی مقدار کے مساوی ہوتی ہے (اور جس کی پیمائش آسانی سے کی جا سکتی ہے) مہ $\frac{د}{ل}$ کے مساوی ہوتی ہے۔ لہٰذا د اور ل کی قیمتیں معلوم ہوں تو مہ کی قیمت دریافت کی جا سکتی ہے۔ اس طریقہ سے اسٹیفان اور ونکلمین نے مہ کی قیمتیں مختلف بخارات اور گیسوں کے لئے دریافت کی ہے۔

ڈینیل (۵) نے یہ ثابت کیا کہ سیسہ، جست، ٹین، سونے اور چاندی میں

سے پارے کا نفوذ ہوتا ہے۔ سر رابرٹ آسٹن نے دھاتوں میں سے دھاتوں کے نفوذ پر مسلسل تجربے کئے اور مختلف دھاتوں کے لئے مہ کی قیمتیں سیسہ، ٹین، وغیرہ میں سے، مختلف تپشوں پر دریافت کیں۔

گیسوں اور بخارات کے مابین نفوذ کے مظاہر کا اطلاق :- پارہ کے نفوذی پمپ میں، نفوذ کے اس عمل سے مدد لیکر ایک قلیل وقفہ میں زبردست خلا پیدا کیا جا سکتا ہے۔ گائیڈے کے نفوذی پمپ کا اصول شکل ۱ میں دکھلایا گیا ہے۔ ہوا سے معرّا پارے کے بخارات نلی میں ا سے ب کی طرف گزرتے ہیں۔



شکل ۱

ج د ایک نلی ہے جہاں سے گیس داخل ہوتی ہے۔ گیس پارے کے بخارات میں نفوذ پذیر ہوتی ہے اور بخار کے ساتھ نیچے جاتی ہے۔ پ پانی سے سرد کئے ہوئے خانے ہیں جن کی مدد سے بخارات منجمد ہوتے ہیں۔ گائیڈے نے یہ ثابت کیا کہ گیس کا وہ حجم جو بخارات میں نفوذ پذیر ہوتا ہے، نلی ج د کے طول اور قطر اور نیز گیس کی مہ کی قیمت پر منحصر ہوتا ہے۔ نلی ج د کا قطر گیس کے سالمات کے اوسط آزاد راستہ کے رتبہ کا ہوتا ہے۔

گائیڈے نے مختلف اقسام کے نفوذی پمپ کی ساخت کے متعلق تجاویز پیش کئے ہیں۔ ایسے تمام پمپ $۱۰^{-۴}$ ملمر پارہ کے دباؤ تک خلا پیدا کر سکتے ہیں۔

گائیڈے اور فولمر کے نفوذی پمپ کے عمل اور ترتیب وغیرہ کے متعلق معلومات ایک خاص فہرست {نشان ۱۳۱، ای لیبولڈ ناخ فولگر اے جی کولن (۱۹۳۱)} کے ذریعہ دئے گئے ہیں۔

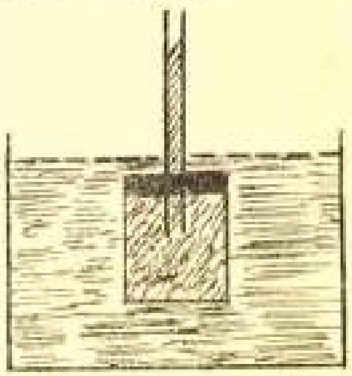
جب کبھی اس سے زیادہ خلا درکار ہوتا ہے تو اس قسم کے متعدد پمپ ہم توازی جوڑ دئے جاتے ہیں۔ نظریہ تحرک کے باب میں سالمی پمپ کا تفصیلی بیان دیا گیا ہے۔

ولوجی دباؤ:— گائے کے مثانہ کو جو الکحل سے بھرا ہوا ہو اگر مضبوطی کے ساتھ بند کر کے پانی میں ڈبویا جائے تو پہلے تو وہ پھولنے لگتا ہے اور آخر کار پھٹ جاتا ہے۔ اگر بجائے الکحل کے اس میں پانی بھرا جائے اور الکحل میں اس کو ڈبویا جائے تو پھولنے کے عوض وہ سکڑنے لگتا ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ پانی تو مثانہ میں سے گزر جاتا ہے لیکن الکحل نہیں گزر سکتا۔ راؤلٹ نے دریافت کیا کہ جب خوک کا مثانہ بطور جھلی استعمال کیا گیا تو میتھل الکحل، ایتھر کی سمت میں گزر گیا اور ربر کو جب جھلی کی طرح استعمال کیا گیا تو ایتھر الکحل کی سمت میں گزر گیا۔ اس سے ظاہر ہے کہ سمت کا انحصار جھلی کی نوعیت پر ہے۔ ایسی جھلی جو کسی ایک گیس یا مائع کو اپنے میں سے گزرنے دیتی ہے لیکن کسی دوسرے گیس یا مائع کو نہیں گزرنے دیتی نیم نفوذ پزیر جھلی کہلاتی ہے۔ مثلاً گائے کا مثانہ جیسا کہ اوپر ذکر کیا جا چکا ہے نیم نفوذ پزیر جھلی ہے۔

کاپر فیرو سائنیڈ کی جھلی بھی اسی طرح نیم نفوذ پزیر ہوتی ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ پانی تو اس میں سے گزر جاتا ہے لیکن کاپر سلفیٹ کے سالمات نہیں گزر سکتے۔ پلیڈیم کا ورق بھی نیم نفوذ پزیر ہے کیونکہ ہائیڈروجن تو اس میں سے گزر جاتی ہے لیکن نائٹروجن نہیں گزر سکتی۔ پانی کی ایک جھلی میں سے امونیا تو گزر جاتی ہے لیکن آکسیجن نہیں گزر سکتی۔ نیم نفوذ پزیر جھلی میں سے

کسی گیس یا مائع کا گزرجانا "ولوج" سے موسوم کیا جاتا ہے۔

سب سے پہلے فقر نے ولوجی کلیات کا مطالعہ کیا۔ ایک مسامدار برتن کو اس نے کیوپرک سلفیٹ کے محلول سے بھر کر پوٹاسیم فیروسائینیڈ کے ہلکائے ہوئے محلول میں ڈبو دیا (۶)۔ اس برتن کے دیواروں کے مساموں میں کیوپرک فیروسائینیڈ کی ایک جھلی پیدا ہوئی جس میں سے پانی تو نفوذ پذیر ہوتا تھا لیکن شکر نہیں گزر سکتی تھی۔ اس برتن کو دھو کر شکر کے محلول سے بھر دیا گیا اور اس کے منہ کو ایک ڈاٹ سے بند کرنے کے بعد (ڈاٹ میں سے ایک لمبی نلی حسب شکل ۲ گزاری گئی) جب اس کو خالص پانی میں ڈبو دیا گیا تو انتصابی نلی میں محلول چڑھنے لگا۔ اس سے ظاہر ہوا کہ نیم نفوذ پذیر جھلی میں سے پانی شکر کے محلول کی طرف گزر جاتا ہے۔



شکل ۲

جب اس انتصابی نلی میں مائع ایک خاص بلندی تک پہنچ جاتا ہے تو مسامدار برتن میں مزید پانی نہیں داخل ہوتا۔ نلی میں مائع کے استوانہ کی وجہ سے جو دباؤ پڑتا ہے وہ برتن میں مزید پانی کے داخل ہونے کو روک دیتا ہے۔ یہ اندرونی دباؤ جو پانی کے داخلہ کو مسدود کر دیتا ہے مسامدار برتن میں کے مائع کا "ولوجی دباؤ" کہلاتا ہے۔ لہذا کسی محلول کے ولوجی دباؤ کی پیمائش کرنا ہو تو سب سے پہلے خالص محلل سے اس کے محلول کو نفوذ پذیر جھلی کی مدد سے (جو محلل کو تو گزرنے دیتی ہو لیکن منحل کو نہیں گزرنے دیتی) جدا کرنا چاہئے اور پھر اس ماسکونی دباؤ کو ناپنا چاہئے جو محلول کے رخ پر جھلی کے اندر محلل کو داخل ہونے سے باز رکھتا ہے۔

نفر نے یہ دریافت کیا کہ مستقل تپش پر ہلکائے ہوئے محلولوں کے لئے ولوجی دباؤ، محلول کے ارتکاز کے متناسب ہوتا ہے۔

اگر د ولوجی دباؤ ہو اور مستقل تپش ت پر محلول کا ارتکاز ع ہو تو

د ∝ ع اور ساتھ ہی ساتھ د ∝ ت

∴ د ∝ ت . ع

یعنی د = لا ت ع جہاں لا = مستقل

اگر ع = منحل کے گرام سالمات فی لیتر محلول میں

تو $ع = \frac{ع_1}{ح}$

جہاں $ع_1$ = منحل کے گرام سالمات کی تعداد ح لیتر محلول میں

∴ د ح = $ع_1$ لا ت .... (۵)

کسی گیس کیلئے ہم جانتے ہیں کہ د ح = $ع_ب$. لا ت .... (۶)

جہاں د = گیس کا دباؤ اور $ع_ب$ = گیس کے گرام سالمات کی تعداد ح لیتر میں

اور لا = گیس کا مستقل فی گرام سالمہ

لہذا ان دونوں مساواتوں کا مقابلہ کرنے سے فانٹ ھاف نے ہلکائے ہوئے محلولوں کی صورت میں یہ بیان کیا کہ کسی محلول کا ولوجی دباؤ گیس کے اس دباؤ کے مساوی ہے جو کہ منحل کی صورت میں ہوتا ہے جبکہ منحل گیس کی حالت میں ہو اور اتنا ہی حجم گھیرتا ہو جتنا کہ محلول کے لئے اُس ہی تپش پر درکار ہے۔

مساوات (۵) سے ۔

د ح = $\frac{ک_1}{ث_1}$. لا ت .... (۷)

جہاں $ک_1$ = منحل کا وزن گرام میں اور $ث_1$ = منحل کا سالمی وزن

لہذا مساوات (۷) سے ظاہر ہے کہ کسی محلول کا ولوجی دباؤ ہمیں حل شدہ

شے کے سالمی وزن کی دریافت میں مدد دیتا ہے۔

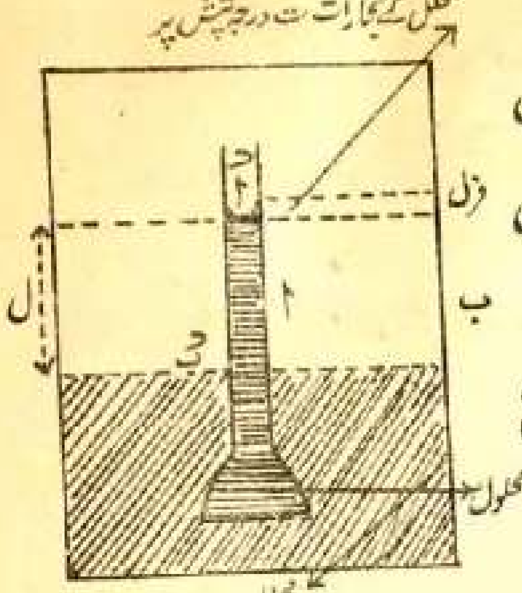
بخاری دباؤ:— کسی محلول کا بخاری دباؤ $د_۱$ محلل کے بخاری دباؤ $د_ب$ سے کم ہوتا ہے۔ ($د_ب - د_۱$) بخاری دباؤ کا اُتار ہے اور ($\frac{د_ب - د_۱}{د_ب}$) بخاری دباؤ کا اضافی اُتار ہے۔ راولٹ نے مسلسل تجربے کئے اور مختلف محلولوں اور محللوں کے لئے بخاری دباؤ کے اضافی اُتار کی قیمتوں کی پیمائش کی۔ اس نے یہ ثابت کیا کہ کسی خاص ارتکاز کے لئے یہ تپش کے تابع نہیں ہے لیکن محلول کے ارتکاز کے راست متناسب ہے۔ اس جملہ

$\frac{د_ب - د_۱}{د_ب} . \frac{ث}{ک_۱} . \frac{ک_ب}{۱۰۰}$ کو بخاری دباؤ کے سالمی اُتار سے موسوم کیا جاتا ہے۔

جہاں $ک_۱$ سے مراد منحل کے گراموں کی تعداد ہے محلل کے $ک_ب$ گراموں میں۔ راؤلٹ نے دریافت کیا کہ اگر ہم اس جملہ کو محلل کے سالمی وزن $ث$ سے تقسیم کریں تو تمام محللوں کے لئے نتیجہ تقریباً ۰.۰۱۰۴ کے مساوی حاصل ہوتا ہے۔ اس نے یہ بھی دریافت کیا کہ ($\frac{د_ب - د_۱}{د_ب}$) تقریباً $\frac{ع_۱}{ع_ب}$ کے مساوی ہے جہاں $ع_۱$ محلول کے ایک خاص حجم میں منحل کے گرام سالمات کی تعداد ہے اور $ع_ب$ سے مراد اسی حجم کے محلول میں محلل کے گرام سالمات کی تعداد ہے۔

اب ہم ایک آسان طریقہ سے بخاری دباؤ کے اُتار اور ولوجی دباؤ کے درمیان ایک رشتہ حاصل کرنے کی کوشش کریں گے شکل ۳ پر غور کرو۔

۲ ایک لمبی نلی ہے جس میں محلول رکھا جاتا ہے۔ ۱ کے پیندے میں ایک نیم نفوذ پذیر جھلی لگی ہوئی ہے۔ ب ایک بند برتن ہے (جس میں ہوا نہیں ہے) اور اس میں محلل رکھا جاتا ہے۔ ولوج کی وجہ سے ا میں



شکل ۳

مائع کی سطح ب کی سطح سے بقدر ل زیادہ ہوگی۔ نیم نفوذ پزیر جھلی کے دونوں جانب دباؤ میں فرق د ہے اور یہی محلول کا ولوجی دباؤ ہوگا۔

لہٰذا د مساوی ہے ج ثہ ل کے، جہاں ثہ محلول کی کثافت ت° تپش پر ہے۔

لیکن اب محلل کا بخاری دباؤ اگر ولوجی دباؤ سے زیادہ ہو تو اس بلندی کو متاثر کرتا ہے اور اسطوانہ کو نیچے کی طرف ڈھکیلتا ہے

اب بخارات کی ایک چھوٹی سی دھجی پر غور کرو جس کی بلندی ف ل ہے اور فرض کرو کہ اس پر دباؤ ($\text{د}_{\text{ب}} - \text{ف د}_{\text{ب}}$) ہے۔

ایسی صورت میں $-\text{ف د}_{\text{ب}} = \text{ج ث ف ل}$

جہاں ث = محلل کے بخارات کی کثافت ت° تپش پر

لیکن $\text{د}_{\text{ب}} = \frac{\text{ث لا ت}}{\text{ع}_{\text{ب}}}$

∴ ان دونوں مساواتوں سے:-

$$-\text{ف د}_{\text{ب}} = \frac{\text{ج د}_{\text{ب}}\ \text{ع}_{\text{ب}}}{\text{لا ت}} \cdot \text{ف ل}$$

یعنی $$-\frac{\text{ف د}_{\text{ب}}}{\text{د}_{\text{ب}}} = \frac{\text{ع}_{\text{ب}}\ \text{ج ف ل}}{\text{لا ت}}$$

اس کو تکملانے سے $$-\int \frac{\text{ف د}_{\text{ب}}}{\text{د}_{\text{ب}}} = \frac{\text{ع}_{\text{ب}}\ \text{ج ل}}{\text{لا ت}}$$

یعنی $\text{لوک}_{\text{و}} \frac{\text{د}_{\text{ب}}}{\text{د}_{۱}} = \frac{\text{ث ج ل}}{\text{لات}}$ .... (۸)

$\therefore \text{د} = \text{ج ثہ ل} = \frac{\text{ثہ لات}}{\text{ث}} . \text{لوک}_{\text{و}} \frac{\text{د}_{\text{ب}}}{\text{د}_{۱}}$ .... (۹)

اس سے کسی محلول کے دلوجی دباؤ اور بخاری دباؤ کے اتار کے درمیان ضروری تعلق معلوم ہو جاتا ہے۔

ہلکائے ہوئے محلولوں کے لئے مساوات (۵) کو یوں لکھا جا سکتا ہے:-

$\text{د ح}_{\text{ب}} = \text{ع}_{۲} . \text{لات}$ جہاں $\text{ح}_{\text{ب}}$ = محلل کا حجم جس میں منحل کے $\text{ع}_{۲}$ گرام سالمات ہیں۔

$$\therefore \text{د} = \frac{\text{ع}_{۲} . \text{لات} . \text{ثہ}_{\text{ب}}}{\text{ک}_{\text{ب}}}$$

جہاں $\text{ثہ}_{\text{ب}}$ = محلل کی کثافت اور $\text{ک}_{\text{ب}}$ = محلل کی کمیت

اب مساوات (۹) سے:-

$$\text{لوک}_{\text{و}} \frac{\text{د}_{\text{ب}}}{\text{د}_{۱}} = \frac{\text{د ث}}{\text{ثہ لات}} = \frac{\text{ع}_{۲} \text{ ثہ}_{\text{ب}} \text{ ث}}{\text{ثہ ک}_{\text{ب}}} =$$

$$= \frac{\text{ع}_{۲}}{\text{ع}_{\text{ب}}} . \frac{\text{ثہ}_{\text{ب}}}{\text{ثہ}}$$

لیکن $\text{لوک}_{\text{و}} \frac{\text{د}_{\text{ب}}}{\text{د}_{۲}} = \text{لوک}_{\text{و}} \left(۱ + \frac{\text{د}_{\text{ب}} - \text{د}_{۲}}{\text{د}_{۲}}\right)$

$$= \left(\frac{\text{د}_{\text{ب}} - \text{د}_{۲}}{\text{د}_{۲}}\right) - \frac{۱}{۲}\left(\frac{\text{د}_{\text{ب}} - \text{د}_{۲}}{\text{د}_{۲}}\right)^{۲} \ldots\ldots$$

$$\simeq \left(\frac{\text{د}_{\text{ب}} - \text{د}_{۲}}{\text{د}_{۲}}\right)$$

اور کسی بہت ہی ہلکائے ہوئے محلول کیلئے $ث_ب \simeq ث$

اور $د_ب \simeq د_۱$

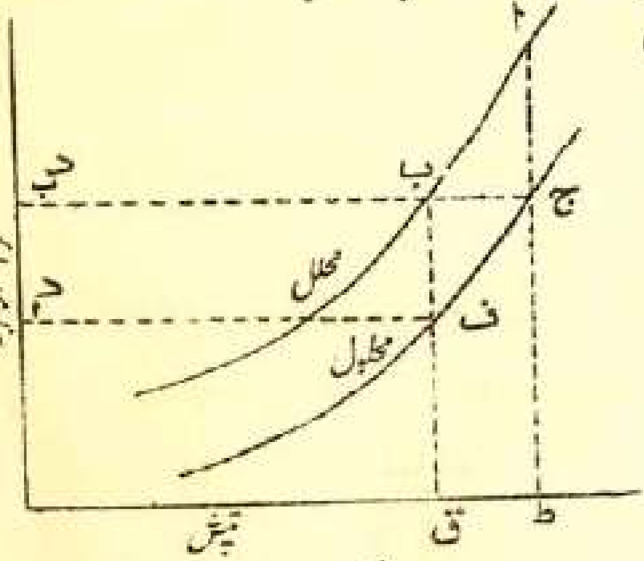
$$\therefore \frac{د_ب - د_۱}{د_ب} = \frac{ع_۱}{ع_ب} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

اس سے بخاری دباؤ کے اضافی اُتار اور ارتکاز کے درمیان تعلق ظاہر ہوتا ہے اور یہ تپش کے غیر تابع ہے۔

محلولوں کے نقطۂ جوش اور نقطۂ انجماد:—

کوئی مائع اُس وقت جوش کھاتا ہے جبکہ اس کا بخاری دباؤ، بیرونی دباؤ کے مساوی ہوتا ہے۔ ایک غیر طیران پزیر شے کو محلل میں حل کرنے کا اثر یہ ہوتا ہے کہ بخاری دباؤ کم ہو جاتا ہے۔

لہذا اُبلنے کیلئے محلول کی تپش کو اور زیادہ اونچا کرنا ہوتا ہے تاکہ بخاری دباؤ اور بیرونی دباؤ میں مساوات قائم ہو جائے۔ محلول کے نقطۂ جوش کے اس چڑھاؤ کو حسب ذیل طریقہ سے دریافت کیا جا سکتا ہے۔



شکل ۴۴

شکل ۴۴ میں اوپر والا منحنی ایک محلل کے بخاری دباؤ اور اسکی تپش میں اور نیچے کا منحنی محلول کے بخاری دباؤ اور اسکی تپش میں تعلق بتاتا ہے۔

محلل کے دباؤ $د_ب$ پر محلول کو جوش دینے کے لئے محلول کی تپش کو بقدر ط ق بڑھانے کی ضرورت ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ نقطۂ جوش میں یہ اضافہ یا چڑھاؤ ط ق، △ ت کے مساوی ہے۔

شکل میں اج = ب ج مس ا ب ج =

$$= \triangle ت \frac{فر دپ}{فر ت}$$

لیکن کلاؤشیس اور کلیپیران کی مساوات (۵) سے ہم جانتے ہیں کہ

$$\frac{فر دپ}{فر ت} = \frac{مخ\ دپ}{لا\ ت^2} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۱)$$

جہاں مخ = محلل کی سالمی حرارت مخفی (بخار کی)

اور ت = محلل کا نقطۂ جوش

$$\therefore اج = \frac{\triangle ت\ مخ\ دپ}{لا\ ت^2}$$

$$\therefore \frac{اج}{جط} = \frac{\triangle ت\ مخ}{لا\ ت^2} = \frac{ب ف}{ف ق} = \frac{دپ - د_1}{د_1}$$

$$\therefore \triangle ت = \frac{دپ - د_1}{د_1} \cdot \frac{لا\ ت^2}{مخ} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۲)$$

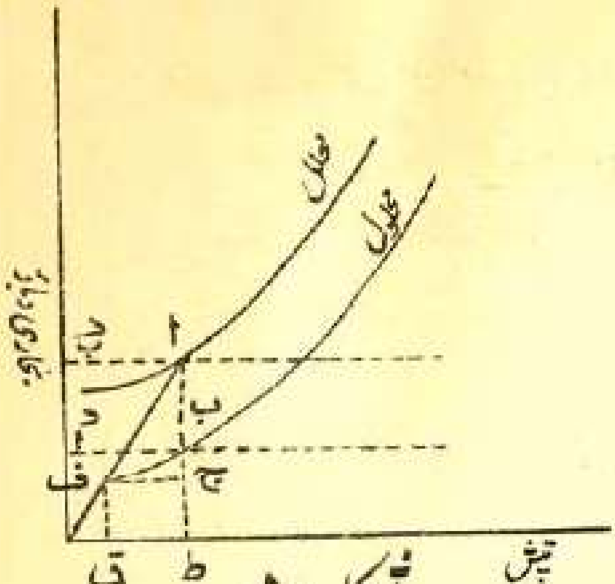
کسی محلول کے نقطۂ جوش کے چڑھاؤ کی یہ ایک عام مساوات ہے۔

اب مساوات (۹) اور (۱۲) سے:-

$$\triangle ت = \frac{د\ لا\ ت}{ث\ مخ} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۳)$$

اس مساوات سے محلل کا سالمی وزن دریافت کیا جا سکتا ہے۔

اسی طرح کسی محلول کے نقطۂ انجماد کا اُتار خالص محلل کے نقطۂ انجماد کے مقابلہ میں دریافت کیا جا سکتا ہے۔ شکل ۵ میں اوپر کا منحنی ایک محلل کے



شکل ۵

بخاری دباؤ اور اس کی تپش کے درمیان تعلق بتاتا ہے اور نچلا منحنی محلول کے لئے تپش اور بخاری دباؤ میں تعلق ظاہر کرتا ہے۔ محلول کو محلل کے بخاری دباؤ پر منجمد کرنے کے لئے محلول کی تپش میں بقدر ط ق کمی کرنی ہوگی۔ فرض کرو کہ یہ کمی یا اتار Δ ت کے مساوی ہے۔ اب شکل ۵ میں

$$د_ب - د_ا = ا ب = ا ج - ب ج$$

$$= ج ف \ مس \ ا ف ج - ج ف \ مس \ ب ف ج$$

$$= Δ ت \left\{ \frac{فر \ د_ب}{فر \ ت_ب} - \frac{فر \ د_ا}{فر \ ت_ا} \right\}$$

جہاں $\frac{فر \ د_ا}{فر \ ت_ا}$ = محلل کے تصعیدی منحنی کا ڈھال

اور $\frac{فر \ د_ب}{فر \ ت_ب}$ = محلل کے تبخیر کے منحنی کا ڈھال

اب کلاؤسیس اور کلیپیران کی مساوات سے:-

$$د_ب - د_ا = Δ ت \left\{ \frac{ج \ د_ا}{لا \ ت^2} - \frac{مخ \ د_ب}{لا \ ت^2} \right\}$$

$$= \frac{Δ ت \ د_ب}{لا \ ت^2} (ج - مخ)$$

$$= \frac{Δ ت \ د_ب \ ف}{لا \ ت^2}$$

جہاں جہ = محلل کیلئے تصعید کی سالمی حرارت مخفی

فہ = محلل کے انجماد کی سالمی حرارت مخفی

ت = محلل کا نقطۂ انجماد

$$\therefore \Delta ت = \frac{ک\,ت^2}{فہ} \cdot \frac{د_ب - د_۱}{د_ب} \qquad \text{.......... (۱۴)}$$

یہ کسی محلول کے نقطۂ انجماد کے اُتار کی ایک عام مساوات ہے۔

مساوات (۱۰) اور (۱۴) سے

$$\Delta ت = \frac{ک\,ت^2}{فہ} \cdot \frac{ع_۱}{ع_ب} \qquad \text{.......... (۱۵)}$$

بکمن (۸) کے تپش پیما کے ذریعہ مختلف ارتکازوں کے محلولوں کے نقطۂ جوش کا چڑھاؤ اور نقطۂ انجماد کا اُتار دریافت کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح مساوات (۱۳) اور (۱۵) کی تصدیق عملی طور پر کی جا سکتی ہے۔

راؤلٹ نے یہ معلوم کیا کہ کسی محلول کیلئے نقطۂ جوش کا چڑھاؤ اور نقطۂ انجماد کا اُتار اس کے ارتکاز کے متناسب ہوتا ہے۔

Chapter IX.

(۱) Pogg Annalen 94. P59 (1855)
(۲) Properties of Matter by Newman & Searle P288 (1928)
(۳) Proc. Roy. Soc. A 34, P3 (1932)
Proc Phys. Soc. 36, P.4 (1924)
(۴) Properties of Matter by Poynting & Thomson P.197 (1922)
(۵) " " P.204 (1922)
(۶) General Physics for Students by E. Edser P.574 (1926)
(۷) Text Book of Heat by M. N. Saha & B. N. Srivastava P443 (1931)
(۸) Text Book of Practical Physics by W. Watson, P258 (1926)

دسواں باب

نظریۂ تحرک

مادہ کے متعلق، نظریۂ تحرک ان مفروضات پر مبنی ہے کہ مادہ بے حد چھوٹے چھوٹے ذرات پر، جن کو جواہر اور سالمات سے تعبیر کیا جاتا ہے، مشتمل ہے۔ ایک ہی کیمیائی شے کے سالمات، شکل جسامت اور کمیت وغیرہ میں بالکل یکساں ہوتے ہیں۔ ایک اور مفروضہ یہ بھی ہے کہ ہر شے کے سالمات مستقل طور پر حرکت کرتے رہتے ہیں اور یہ حرکت، اس شے کی تپش پر منحصر ہوتی ہے۔ حرکت کی وجہ سے، ان سالمات میں توانائی بالفعل ہوتی ہے۔ ٹھوس اشیاء اور مائعات میں، سالمات ایک دوسرے کے بالکل قریب ہوتے ہیں لیکن گیس میں سالمات کے قطر کا مقابلہ کرتے ہوئے کسی دو قریبی سالمات کے درمیان اوسط فاصلہ معتد بہ ہوتا ہے۔ گیس کے سالمات آپس میں اکثر ٹکراتے رہتے ہیں اور ہر تصادم کے بعد ان کی رفتار کی سمت اور قیمت دفعتاً بدل جاتی ہے۔ گیسوں اور مائعات میں، سالمات کے درمیان جاذبہ کی قوت عمل کرتی ہے۔ مائعات کی صورت میں چونکہ سالمات قریب قریب ہوتے ہیں اس لئے ان میں گیس کے سالمات کی بہ نسبت، قوت جاذبہ بھی زیادہ ہوتی ہے۔ اگر کسی برتن میں گیس رکھی ہوئی ہو تو اس برتن کے دیواروں پر دباؤ پڑتا ہے۔ اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ ان سالمات کے درمیان دفع کی ایک قوت بھی جو ان کو ایک دوسرے سے جدا کرنے کی کوشش کرتی ہے عمل پیرا ہے۔ سالمات کی شکل کی نوعیت کے متعلق چونکہ ہمارے پاس بہت ہی کم ثبوت ہے اس وجہ سے یہ فرض کیا جاتا ہے کہ وہ چھوٹے لچک دار کرے ہوتے ہیں۔ کرے فرض کرنے کی

وجہ یہ ہے کہ یہ سادہ ترین ہندسی شکل ہے جو اختیار کی جا سکتی ہے۔ کامل گیس کے نظریہ سے ایسا معلوم ہوتا ہے کہ سالمات صرف ہندسی نقطے ہیں جن کی کمیتیں بہت چھوٹی ہوتی ہیں۔ اس باب میں ہم گیسوں کے (اور کسی حد تک مائعات کے بھی) نظریہ تحرک سے بحث کریں گے۔ ٹھوس کے لئے چونکہ نظریہ تحرک ابھی تک تکمیل کو نہیں پہنچ سکا اس وجہ سے اسکا ذکر اس کتاب میں نہیں کیا جائے گا۔

کامل گیس کا دباؤ :۔ ایک کامل گیس سے مراد ایسی گیس ہے جسکے سالمات بالکل چھوٹے فرض کئے جاتے ہیں اور آپس میں، یہ ایک دوسرے پر سوائے تصادم کی صورت کے، ناقابل ذکر قوتوں سے عمل کرتے ہیں۔ ایک کامل گیس کو ایسے ایک مکعب میں فرض کرو جس کا ضلع اکائی ہے اور یہ بھی فرض کرو کہ سالمات کا ایک حصہ س_1 رفتار سے، اس کی ایک سطح کے علی القوائم حرکت کر رہا ہے۔ توانائی اور معیار حرکت کے بقا کے مسئلہ سے یہ ظاہر ہے کہ سالمات سطح سے ٹکرانے کے بعد اسی رفتار سے واپس ہوتے ہیں۔ لہذا ایک سالمہ کے معیار حرکت میں تصادم کے دوران میں تبدیلی، $2\,\text{م}\,\text{س}_1$ کے مساوی ہوگی جہاں
م = سالمہ کی کمیت۔

اس سطح سے ایک سالمہ $\frac{\text{س}_1}{2}$ دفعہ فی ثانیہ ٹکراتا ہے لہذا معیار حرکت میں فی ثانیہ تغیر $= 2\,\text{م}\,\text{س}_1 \times \frac{\text{س}_1}{2} = \text{م}\,\text{س}_1^2$

چونکہ سطح پر جو دباؤ واقع ہوتا ہے وہ فی ثانیہ معیار حرکت کی تبدیلی کے مساوی ہے۔

لہذا ایک سالمہ سے سطح پر جو دباؤ واقع ہوتا ہے وہ $= \text{م}\,\text{س}_1^2$

∴ سطح پر تمام سالمات سے جو دباؤ پڑتا ہے $= \text{د} = \sum \text{م}\,\text{س}_1^2$

فرض کرو کہ ع سالمات فی مکعب سمر کیلئے س_1^2 کا اوسط $= \overline{\text{س}}^2$

تب $\overline{\text{س}}^2 = \frac{\sum \text{س}_1^2}{\text{ع}}$ ∴ $\text{د} = \text{م}\,\text{ع}\,\overline{\text{س}}^2$

اگر $\overline{س_۲^۲}$ اور $\overline{س_۳^۲}$ دیگر دو عمودی سمتوں میں اوسط مربع رفتاروں کی تعبیر کریں تو چونکہ سالمات برتن کے کسی حصہ میں مجتمع ہونے کا تقاضا نہیں رکھتے اس لئے $\overline{س_۱^۲} = \overline{س_۲^۲} = \overline{س_۳^۲}$ ۔ اگر $س^۲$ حاصل اوسط مربع رفتار ہو تو

$س^۲ = \overline{س_۱^۲} + \overline{س_۲^۲} + \overline{س_۳^۲}$ یعنی $\overline{س_۱^۲} = \frac{۱}{۳} س^۲$

∴ $د = \frac{۱}{۳} م ع س^۲$ لیکن $ع م = ث$ یعنی گیس کی کثافت کے

∴ $د = \frac{۱}{۳} ث س^۲$ .... (۱)

یعنی $د = \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۲} ث س^۲ = \frac{۲}{۳} ق$ .... (۲)

جہاں ق = توانائی بالفعل فی اکائی حجم

لہٰذا مساوات (۱) سے ہم گیس کی جذر اوسط مربع رفتار س کی قیمت دریافت کرسکتے ہیں۔

ہائیڈروجن کے لئے س کی قیمت صفر درجہ مئی پر ۴۱۰۰ میل فی گھنٹہ دریافت کی گئی ہے۔

گیس کے آسان کلیات :- اگر دو گیس ایک ہی دباؤ د پر ہوں تو مساوات (۱) سے

$د = \frac{۱}{۳} م_۱ ع_۱ \overline{س_۱^۲} = \frac{۱}{۳} م_۲ ع_۲ \overline{س_۲^۲}$ جہاں $م_۱$، $ع_۱$ اور $س_۱$ پہلی گیس سے اور $م_۲$، $ع_۲$ اور $س_۲$ دوسری گیس سے متعلق ہیں۔

میکسول نے یہ ثابت کیا کہ ایک ہی تپش پر ایک قسم کی گیس کے سالمات کی اوسط توانائی بالفعل دوسری قسم کی گیس کے سالمات کی اوسط توانائی بالفعل کے مساوی ہوتی ہے یعنی

$$\frac{۱}{۲} م_۱ \overline{س_۱^۲} = \frac{۱}{۲} م_۲ \overline{س_۲^۲}$$

$\therefore ع_1 = ع_2$

اس سے ظاہر ہے کہ دونوں گیسوں میں ایک ہی تپش اور دباؤ پر فی مکعب سمر
سالمات کی تعداد مساوی ہے۔ اس کلیہ کو کلیہ ایوگیڈرو سے تعبیر کیا جاتا ہے۔
اوپر کی مساوات (۱) سے یہ ظاہر ہے کہ $د = \frac{1}{3}$ ثہ $مر^2$۔ اسکا مطلب
یہ ہے کہ کسی گیس کا دباؤ، اس کی کثافت سے راست اور اسکے حجم سے معکوس
تناسب رکھتا ہے بشرطیکہ اس کی تپش مستقل رہے۔ اسکو کلیہ بائیل سے
موسوم کیا جاتا ہے۔

$ثہ_1$، $ثہ_2$، $ثہ_3$ وغیرہ مختلف کثافتوں کی متعدد گیسیں جن کی اوسط مربع
رفتاریں بالترتیب $مر_1^2$، $مر_2^2$، $مر_3^2$ وغیرہ ہوں ایک ہی حجم کی لے کر اگر
ملادی جائیں تو مجموعی حاصل دباؤ د حسب ذیل ہوگا:۔

$$د = \frac{1}{3} ثہ_1 مر_1^2 + \frac{1}{3} ثہ_2 مر_2^2 + \ldots\ldots = د_1 + د_2 + \ldots\ldots$$

یعنی متعدد گیسوں کے آمیزہ کا دباؤ ان کے علیحدہ علیحدہ دباؤ کے مجموعہ
کے مساوی ہوتا ہے۔

یہ ڈالٹن کا جزئی دباؤ کا کلیہ کہلاتا ہے۔

ایک کامل گیس کے لئے ہم یہ جانتے ہیں کہ اگر اسکا دباؤ د، حجم ح،
اور تپش ت درجہ مطلق ہو تو $د ح = \overline{کا}\ ت$

جہاں $\overline{کا}$ ایک مستقل ہے جسکی قیمت م اور ع کی قیمتوں پر منحصر ہوتی ہے۔
کسی شے کی اتنی کمیت کو جو اس شے کے سالمی وزن کے مساوی ہو عموماً
"گرام سالمہ" سے تعبیر کیا جاتا ہے، کسی گیس کا ایک گرام سالمہ جو حجم حہ گھیرتا
ہے وہ اس گیس کا سالمی حجم کہلاتا ہے۔

لہذا کسی کامل گیس کی مساوات کو ہم یوں بھی لکھ سکتے ہیں:۔

$د حہ = کا\ ت$ جہاں کا ایک مستقل ہے جو گیس کے ایک گرام سالمہ
سے متعلق ہے۔

مساوات (۱) سے $د = \frac{1}{3}\,\frac{ک}{حہ}\,سر^{2}$

یعنی $د\,حہ = \frac{ک}{3}\,سر^{2}$ جہاں ک = سالمی وزن

$\therefore\ \frac{1}{3}\,ک\,سر^{2} = لا\,ت$ .... (۳)

اسی طرح $\frac{1}{3}\,م\,سر^{2} = لاَ\,ت$ .... (۴)

$\therefore\ \frac{لا}{لاَ} = \frac{ک}{م} = ن$ .... (۵)

جہاں ن ایوگیڈرو کا مستقل کہلاتا ہے اور اس کی قیمت
$= ۶٫۰۶۲ \times ۱۰^{۲۳}$ یعنی گیس کے ایک گرام سالمہ میں سالمات کی تعداد اتنی ہے۔
کسی گیس کے لئے لا کی قیمت $۸٫۳۲۸ \times ۱۰^{۷}$ کے مساوی ہے۔ یہ حرارت
کے معادل جیلی کی اس قیمت سے جو ارگ فی گرام حرارہ کے رقوم میں لکھی
جاتی ہے تقریباً دوگنی ہے۔

مساوات (۳) سے $سر^{2} = \frac{۳\,لا\,ت}{ک}$

∴ $سر^{2}$ کی قیمت گیس کی تپش مطلق کے لحاظ سے بدلتی ہے۔
مساوات (۴) اور (۵) سے فی سالمہ گیس کی اوسط توانائی
بالفعل $= \frac{1}{2}\,م\,سر^{2}$

$= \frac{۳\,لا\,ت}{۲\,ن}$

رفتاروں کی تقسیم کے متعلق میکسویل کا کلیہ[1]: — کسی گیس کے خواص
کا مطالعہ کرنا ہو تو ہم کو رفتاروں کی تقسیم کا کلیہ جاننا ضروری ہے۔ اس کلیہ کا
مطلب ہے کہ کتنے سالمات کوئی خاص رفتار رکھتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ تمام
سالمات کی رفتاریں یکساں نہیں ہو سکتیں۔ اگر بالفرض کسی خاص لمحہ میں
اتفاقیہ طور پر یہ یکساں ہو بھی جائیں تو دوسرے ہی لمحہ میں سالمات کے تصادم
کی وجہ سے ان کی رفتاروں میں بڑی حد تک تبدیلی واقع ہوگی۔ لہذا سالمات

کی رفتاریں صفر سے لیکر لاتنا ہی تک، مختلف ہو سکتی ہیں۔ کلارک میکسول نے ۱۸۵۹ء میں اسکے متعلق ایک کلیہ پیش کیا جو خالصتاً "احتمال" پر غور کرنے سے، اس نے حاصل کیا تھا۔

فرض کرو کہ گیس کی کچھ مقدار کسی برتن میں مستقل حالات کے تحت رکھی ہوئی ہے۔ اگر سالمات کی تعداد اس میں کافی طور پر زیادہ ہو تو وہ ایک غیر متبدل حالت اختیار کرے گی اور اسکے فی مکعب سم سالمات کی تعداد ح کی قیمت میں تصادم کی وجہ سے کوئی تبدیلی نہیں واقع ہوگی۔ تمام سمتوں میں مجموعی طور پر سالمات کی اوسط رفتاریں بھی ایک ہی ہوں گی۔ اگر ہر سالمہ کی رفتار کو لا، ما، یا سمتوں میں تحلیل کیا جائے تو فرض کرو سہ$_1$، سہ$_2$ اور سہ$_3$ علی الترتیب اس کے اجزائے تحلیلی ہیں جو ایک دوسرے سے بالکل آزاد ہیں۔

فرض کرو کہ جن سالمات کی رفتاریں سہ$_1$ اور سہ$_1$ + فرسہ$_1$ کے درمیان ہیں ان کی تعبیر ف (سہ$_1$) فرسہ$_1$ سے کی جاتی ہے جہاں سہ$_1$ کے تفاعل یعنی ف (سہ$_1$) کی قیمت دریافت طلب ہے۔ اسی طرح ایسے سالمات جن کی رفتاریں سہ$_2$ اور سہ$_2$ + فرسہ$_2$ کے درمیان ہوں فرض کرو کہ ف (سہ$_2$) فرسہ$_2$ ہے اور جن کی رفتاریں سہ$_3$ اور سہ$_3$ + فرسہ$_3$ کے درمیان ہوں ف (سہ$_3$) فرسہ$_3$ سے تعبیر کئے جاتے ہیں۔

جن سالمات کی رفتاروں کے اجزائے تحلیلی سہ$_1$ اور سہ$_1$ + فرسہ$_1$، سہ$_2$ اور سہ$_2$ + فرسہ$_2$، سہ$_3$ اور سہ$_3$ + فرسہ$_3$ کے درمیان ہوں ان کی دریافت کا احتمال، علیحدہ علیحدہ احتمالات کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگا یعنی = ف (سہ$_1$) ف (سہ$_2$) ف (سہ$_3$) فرسہ$_1$ فرسہ$_2$ فرسہ$_3$

فرض کرو کہ حاصل رفتار کی تعبیر سہ سے ہوتی ہے جس کی وجہ سے
سہ^2 = (سہ$_1^2$ + سہ$_2^2$ + سہ$_3^2$)۔

رفتار کی ان سمیتوں کی تعداد جن کے سروں کے نقاط فرس۱ فرس۲ فرس۳ حجم کے عنصر میں ہوں گے ع ف (س۱) ف (س۲) ف (س۳) فرس۱ فرس۲ فرس۳ کے مساوی ہوگی

اس عدد کا انحصار س کی قیمت پر ہونا ضروری ہے - یعنی یہ عدد =

= ع فہ (س) فرس۱ فرس۲ فرس۳

جہاں فہ (س) = س کے کسی تفاعل کے

∴ ع ف (س۱) ف (س۲) ف (س۳) = ع فہ (س)

= ع ھ (س²) جہاں ھ کسی دوسرے تفاعل کو تعبیر کرتا ہے۔

∴ ف (س۱) ف (س۲) ف (س۳)

= ھ (س۱² + س۲² + س۳²) .... (۶)

اب س کی کسی غیر متغیر یا خاص قیمت کے لئے ھ (س²) کی قیمت مستقل ہوگی۔

یعنی فر {ھ (س²)} = صفر

یعنی فر {ھ (س۱² + س۲² + س۳²)} = صفر

∴ س کی ایک غیر متغیر یا خاص قیمت کے لئے :-

فر {ف (س۱) ف (س۲) ف (س۳)} = صفر

یعنی فَ (س۱) فرس۱ ف (س۲) ف (س۳) +

+ فَ (س۲) فرس۲ ف (س۱) ف (س۳) +

+ فَ (س۳) فرس۳ ف (س۱) ف (س۲) = صفر

جہاں فَ (س۱)، فَ (س۲) اور فَ (س۳) علی الترتیب ف (س۱)، ف (س۲) اور ف (س۳) کے تفرقات ہیں۔

اوپر کی پوری مساوات کو ف (س۱) ف (س۲) ف (س۳) سے تقسیم کریں تو

$$\frac{\bar{ف}(س_1)\,فرس_1}{ف(س_1)} + \frac{\bar{ف}(س_2)\,فرس_2}{ف(س_2)} + \frac{\bar{ف}(س_3)\,فرس_3}{ف(س_3)} = صفر \quad ......(۷)$$

چونکہ سا ایک مستقل ہے اسلئے $س^2 = س_1^2 + س_2^2 + س_3^2$ کو تفرقانے سے

$$س_1\,فرس_1 + س_2\,فرس_2 + س_3\,فرس_3 = صفر$$

$$\therefore\; ب\,س_1\,فرس_1 + ب\,س_2\,فرس_2 + ب\,س_3\,فرس_3 = صفر \quad ......(۸)$$

جہاں ب = کوئی مستقل

مساوات (۷) اور (۸) کو ملانے سے :-

$$\left\{\frac{\bar{ف}(س_1)}{ف(س_1)} + ب\,س_1\right\}فرس_1 + \left\{\frac{\bar{ف}(س_2)}{ف(س_2)} + ب\,س_2\right\}فرس_2 +$$

$$+\left\{\frac{\bar{ف}(س_3)}{ف(س_3)} + ب\,س_3\right\}فرس_3 = صفر \quad ......(۹)$$

چونکہ رفتار کے اجزائے تحلیلی س۱، س۲ اور س۳ ایک دوسرے کے غیر تابع ہیں لہذا مساوات (۹) میں ہر علیحدہ رقم کی قیمت صفر کے مساوی ہو سکتی ہے۔

$$\therefore\; \left\{\frac{\bar{ف}(س_1)}{ف(س_1)} + ب\,س_1\right\} = صفر$$

اسی طرح دیگر رقوم بھی صفر کے مساوی ہیں۔

$$\therefore\; \frac{\bar{ف}(س_1)}{ف(س_1)} = -\,ب\,س_1$$ اسکو تکملاتے سے

$$لوک_و\, ف(س_1) = -\,ب\,\frac{س_1^2}{۲} + لوک_و\, ا$$ جہاں ا = کسی مستقل کے

$$یعنی\; ف(س_1) = ا\,و^{-\frac{ب\,س_1^2}{۲}} = ا\,و^{-ب\,س_1^2} \quad ......(۱۰)$$

جہاں ب = $\frac{\text{ہ}}{۲}$ = ایک مستقل

اسی طرح ف (سہ) = ا و$^{-\text{ب سہ}^{۲}}$ اور ف (سہ) = ا و$^{-\text{ب سہ}^{۲}}$

∴ ف (سہ) ف (سہ) ف (سہ) = ا^{۳} و$^{-\text{ب}(\text{سہ}^{۲}+\text{سہ}^{۲}+\text{سہ}^{۲})}$ ...... (۱۱)

اب ہم ا اور ب کی قیمتیں دریافت کرنے کی کوشش کرینگے. سالمات کی مجموعی تعداد فی مکعب سم = ع

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{ع ف (سہ) ف (سہ) ف (سہ) فرسہ فرسہ فرسہ}$$

$$\text{یعنی} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{ا}^{۳} \text{و}^{-\text{ب}(\text{سہ}^{۲}+\text{سہ}^{۲}+\text{سہ}^{۲})} \text{فرسہ فرسہ فرسہ} = ۱$$

یعنی ا^{۳} $\left(\frac{\pi}{\text{ب}}\right)^{\frac{۳}{۲}}$ = ۱ یعنی ا = $\sqrt{\frac{\text{ب}}{\pi}}$ ...... (۱۲)

سالمات برتن کی دیوار کے فی اکائی رقبہ کوئی اکائی وقت میں سہ رفتار سے جو ٹکراتے ہیں ایک ایسے استوانہ میں موجود ہیں جسکا حجم سہ ہے ان سالمات کی تعداد فی مکعب سم جن کی رفتار سہ اور سہ + فرسہ کے درمیان ہے ع ف (سہ) فرسہ کے مساوی ہے یعنی = ع ا و$^{-\text{ب سہ}^{۲}}$ فرسہ

لہذا سہ حجم میں سالمات کی تعداد فی ثانیہ = ع ا و$^{-\text{ب سہ}^{۲}}$ سہ فرسہ

اگر ایک سالمہ کی کمیت م کے مساوی ہو تو برتن کے دیوار سے فی اکائی رقبہ فی اکائی وقت میں تمام سالمات کے ٹکرانے سے معیار حرکت میں تبدیلی = فی اکائی رقبہ قوت عاملہ کے = دباؤ د کے.

لیکن ہر ایک سالمہ کے دیوار سے ٹکرانے سے معیار حرکت میں تبدیلی = ۲ م سہ

∴ سہ حجم کے اندر سالمات کی فی ثانیہ معیار حرکت میں مجموعی تبدیلی =

= ۴ ۲ س۲ (ع ۲ و ^ -ب س۲ ^ س۲ فرس۲)

صرف مثبت رفتار کے جملہ سالمات کے لئے :-

د = ∫ (صفر تا لا) ۴ ۲ ع ۲ و ^ -ب س۲ ^ س۲ فرس۲ = ۲ ۲ ع ۴ ۱/۴ √(۲۲/ب۲)

مساوات (۱۲) سے د = ع ۴ / ب ۲ .... (۱۳)

لیکن کامل گیس کی مساوات :- دحہ = لا ت

جہاں لا ایک مستقل ہے جو گیس کے ایک گرام سالمہ سے متعلق ہے اور ت گیس کی تپش مطلق ہے۔

یعنی د = ثہ لا ت / ئ جہاں ثہ = گیس کی کثافت

مساوات (۵) سے د = ثہ لا ت / ۴ ن = ع لا ت / ن .... (۱۴)

مساوات (۱۳) اور (۱۴) سے ب = ۴ ن / ۲ لا ت .... (۱۵)

لہٰذا ع سالمات میں سے فرع سالمات کی تعداد جن کے رفتار کے اجزائے

تحلیلی س۱ اور س۱ + فرس۱ س۲ اور س۲ + فرس۲ س۳ اور س۳ + فرس۳

کے درمیان لا، ما اور یا سمتوں میں علی الترتیب ہوں

حسب ذیل ہوگی :-

فرع = ع ف (س۱) ف (س۲) ف (س۳) فرس۱ فرس۲ فرس۳

مساوات (۱۱) سے فرع = ع ۲ و ^ -ب (س۱^۲ + س۲^۲ + س۳^۲) فرس۱ فرس۲ فرس۳

مساوات (۱۲) اور (۱۵) سے :-

فرع = ع (۴ ن / ۲ ۲۲ لا ت) ^ ۳/۲ و ^ - (۴ ن / ۲ لا ت) (س۱^۲ + س۲^۲ + س۳^۲) فرس۱ فرس۲ فرس۳

$$\text{یعنی فرع} = ع \sqrt{\frac{عہ^{۳}}{\pi^{۳}}}\; و^{-عہ(س_{۱}^{۲}+س_{۲}^{۲}+س_{۳}^{۲})}\; فرس_{۱}\, فرس_{۲}\, فرس_{۳} \quad ......(۱۶)$$

$$\text{جہاں } عہ = \frac{ت}{۲\, لا\, ت}$$

اس کو میکسول کے "رفتاروں کی تقسیم کے کلیہ" سے موسوم کیا جاتا ہے۔ یہ کلیہ کچھ اطمینان بخش نہیں ہے اس کی وجہ یہ ہے کہ رفتاروں کے اجزائے تحلیلی کو بغیر کسی ثبوت کے ایک دوسرے سے بالکل آزاد فرض کرلیا گیا ہے۔

نوٹ گیسوں کے نظریۂ تحرک میں حسب ذیل تکملات اکثر مستعمل ہوتے ہیں اور طلبا کو ان کے حل کرنے کے لئے ہدایت کی جاتی ہے:-

تکملی	حل	تکملی	حل
(۱) $\int_{صفر}^{\infty} و^{-عہ لا^{۲}}\, فرلا$	$\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{\pi}{عہ}}$	(۴) $\int_{صفر}^{\infty} و^{-عہ لا^{۲}}\, لا^{۳}\, فرلا$	$\frac{۱}{۲ عہ^{۲}}$
(۲) $\int_{صفر}^{\infty} و^{-عہ لا^{۲}}\, لا\, فرلا$	$\frac{۱}{۲ عہ}$	(۵) $\int_{صفر}^{\infty} و^{-عہ لا^{۲}}\, لا^{۴}\, فرلا$	$\frac{۳}{۸}\sqrt{\frac{\pi}{عہ^{۵}}}$
(۳) $\int_{صفر}^{\infty} و^{-عہ لا^{۲}}\, لا^{۲}\, فرلا$	$\frac{۱}{۴}\sqrt{\frac{\pi}{عہ^{۳}}}$	(۶) $\int_{صفر}^{\infty} و^{-عہ لا^{۲}}\, لا^{۵}\, فرلا$	$\frac{۱}{عہ^{۳}}$

اب ہم تعداد سالمات فی مکعب سمر کے لئے ایک ایسا جملہ حاصل کرنا چاہتے ہیں جن کے رفتاروں کے اجزاء لا محور کے متوازی ہیں اور $س_{۱}$ اور $س_{۱}$ + فر$س_{۱}$ کے درمیان قائم کئے گئے ہیں۔ یعنی ہم صرف اب رفتار $س_{۱}$ پر غور کریں گے اور ان سالمات کی تعداد فرع معلوم کریں گے جن کی رفتار $س_{۱}$ اور $س_{۱}$ + فر$س_{۱}$

کے درمیان ہے :-

$$\text{فرع} = \text{ع}\sqrt{\frac{\text{عہ}^3\text{م}^3}{\pi^3}}\ \text{و}^{-\text{عہ م سا}_1^2}\text{فرسا}_1\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\text{و}^{-\text{عہ م سا}_2^2}\ \text{و}^{-\text{عہ م سا}_3^2}\ \text{فرسا}_2\ \text{فرسا}_3$$

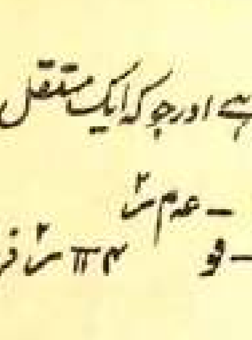
$$\text{اب چونکہ}\int_{-\infty}^{+\infty}\text{و}^{-\text{عہ م سا}_2^2}\text{فرسا}_2 = 2\int_{\text{صفر}}^{\infty}\text{و}^{-\text{عہ م سا}_2^2}\text{فرسا}_2 = \frac{2}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\text{عہ م}}}$$

$$\therefore \text{فرع} = \text{ع}\sqrt{\frac{\text{عہ}^3\text{م}^3}{\pi^3}}\ \text{و}^{-\text{عہ م سا}_1^2}\ \text{فرسا}_1\left(\sqrt{\frac{\pi}{\text{عہ م}}}\times\sqrt{\frac{\pi}{\text{عہ م}}}\right)$$

$$= \text{ع}\sqrt{\frac{\text{عہ م}}{\pi}}\ \text{و}^{-\text{عہ م سا}_1^2}\ \text{فرسا}_1 \ldots\ldots\ldots (۱۷)$$

اسی طرح کسی رفتاری جزء تحلیلی سا_2 یا سا_3 پر غور کرنے سے یہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔
اب ہم ان سالمات کی تعداد فرع معلوم کرینگے جن کی رفتار سا اور سا + فرسا کے درمیان ہے۔
جہاں سا کی قیمت $(\text{سا}_1^2 + \text{سا}_2^2 + \text{سا}_3^2)$ کے مساوی ہے اور جو کہ ایک مستقل مقدار ہے۔

میکسول کے کلیہ سے :- $\text{فرع} = \text{ع}\sqrt{\frac{\text{عہ}^3\text{م}^3}{\pi^3}}\ \text{و}^{-\text{عہ م سا}^2}\ 4\pi\ \text{سا}^2\ \text{فرسا}$



شکل ۱۱

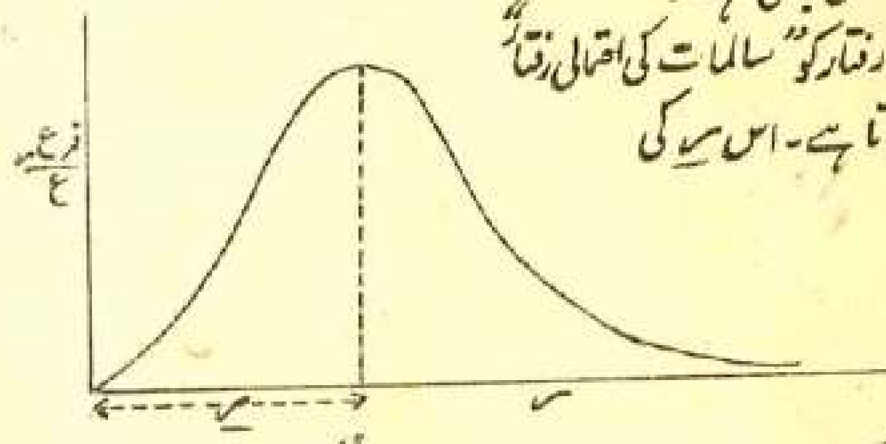
چونکہ $\text{فرسا}_1\ \text{فرسا}_2\ \text{فرسا}_3$ کو اس حجم پر پھیلاتے ہے، جو سا اور سا + فرسا نصف قطر والے دو کروں کے مابین واقع ہوتا ہے $4\pi\ \text{سا}^2\ \text{فرسا}$ کے مساوی قیمت حاصل ہوتی ہے اسلئے :-

$$\text{فرع} = 4\ \text{ع}\sqrt{\frac{\text{عہ}^3\text{م}^3}{\pi}}\ \text{و}^{-\text{عہ م سا}^2}\ \text{سا}^2\ \text{فرسا} \ldots\ldots\ldots (۱۸)$$

مختلف نوعیت کی رفتاریں اور آپس میں ان کا تعلق :- میکسول کے کلیہ کو ترسیمی وضع میں بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔

اگر س کے مقابلہ میں ہم $\frac{فرع_س}{ع}$ کو مرتسم کریں تو ایک منحنی حاصل ہوتا ہے جس کو شکل ۲ میں تقریباً بتایا گیا ہے اس منحنی سے واضح ہے کہ اس کے راس پر سالمات کی تعداد کے لئے "احتمال" اعظم ترین ہے۔

فرض کرو کہ راس پر اس کے متناظر رفتار کی تعبیر $س_۱$ سے کی جاتی ہے۔



شکل ۲

اس $س_۱$ رفتار کو "سالمات کی احتمالی رفتار" سے موسوم کیا جاتا ہے۔ اس $س_۱$ کی قیمت حسب ذیل طریقہ سے معلوم کی جا سکتی ہے :-

مساوات (۱۸) سے :-

$$فرع_س = ۴ع \sqrt{\frac{عہ^۳}{\pi}} \; و^{-عہ س^۲} س^۲ \, فرس = ف(ع)$$

جہاں ف(ع)، ع کے کسی تفاعل کی تعبیر کرتا ہے۔

ف(ع) اعظم ہونے کیلئے $\frac{فرف(ع)}{فرس} = صفر$

یعنی $\frac{فر}{فرس}\left(و^{-عہ س^۲} س^۲\right) = صفر$

$$\therefore \; -س^۲ و^{-عہ س^۲} عہ ۲س + و^{-عہ س^۲} ۲س = صفر$$

یعنی $س^۲ = \frac{۱}{عہ}$

اب جبکہ ف (ع) اعظم ہے تو $\text{سا} = \text{سہ}$

$$\therefore\ \text{سہ} = \frac{1}{\sqrt{\quad}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

فرض کرو کہ ع سالمات کو ہم مختلف حصوں میں تقسیم کر دیتے ہیں اور ان حصوں میں سالمات کی تعداد ع_1، ع_2، ع_3 .... وغیرہ ہے اور ان کی اوسط رفتاریں علی الترتیب سا_1، سا_2، سا_3 .... وغیرہ ہیں۔

$$\text{تب ع} = \text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3 + \cdots\cdots\cdots$$

$$\text{اور مجموعی توانائی بالفعل} = \tfrac{1}{2}\text{م}\left\{\text{ع}_1\text{سا}_1^2 + \text{ع}_2\text{سا}_2^2 + \text{ع}_3\text{سا}_3^2 + \cdots\cdots\right\}$$

$$\therefore\ \text{اوسط توانائی بالفعل فی ذرہ} = \tfrac{1}{2}\text{م}\left\{\frac{\text{ع}_1\text{سا}_1^2 + \text{ع}_2\text{سا}_2^2 + \text{ع}_3\text{سا}_3^2 + \cdots\cdots}{\text{ع}}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\text{م}\,\text{سا}^2$$

$$\text{یعنی } \text{سا}^2 = \frac{\sum \text{ع}_1\text{سا}_1^2}{\text{ع}}$$

اس سا کو "جذر اوسط مربع رفتار" سے موسوم کیا جاتا ہے۔

$$\therefore\ \text{سا}^2 = \frac{\sum \text{ع}_1\text{سا}_1^2}{\text{ع}} = \int_{\text{صفر}}^{\infty} \frac{\text{سا}^2\,\text{فرع}}{\text{ع}} =$$

$$= 4\sqrt{\frac{\text{عہ}^3\text{م}^3}{\pi}} \int_{\text{صفر}}^{\infty} \text{نو}^{-\text{عہ م سا}^2}\,\text{سا}^4\,\text{فرسا}$$

$$= 4\sqrt{\frac{\text{عہ}^3\text{م}^3}{\pi}} \cdot \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\text{عہ}^5\text{م}^5}} = \frac{3}{2\,\text{عہ م}}$$

$$\therefore\ \text{سا} = \sqrt{\frac{3}{2\,\text{عہ م}}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

ان مختلف حصوں کے سالمات کی مجموعی معیار حرکت =

$$= \text{م}\,\text{ع}_1\text{سا}_1 + \text{م}\,\text{ع}_2\text{سا}_2 + \cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore \text{اوسط معیار حرکت فی ذرہ} = \text{م}\left\{\frac{\text{ع}_1\text{س}_1 + \text{ع}_2\text{س}_2 + \text{ع}_3\text{س}_3 + \text{ع}_4\text{س}_4 + \cdots\cdots}{\text{ع}}\right\}$$

$$= \text{م}\,\bar{\text{س}} \quad \text{فرض کرو}$$

اس $\bar{\text{س}}$ کو "اوسط حسابی رفتار" سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

$$\text{یعنی}\ \bar{\text{س}} = \frac{\sum \text{ع}\,\text{س}}{\text{ع}} = \int_{\text{صفر}}^{\infty} \text{س}\ \text{فرع}_{\text{س}} =$$

$$= ۴\sqrt{\frac{\text{عہ}^3}{\pi}} \int_{\text{صفر}}^{\infty} \text{س}^3\, \text{ء}^{-\text{عہ}\,\text{س}^2}\ \text{فرس} = ۴\sqrt{\frac{\text{عہ}^3}{\pi}} \cdot \frac{1}{۲\,\text{عہ}^2}$$

$$\therefore \bar{\text{س}} = \frac{۲}{\sqrt{\pi\,\text{عہ}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (۲۱)$$

مساوات (۲۰) اور (۲۱) سے $\frac{\bar{\text{س}}}{\text{س}} = \sqrt{\frac{۸}{۳\pi}} = ۰٫۹۲ \cdots\cdots (۲۲)$

اور مساوات (۱۹) اور (۲۰) سے $\frac{\text{س}'}{\text{س}} = \sqrt{\frac{۲}{۳}} \cdots\cdots\cdots (۲۳)$

چند گیسوں کی سالمی رفتاریں[۶] :—

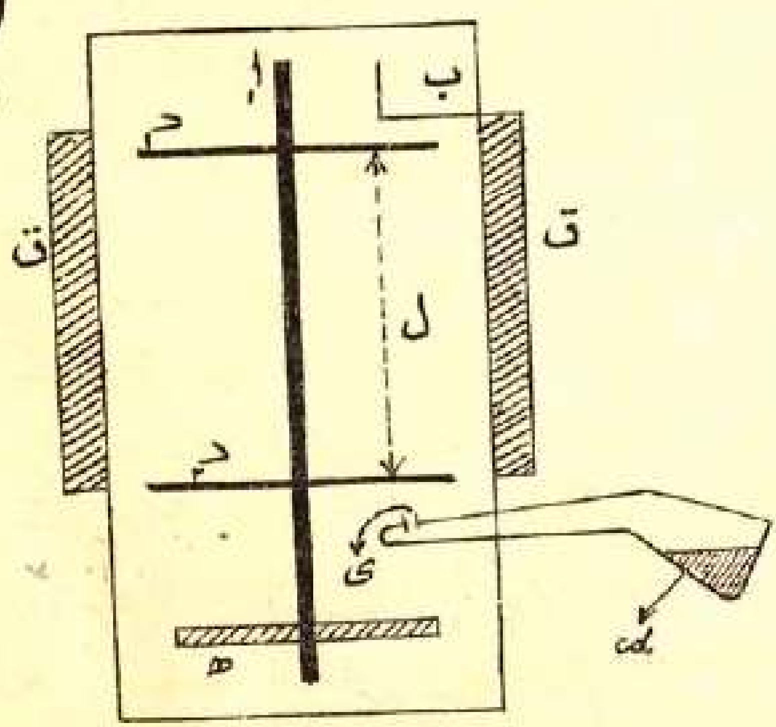
گیس	طبعی دباؤ اور تپش پر س سمر فی ثانیہ	طبعی دباؤ اور تپش پر $\bar{\text{س}}$ سمر فی ثانیہ
ہائڈروجن	$۱۸٫۳۸ \times ۱۰^۴$	$۱۶٫۹۳ \times ۱۰^۴$
ہیلیم	$۱۳٫۱۱ \times ۱۰^۴$	$۱۲٫۰۸ \times ۱۰^۴$
امونیا	$۶٫۳۳ \times ۱۰^۴$	$۵٫۸۳ \times ۱۰^۴$
آبی بخار	$۶٫۱۵ \times ۱۰^۴$	$۵٫۶۵ \times ۱۰^۴$
نیین	$۵٫۸۴ \times ۱۰^۴$	$۵٫۳۸ \times ۱۰^۴$
کاربن مونا کسائڈ	$۴٫۹۳ \times ۱۰^۴$	$۴٫۵۴ \times ۱۰^۴$
نائیٹروجن	$۴٫۹۳ \times ۱۰^۴$	$۴٫۵۴ \times ۱۰^۴$

ہوا	$۴٫۸۵ \times ۱۰^{۴}$	$۴٫۴۷ \times ۱۰^{۴}$
آکسیجن	$۴٫۶۱ \times ۱۰^{۴}$	$۴٫۲۵ \times ۱۰^{۴}$
آرگن	$۴٫۱۳ \times ۱۰^{۴}$	$۳٫۸۰ \times ۱۰^{۴}$
کاربن ڈائی آکسائڈ	$۳٫۹۳ \times ۱۰^{۴}$	$۳٫۶۲ \times ۱۰^{۴}$
کرپیٹن	$۲٫۸۶ \times ۱۰^{۴}$	$۲٫۶۳ \times ۱۰^{۴}$
زینن	$۲٫۲۸ \times ۱۰^{۴}$	$۲٫۱۰ \times ۱۰^{۴}$
پارہ کا بخار	$۱٫۸۴ \times ۱۰^{۴}$	$۱٫۷۰ \times ۱۰^{۴}$

میکسول کے کلیہ کا عملی ثبوت :- متعدد سائنس دانوں نے رفتاروں کی تقسیم کے متعلق میکسول کے کلیہ کا ثبوت بالواسطہ طریقوں سے حاصل کیا ہے۔ اسٹرن پہلا شخص تھا جس نے چاندی کے جواہر سے تجربہ کر کے بالراست اس کلیہ کو ثابت



شکل ۳ (الف)



شکل ۳

کیا گو آلات میں بعض دشواریوں کے باعث نتائج اتنے اطمینان بخش نہیں نکلے۔ بعد میں کامپٹن، الِڈرج اور دیگر اشخاص نے کامیابی کے ساتھ راست طور پر تجربے کئے۔ ١٩٢٨ء میں الیڈرج[۴] ایک امریکن سائنس دان نے جو آلات استعمال کئے تھے انکا تذکرہ یہاں خالی از دلچسپی نہ ہوگا۔ شکل ٣ میں ان کو دکھایا گیا ہے۔

دو دائری وضع کے قرص د۱ اور د۲ ایک خلادار برتن کے اندر ایک ہی دھری ا پر رکھے ہوئے ہیں۔

ھ ایک زیادہ وزنی قرص ہے جو اُسی دھری پر رکھا ہوا ہے اور ایک امالی موٹر کے گھومنے والے چکر کی طرح کام دیتا ہے، د۱ اور د۲ قرصوں پر کئی جھریاں بنی ہوئی ہیں جیسا کہ شکل ٣ (الف) میں دکھایا گیا ہے۔ برتن سے باہر نکلی ہوئی ایک نلی میں کیڈمیم (Cd) کو گرم کیا جاتا ہے جو جھری ی میں سے بخار بنکر (جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے) گزر جاتا ہے۔ ب ایک الومنیم کی تختی ہے جو مائع ہوا سے ٹھنڈی رکھی جاتی ہے۔ ق اور ق بیرونی برتن ہیں جن میں مائع ہوا غیر ضروری سالمات کو برتن کے بازوؤں سے نکلکر ب تک پہنچنے سے روکتی ہے۔

تجربہ میں کیڈمیم کے سالمات کی کچھ تعداد ایک خاص رفتار کے ساتھ جھری میں سے گزر کر د۲ کے نیچے رہتی ہے۔ جب موٹر کے ذریعہ د۱ اور د۲ کو گھمایا جاتا ہے تو ان میں سے چند سالمات د۲ کی جھری میں سے گزر جاتے ہیں۔ گزرنے کے دوران میں ان کی رفتاریں جو انتصابی سمت میں ہوتی ہیں د۲ کی رفتار کی وجہ سے (جو افقی سمت میں ہوتی ہے) بدل جاتی ہیں پس وہ د۱ اور د۲ کے درمیان مختلف سمتوں میں ایک خاص رفتار سے حرکت کرنے لگتے ہیں لیکن ان سالمات میں سے ایک خاص حصہ اوپر جاکر د۱ کی جھری میں سے گزر جاتا ہے اور ایک خاص رفتار کے ساتھ ب تک پہنچ کر وہاں مائع ہوا کی موجودگی سے جو اس کو سرد رکھتی

ہے، منجمد ہونے لگتا ہے۔ ظاہر ہے کہ تختی ب پر ان کے جمع ہونے کی کثافت کا انحصار منجمد ہونے والے سالمات کی تعداد پر ہوگا۔ اگر ب پر زیادہ سالمات کی تعداد منجمد ہوگی تو اس مقام پر زیادہ سیاہی نمایاں ہونے لگے گی۔ تجربہ میں قرصوں کو ابتداً بہت ہی آہستہ گھمایا جاتا ہے اور سالمات کا ایک مطروحہ حاصل کیا جاتا ہے۔ بعد میں قرص تیز رفتار سے گھمائے جاتے ہیں جبکہ تیز حرکت کرنے والے سالمات ابتدائی مطروحہ سے آہستہ حرکت کرنے والے سالمات کی بہ نسبت زیادہ قریب جمع ہونے لگتے ہیں۔ یہ مطروحے مستطیلی جھریوں کی وجہ سے طیفی خطوط کی طرح ہوتے ہیں۔ الڈرج نے ان مطروحوں کی کثافت کو تختی کے مختلف مقامات پر اس کے معیاری کثافت سے مقابلہ کرکے دریافت کیا۔

فرض کرو کہ د اور دٍ کے درمیان سالمات کی تعداد = ع

مساوات (۱۸) سے تعداد سالمات فرع جن کی رفتاریں سا اور سا + فرسا کے درمیان ہیں حسب ذیل ہوگی :-

$$\text{فرع} = \text{۴}\,\text{ع}\,\sqrt{\frac{\text{عہ}^{\text{۳}}\,\text{م}^{\text{۳}}}{\pi}}\;\text{و}^{-\text{عہ}\,\text{م}\,\text{سا}^{\text{۲}}}\;\text{سا}^{\text{۲}}\,\text{فرسا}$$

لیکن مساوات (۱۹) سے سہ = $\dfrac{1}{\sqrt{\text{عہ}\,\text{م}}}$

$$\therefore\ \text{فرع} = \frac{\text{۴}\,\text{ع}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\text{سا}^{\text{۲}}}{\text{سہ}^{\text{۳}}}\cdot\text{و}^{-\frac{\text{سا}^{\text{۲}}}{\text{سہ}^{\text{۲}}}}\cdot\text{فرسا}$$

ان فرع سالمات میں سے سالمات کی ایک خاص تعداد انتصابی وضع میں دٍ کی طرف جانے کی کوشش کرے گی اور ان کی تعداد =

$$= \text{ف}\left(\frac{\text{۴}\,\text{ع}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\text{سا}^{\text{۲}}}{\text{سہ}^{\text{۳}}}\,\text{و}^{-\frac{\text{سا}^{\text{۲}}}{\text{سہ}^{\text{۲}}}}\cdot\text{فرسا}\right)$$ جہاں ف = کوئی کسر

$\therefore$ تعداد سالمات جو د کی جھری میں سے فی ثانیہ گزرے گی = $\text{ج}\,\text{سا}^{\text{۲}}\,\text{و}^{-\frac{\text{سا}^{\text{۲}}}{\text{سہ}^{\text{۲}}}}\,\text{فرسا}$

$= ج\, س^{۳}\, و^{-\frac{س^{۲}}{سی^{۲}}}\, فر\, س = فر\, ع$ فرض کرو جہاں ج = کوئی مستقل۔

فرض کرو کہ ابتدائی مطروحہ سے لافاصلہ پر یا قرص پر کے کسی خاص نشان سے لافاصلہ پر سالمات جمع ہوتے ہیں۔

تب $لا = ا و = \frac{ال}{س}$ جہاں ا = اس قرص کی رفتار اور و = لافاصلہ طے کرنے کے لئے وقت

فرض کرو کہ $س = \frac{۱}{لہ}$ تب $فر\, س = -\frac{فر\, لہ}{لہ^{۲}}$

$$\therefore لا = \frac{ال}{س} = ال\, لہ$$

$$\therefore فر\, ع = -\, ج\, لہ^{-۵}\, و^{-\frac{۱}{سی^{۲} لہ^{۲}}}\, فر\, لہ$$

اب مطروحہ کی کثافت (لا = ال لہ) پر $لہ^{-۵}\, و^{-\frac{۱}{سی^{۲} لہ^{۲}}}$ کے متناسب ہے

لہٰذا ایسے مقام پر لہ کی قیمت حاصل کرنے کے لئے جہاں اعظم مطروحہ یا سیاہی اعظم ہو :-

$$\frac{ف}{فر\, لہ}\left(لہ^{-۵}\, و^{-\frac{۱}{سی^{۲} لہ^{۲}}}\right) = صفر$$

$$یعنی\ ۵\, لہ^{-۶} = \frac{۲\, لہ^{-۸}}{سی^{۲}}$$

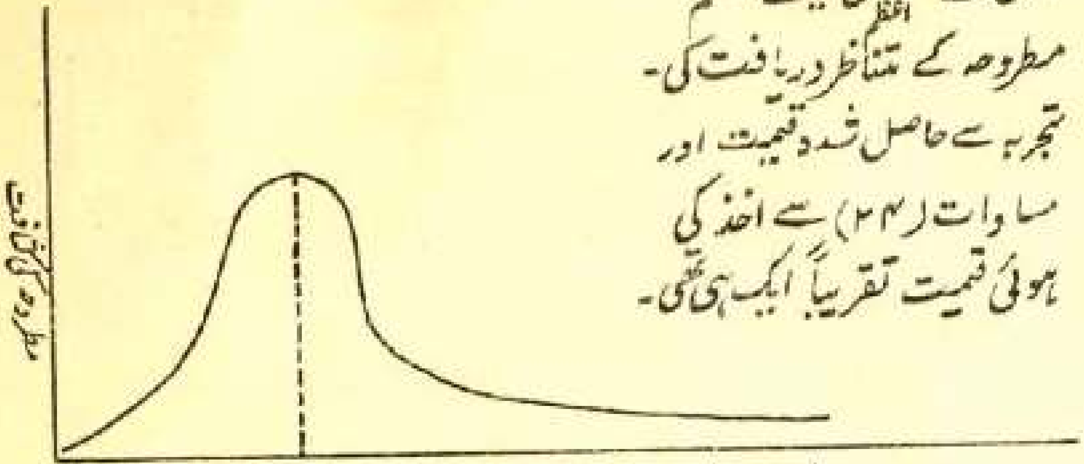
$$\therefore لہ = \sqrt{\frac{۲}{۵}} \cdot \frac{۱}{سی} = لہ_{اعظم}$$

لیکن مساوات (۱۹) سے :- $لہ_{اعظم} = \sqrt{\frac{۲ عہ م}{۵}} = \sqrt{\frac{م ن}{۵ک ت}}$

$\therefore$ لا کی قیمت اعظم کثافت کے متناظر $= لا_{اعظم} = ال\, لہ_{اعظم}$

$$\therefore لا_{اعظم} = ال \sqrt{\frac{م ن}{۵ک ت}} \quad ....\ (۲۴)$$

الڈرج نے ۴۰۰۰° ھ پر تجربہ کرکے مطروحہ کی کثافت اور (لا = ا ل لہ) کے درمیان ایک ترسیم کھینچی اس طرح جو منحنی حاصل ہوا اس کو شکل ۴ میں بتایا گیا ہے اس منحنی سے اس نے لا اعظم کی قیمت اعظم مطروحہ کے متناظر دریافت کی۔ تجربہ سے حاصل شدہ قیمت اور مساوات (۲۴) سے اخذ کی ہوئی قیمت تقریباً ایک ہی تھی۔



شکل ۴

توانائی کی مساوی تقسیم کا کلیہ:— ہم اگر کسی سہ ابعادی صورت پر غور کریں اور کوئی سالمہ تینوں انتصابی سمتوں میں سے کسی ایک سمت میں حرکت کرے اور ان سمتوں میں سے کسی ایک سمت کی حرکت دوسری سمتوں کی حرکتوں کے غیر تابع ہو تو یہ کہا جاتا ہے کہ سالمہ میں "تین درجوں" کی آزادی ہے۔ عام صورت میں کسی جسم کی تعریف اس کے مقامی محددوں کی تعداد مثلاً لا۱، لا۲، لا۳ ...... لاn وغیرہ پر

اور نیز متعدد رفتاروں ہ۱، ہ۲، ہ۳ ...... ہn وغیرہ پر جو کہ ایک دوسرے کے غیر تابع ہیں منحصر ہوتی ہے۔ ان میں سے ہر ایک محدد کے متناظر توانائی ایک ہی ہوتی ہے۔ یعنی آزادی کے مختلف درجوں میں توانائی مساوی طور پر منقسم ہوتی ہے۔ اس کلیہ کو مساوی تقسیم توانائی کے کلیہ سے موسوم کیا جاتا ہے۔ میکسول نے ۱۸۵۹ء میں پہلی دفعہ اسکو بیان کیا تھا۔

کسی گیس کے ایک گرام سالمہ پہ غور کرو جہاں کہ جملہ سالمات کی تعداد ن ہے۔ مساوات (۱۸) سے فرع سالمات کی تعداد، جن کی رفتاریں سا اور سا + فرسا کے درمیان ہوں حسب ذیل ہوگی:۔

$$\text{فرع} = ۴\pi\,\text{ن}\sqrt{\frac{\text{عہ}^{۳}\,\text{م}^{۳}}{\pi}}\;\text{و}^{-\text{عہ}\,\text{م}\,\text{سا}^{۲}}\;\text{سا}^{۲}\,\text{فرسا}$$

ان فرع سالمات کی توانائی بالفعل = $\frac{۱}{۲}$ م فرع . سا^{۲}

∴ مجموعی توانائی بالفعل گیس کے اس گرام سالمہ کی = $\int_{\text{صفر}}^{\infty} \frac{۱}{۲}\,\text{م}\,\text{فرع}\,\text{سا}^{۲}$

$$= \int_{\text{صفر}}^{\infty} \frac{۱}{۲}\,\text{م}\,\text{سا}^{۴}\; ۴\pi\,\text{ن}\sqrt{\frac{\text{عہ}^{۳}\,\text{م}^{۳}}{\pi}}\;\text{و}^{-\text{عہ}\,\text{م}\,\text{سا}^{۲}}\;\text{فرسا}$$

$$= ۲\pi\,\text{ن}\sqrt{\frac{\text{عہ}^{۳}\,\text{م}^{۳}}{\pi}}\cdot\frac{۳}{۸}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\text{عہ}^{۵}\,\text{م}^{۵}}} = \frac{۳}{۴}\cdot\frac{\text{م}\,\text{ن}}{\text{عہ}\,\text{م}}$$

لیکن $\text{عہ} = \frac{\text{ن}}{۲\,\text{لات}}$

∴ پوری توانائی بالفعل گیس کے گرام سالمہ کی = $\frac{۳}{۲}$ لات ....(۲۵)

∴ فی سالمہ توانائی بالفعل = $\frac{۳\,\text{لات}}{۲\,\text{ن}}$ .... (۲۶)

مساوی تقسیم توانائی کے کلیہ کی رو سے، چونکہ یہاں "آزادی کے تین درجے" زیر غور ہیں۔ لہذا ہر ایک ایسے رفتاری محددوں کے متناظر توانائی (چونکہ مساوی ہی)
= $\frac{۱}{۲}$ لات فی گرام سالمہ یا $\frac{\text{لات}}{۲\,\text{ن}}$ فی سالمہ۔

کسی نظام میں اگر آزادی کے ما درجے ہوں تو اس نظام کے ساتھ جو توانائی مضمر ہوگی وہ = $\frac{\text{ما}\,\text{لات}}{۲}$ فی گرام سالمہ یا = $\frac{\text{ما}\,\text{لات}}{۲\,\text{ن}}$ فی سالمہ

اشیا کی سالمی توانائیاں:۔ یک جوہری گیس میں، سالمات کے متعلق یہ

تصور کیا جاتا ہے کہ وہ لچک دار کرّے ہوتے ہیں اور ان میں صرف توانائی بالفعل ہوتی ہے، توانائی بالقوہ بالکل نہیں ہوتی۔

یہ باہم انتصابی، تین سمتوں میں سے کسی ایک سمت میں حرکت کرسکتے ہیں لہذا ان میں "آزادی تین درجوں" کی ہوتی ہے۔ ایسی گیس کے ایک گرام سالمہ میں جو مجموعی توانائی ی مضمر ہوگی وہ $= \frac{۳\,\text{لا}\,\text{ت}}{۲}$ (مساوات ۲۵ سے)

حرارت کی کسی معیاری کتاب سے واضح ہوگا کہ اگر کسی گیس کی حرارت نوعی مستقل حجم پر $\text{ن}_{\text{ح}}$ کے مساوی ہو تو $\text{ن}_{\text{ح}} = \frac{\text{فرق ی}}{\text{فرق ت}} = \frac{۳\,\text{لا}}{۲}$

کسی ایک کامل گیس کے لئے یہ ہمیں معلوم ہے کہ $\text{ن}_{\text{د}} - \text{ن}_{\text{ح}} = \text{لا}$ جہاں $\text{ن}_{\text{د}}$ = گیس کی حرارت نوعی مستقل دباؤ پر

$$\therefore \text{کسی یک جوہر والی گیس کیلئے } \text{ن}_{\text{د}} = \frac{۳\,\text{لا}}{۲} + \text{لا} = \frac{۵\,\text{لا}}{۲}$$

$\therefore$ دونوں نوعی حرارتوں میں نسبت $\frac{\text{ن}_{\text{د}}}{\text{ن}_{\text{ح}}} = \text{نہ}$ (فرض کرو) $= \frac{۵}{۳} = ۱٫۶۶$

ہیلیم، آرگن وغیرہ جیسی یک جوہری گیسوں کے لئے یہ قیمت تجربی نتائج سے ملتی جلتی ہے۔

دو جوہری گیس کے ایک سالمہ کے متعلق یہ فرض کیا جاتا ہے کہ وہ دو متجانس لچکدار کروں پر مشتمل ہوتا ہے جو مضبوطی کے ساتھ ایک دوسرے سے جُڑے ہوئے ہوتے ہیں۔ اصولاً چونکہ یہ دو علیحدہ کرّے ہوتے ہیں اس لئے مجموعی طور پر آزادی کے چھ درجوں کا ہونا ضروری ہے۔ لیکن ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ ہر ایک کرہ ایک ایسا محور رکھتا ہے جو مشترک ہے یعنی دونوں کے مرکزوں کو ملانے والا خط ہے۔ اسکا مطلب یہ ہے کہ آزادی کے کل پانچ درجے ہونگے۔ لہذا دو جوہری گیس کے لئے توانائی $\text{ی} = \frac{۵\,\text{لا}\,\text{ت}}{۲}$

$\therefore \text{ن}_{\text{ح}} = \frac{۵}{۲}\text{لا}$ اور $\text{ن}_{\text{د}} = \frac{۷}{۲}\text{لا}$، اس لئے $\text{نہ} = ۱٫۴۰$

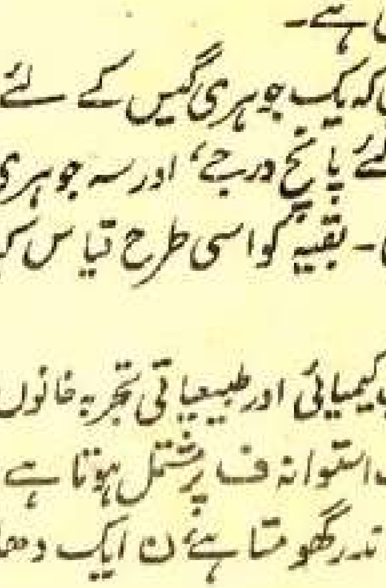
یہ قیمت ہائیڈروجن، نائٹروجن وغیرہ کی تجربی قیمتوں سے بہت ہی قریب ہے
سہ جوہری گیس کے لئے ہم آزادی کے چھ درجے لے سکتے ہیں۔ اس
صورت میں $ن_ح = \frac{۶}{۲}ل$ اور $ن_و = \frac{۸}{۲}ل$

$∴ نہ = ۱٫۳۳$

یہ قیمت بھی تجربہ کی قیمت سے تقریباً ملتی ہے۔

اس سے عملی طور پر ہم اس نتیجے پر پہنچتے ہیں کہ یک جوہری گیس کے لئے آزادی کے تین درجے، دو جوہری گیس کے لئے پانچ درجے، اور سہ جوہری گیس کے لئے آزادی کے چھ درجے ہوتے ہیں۔ بقیہ کو اسی طرح قیاس کیا جا سکتا ہے۔

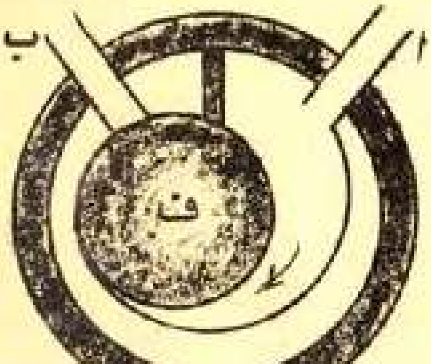
سالمی پمپ:- گائیڈے کا سالمی پمپ کیمیائی اور طبیعیاتی تجربہ خانوں میں بہت ہی کار آمد ثابت ہوا ہے۔ یہ ایک استوانہ ف پر مشتمل ہوتا ہے (شکل ۵) جو ایک اور بیرونی استوانہ کے اندر گھومتا ہے۔ ن ایک دھاتی تختی ہے۔ اس کے اور استوانہ ف کے درمیان ایک چھوٹی سی جگہ ہوتی ہے یہ جگہ سالمات کے اوسط آزاد راستہ سے بھی کم ہوتی ہے جس کی وجہ سے سالمات میں پیچھے کی طرف حرکت نہیں ہو سکتی۔ نلی ۲ اس برتن کے ساتھ جوڑ دی جاتی ہے جس میں ایک زبردست خلا کو پیدا کرنا مقصود ہوتا ہے۔ ف کو برقی طور پر یا کسی اور ذریعہ سے یکسانی سمت میں گھمایا جاتا ہے۔



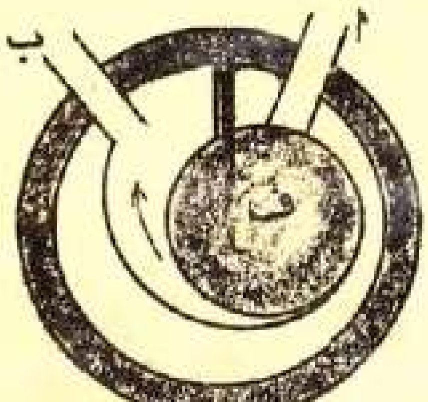
شکل ۵

ب میں سے گیس کے سالمات بتدریج باہر نکلتے ہیں۔

چونکہ یہ پمپ موجودہ زمانہ میں لوہے اور فولاد سے بنایا جاتا ہے اس وجہ سے پارہ کے بخارات کا اس پر اثر نہیں ہوتا۔ اس سے آسانی کے ساتھ ۰٫۰۰۲ مم پارہ کے دباؤ کے مساوی خلا پیدا کیا جا سکتا ہے اور فی گھنٹہ تقریباً ۱٫۵ مکعب میٹر گیس اس میں سے خارج کی جا سکتی ہے۔ حال میں ہالک نے اور پھر زیگبان اور ہینیک نے اس کے میکانی خاکہ میں بہت سی جدتیں پیدا کیں۔ مشہور ہینیک پمپ عام طور پر ۱۹۲۱ء سے دستیاب ہونے لگا ہے۔ یہ بہت ارزاں ہے اور ۴ ... ۰ء مم پارہ کے مساوی خلا پیدا کرنے کے علاوہ چلنے میں بہت کم آواز کرتا ہے۔ اسکے پمپ کرنیکا میکانی اصول بالکل گائیڈے کی طرح ہے لیکن فتارہ یا اندرونی استوانہ



شکل ع۶ (الف)



شکل ع۶ (ب)

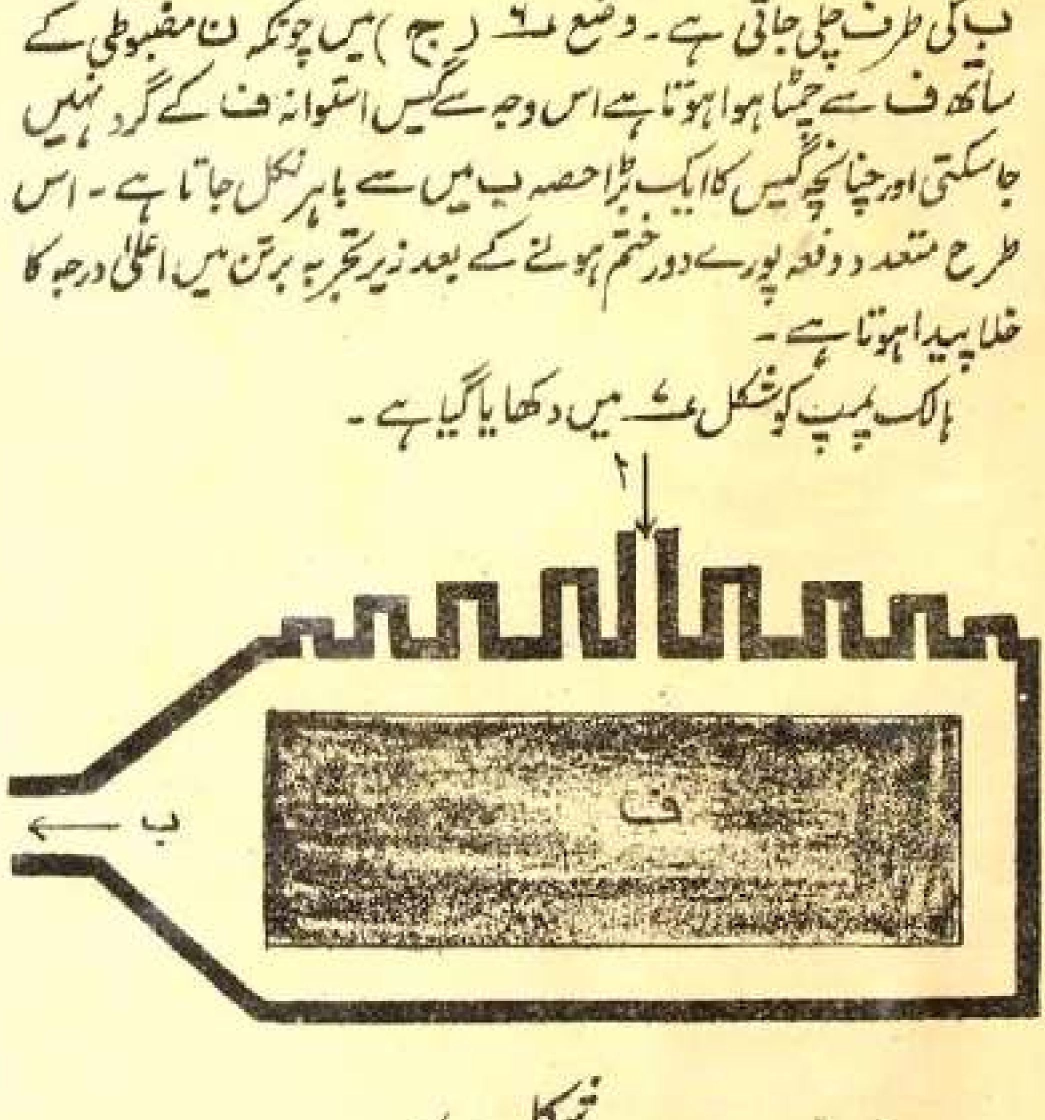


شکل ع۶ (ج)

کا عمل اس سے مختلف ہے۔ اس پمپ کے کام کرنے کا اصول ان تین تراشی شکلوں سے جو شکل ۶ (ا) ، ۶ (ب) اور ۶ (ج) میں دکھائی گئی ہیں سمجھ میں آجائے گا۔

جب ف کا مقام شکل ۶ (ا) کی طرح ہوتا ہے تو جس برتن میں خلا پیدا کرنا ہوتا ہے اس کو ا کے ساتھ جوڑ دیا جاتا ہے جب شکل ۶ (ب) کی طرح ف کا مقام ہوتا ہے تو ف اور ا کے درمیانی گیس کی زیادہ مقدار ب کی طرف چلی جاتی ہے۔ وضع ۶ (ج) میں چونکہ ن مضبوطی کے ساتھ ف سے چمٹا ہوا ہوتا ہے اس وجہ سے گیس استوانہ ف کے گرد نہیں جا سکتی اور چنانچہ گیس کا ایک بڑا حصہ ب میں سے باہر نکل جاتا ہے۔ اس طرح متعدد دفعہ پورے دور ختم ہونے کے بعد زیر تجربہ برتن میں اعلیٰ درجہ کا خلا پیدا ہوتا ہے۔

ہالک پمپ کو شکل ۷ میں دکھایا گیا ہے۔



شکل ۷

یہ ایک بیرونی فولاد کے استوانہ پر مشتمل ہے جس میں باقرینہ مرغولہ دار نالیاں

شکل کی طرح کٹی ہوئی ہوتی ہیں۔ ابتدا میں یہ نالیاں نہایت گہری ہوتی ہیں لیکن بتدریج ان کی گہرائی کم ہوتی جاتی ہے۔ ان کی بلندیاں تقریباً ۵ مم سے ۱ مم تک کی ہوتی ہیں۔ یہ نالیاں اس طریقہ سے بنائی جاتی ہیں کہ سالمات آسانی سے باہر کی طرف پھسل کر جا سکیں۔ ف ایک اندرونی استوانہ ہے جس کو ایک موٹر کے ذریعہ گھمایا جاتا ہے۔ جس برتن میں زبردست خلا پیدا کرنا ہوتا ہے اس کو ا کے ساتھ جوڑ دیا جاتا ہے جو بیرونی استوانہ کے ٹھیک درمیان میں ہے۔

نلیوں اور سوراخوں میں سے گیسوں کا بہنا :- فرض کرو کہ دو بند برتن جن میں ایک ہی گیس مقید ہے ایک پتلی نلی کے ذریعہ جوڑ دئے جاتے ہیں اور ان میں سے ایک برتن میں گیس کا دباؤ دوسرے سے کم ہوتا ہے۔ اگر پتلی نلی میں سے گیس کو دھکیلنے والا دباؤ معمولی ہو تو فی ثانیہ اس میں سے بہنے والی گیس کی کمیت کا اندازہ گیسوں کی لزوجیت کے مشہور میئر کے کلیہ سے ہو سکتا ہے۔ یعنی فی ثانیہ جتنی گیس بہتی ہے اس کی کمیت لزوجیت سے تناسب معکوس رکھتی ہے۔ لیکن بالکل کم دباؤ پر گیس کا بہاؤ مستقل ہو جاتا ہے اور لزوجیت پر اس کا انحصار نہیں ہوتا۔ چونکہ بالکل کم دباؤ پر گیس کے سالمات دور دور پھیلے ہوئے ہوتے ہیں اس وجہ سے بین السالماتی تصادم کو نظر انداز کر دیا جا سکتا ہے اور صرف برتن اور نلی کے دیواروں سے سالمات کے ٹکرانے پر اس صورت میں غور کرنا ہوگا۔

کنڈسن نے یہ فرض کیا کہ بالکل کم دباؤ پر سالمات دیوار پر جذب ہو جاتے ہیں اور پھر تمام سمتوں میں مساوی طور پر نکل پڑتے ہیں۔ اس نے ریاضی کی مدد سے اس مظہر کی عالمانہ طور پر تحقیق کی اور نتائج کی تصدیق بہترین تجربوں سے حاصل کی۔ میئر کے کلیہ سے نلی میں سے فی ثانیہ بہنے والی گیس کی کمیت ک۱ =

$$= \text{ثم حم} = \frac{\text{د حم ف}}{\text{لا ت}}$$

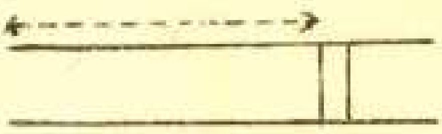
$$= \frac{\pi\, \text{ص}^4}{8\, \text{ل}\, \text{لہ}} (\text{د}_1 - \text{د}_2) \frac{(\text{د}_1 + \text{د}_2)}{2} \cdot \frac{\text{ث}}{\text{لا}\, \text{ت}}$$

$$\therefore \text{ک}_1 \propto \text{د} (\text{د}_1 - \text{د}_2)$$

جہاں $\text{د} = \frac{\text{د}_1 + \text{د}_2}{2}$ = اوسط دباؤ، ثہ = گیس کی کثافت، حم = فی ثانیہ بہنے والی گیس کا حجم، ص = نلی کا نصف قطر، ل = نلی کا طول اور لہ = گیس کی لزوجیت

لیکن بالکل کم دباؤ پر یہ کلیہ صحیح نہیں ہے۔

فرض کرو کہ ایک پتلی نلی (شکل ۸) کے ایک سرے سے لا فاصلہ پر دباؤ د اور لا + فرلا فاصلہ پر دباؤ د + فرد ہے۔ فرض کرو کہ گیس کی اوسط رفتار نلی کے دیواروں کے متوازی



سلا کے مساوی ہے۔

دیوار کے اس فرلا ٹکڑے کا رقبہ

$= 2\pi$ ص فرلا

شکل ۸

اب گیس میں ایک مربع سمر کا رقبہ تصور کیا جائے تو ہم کو یہ دریافت کرنا ہے کہ ع سالمات فی مکعب سمر میں سے کتنے سالمات فی ثانیہ اس اکائی رقبہ میں سے گزرینگے

مساوات (۱۷) سے $\quad \text{فرع}_1 = \text{ع} \sqrt{\frac{\text{عہ م}}{\pi}}\, \text{و}^{-\text{عہ م ہا}^2}\, \text{فرہا}$

$\therefore$ تعداد سالمات جو فی ثانیہ اکائی رقبہ میں سے گزرتے ہیں =

$$= \int_{\text{صفر}}^{\infty} \text{فرع}_1\, \text{ہا} = \bar{\text{ع}} \text{ فرض کرو}$$

$$\therefore \bar{\text{ع}} = \text{ع} \sqrt{\frac{\text{عہ م}}{\pi}} \cdot \frac{1}{2\, \text{عہ}\, 2} = \frac{\text{ع}}{2 \sqrt{\pi\, \text{عہ م}}}$$

لیکن مساوات (۲۰) سے $\text{س} = \sqrt{\frac{۳}{۲\,\text{عدم}}}$

$$\therefore \quad \bar{\text{ع}} = \frac{\text{ع س}}{\sqrt{۶\pi}} \quad \cdots\cdots\cdots (۲۷)$$

اس فزلا ٹکڑے سے فی ثانیہ جو سالمات ٹکرا رہے ہیں ان کی تعداد

$$= \frac{۲\pi\,\text{ص فزلا ع س}}{\sqrt{۶\pi}}$$

اور سالمی معیار حرکت فی ثانیہ، دیواروں کے متوازی =

$$= \frac{۲\pi\,\text{ص فزلا ع س}\,\text{م}\,\text{ک}}{\sqrt{۶\pi}}$$

$$\text{حاصل قوت} = -\pi\,\text{ص}^۲\,\text{فرد}$$

$$\therefore \quad -\pi\,\text{ص}^۲\,\frac{\text{فرد}}{\text{فزلا}} = \frac{۲\pi\,\text{ص ثہ س}\,\text{مک}}{\sqrt{۶\pi}}$$

جہاں ثہ = گیس کی کثافت

فی ثانیہ برآمد ہونے والی گیس کی کمیت = $\pi\,\text{ص}^۲\,\text{مک}\,\text{ثہ}$

$$= -\pi\,\text{ص}^۲\,\text{ثہ ص}\,\frac{\text{فرد}}{\text{فزلا}} \cdot \frac{\sqrt{۶\pi}}{۲\,\text{ثہ س}} =$$

$$= -\pi\,\text{ص}^۳\,\sqrt{\frac{\text{ء}\,\pi}{۲\,\text{لا}\,\text{ت}}} \cdot \frac{\text{فرد}}{\text{فزلا}}$$

$$\left(\text{چونکہ}\ \text{س} = \sqrt{\frac{۳\,\text{لا}\,\text{ت}}{\text{ء}}}\right)$$

∴ پوری نلی کے طول ل سے برآمد ہونے والی گیس کی کمیت فی ثانیہ = ک

$$= \pi\,\text{ص}^۳\,\sqrt{\frac{\pi\,\text{ء}}{۲\,\text{لا}\,\text{ت}}} \cdot \frac{(\text{د}_۱ - \text{د}_۲)}{\text{ل}} \quad \cdots\cdots\cdots (۲۸)$$

یہ کنڈسن کے سالمی بہاؤ کے کلیہ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

نلی کی مزاحمت:- نلی کی اکائی برآمد "$م_1$" کی تعریف (د ح) سے کی جاتی ہے جبکہ فرق دباؤ ($د_1 - د_2$) ایک ڈائین فی مربع سمر کے مساوی ہو اور ح گیس کا وہ حجم ہو جو اوسط دباؤ د پر فی ثانیہ اس سے برآمد ہو رہی ہے۔

تعریف کی رو سے $م_1 = (د\,ح) = \frac{ثہ\,لات}{ع}.ح =$

$$= \left(\frac{لات}{ع}.ک_1\right)_{(د_1-د_2)=1}$$

مساوات (۲۸) سے:- $م_1 = \frac{لات}{ع}.\frac{\pi\,ص^3}{ل}\sqrt{\frac{\pi\,ع}{2\,لات}} =$

$$= \frac{\pi\,ص^3}{ل}\sqrt{\frac{\pi\,لات}{2\,ع}} = \frac{\pi\,ص^3}{ل}\sqrt{\frac{\pi}{2\,ثہ}}$$

جہاں ثہ = ایک ڈائین فی مربع سمر دباؤ کے متناظر کثافت = $\frac{ع}{لات}$

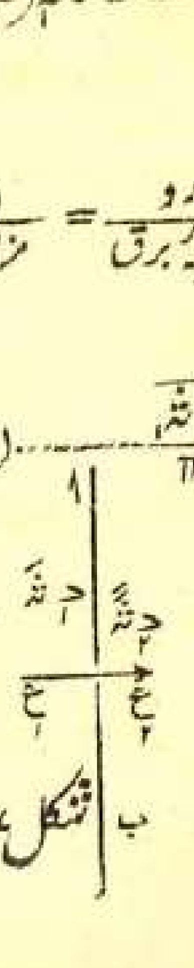
نلی کے لئے گیس کی مجموعی برآمد دباؤ ($د_1 - د_2$) کے لئے = $م_1(د_1 - د_2)$

یعنی $م_1 = \frac{\text{مجموعی برآمد}}{د_1 - د_2}$

کلیہ اوم سے اس کی مطابقت کی جائے تو چونکہ $\frac{رو}{\text{محرکہ برق}} = \frac{1}{\text{مزاحمت}}$

اس لئے $\frac{1}{\text{مزاحمت}}$، $م_1$ کے متناظر ہوتی ہے۔

$\therefore$ نلی کی مزاحمت $= \frac{1}{م_1} = \frac{ل}{\pi\,ص^3}\sqrt{\frac{2\,ثہ}{\pi}}$ ....(۲۹)



شکل ۹

سوراخ کی مزاحمت:- فرض کرو کہ ا ب شکل ۹ میں ایک پردہ ہے جس میں ایک بہت ہی چھوٹا سوراخ ہے اور پردہ کی بائیں جانب سالمات کی تعداد فی مکعب سمر $ع_1$ اور داہنی جانب $ع_2$ ہے اور نیز گیس کا دباؤ اور کثافت پردہ کے بائیں

اور دائیں جانب بالترتیب $د_۲$، $ثہ_۲$ اور $د_۲$، $ثہ_۲$ ہیں۔

اس صورت میں گیس کی وہ کمیت جو بائیں جانب سے دائیں جانب فی ثانیہ سوراخ میں سے گزرے گی $= \frac{\pi ص^۲ ع_۱ ثہ_۱}{\sqrt{۶\pi}}$

گیس کی وہ کمیت جو داہنی جانب سے بائیں جانب فی ثانیہ گزرے گی $= \frac{\pi ص^۲ ع_۲ ثہ_۲}{\sqrt{۶\pi}}$

جہاں ص = سوراخ کا نصف قطر

∴ حاصل کمیت جو بائیں جانب سے داہنی جانب فی ثانیہ گزرے گی =

$= ک_۲$ (فرض کرو)

$$= \frac{\pi ص^۲ ع}{\sqrt{۶\pi}} (ثہ_۱ - ثہ_۲)$$

$$= \frac{\pi ص^۲}{\sqrt{۶\pi}} \cdot \sqrt{\frac{۳لات}{ث}} (د_۱ - د_۲) \frac{ث}{لات} =$$

$$= \pi ص^۲ (د_۱ - د_۲) \sqrt{\frac{ث}{۲\pi لات}} \quad \text{..........} \quad (۳۰)$$

سوراخ کی اکائی برآمد "$ھ_۲$" پہلے کی طرح اب بھی (د ح) کے مساوی ہوگی جبکہ فرق دباؤ $(د_۱ - د_۲)$ ایک ڈائین فی مربع سمر کے مساوی ہو اور ح گیس کا وہ حجم ہو جو اوسط دباؤ د پر فی ثانیہ سوراخ سے برآمد ہو رہی ہے۔

$$\therefore ھ_۲ = د ح = \frac{ثہ لات}{ث} \cdot ح = \left(\frac{لات}{ث} \cdot ک_۲\right)_{(د_۱ - د_۲) = ۱}$$

مساوات (۳۰) سے :- $ھ_۲ = \frac{لات}{ث} \cdot \pi ص^۲ \sqrt{\frac{ث}{۲\pi لات}} =$

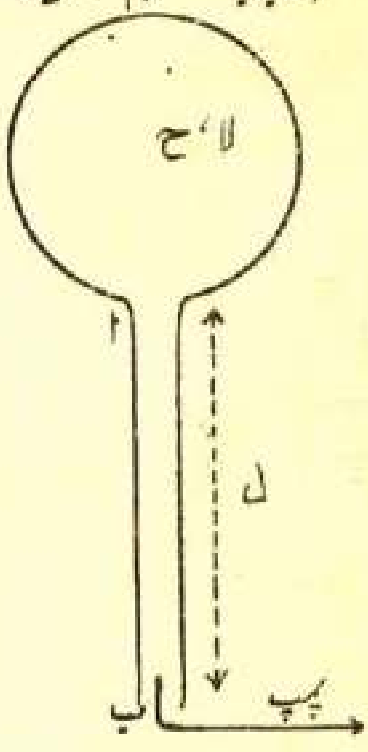
$$= \pi ص^۲ \sqrt{\frac{لات}{۲\pi ث}} = \pi ص^۲ \sqrt{\frac{۱}{۲\pi ثہ}}$$

جہاں ثہ = ایک ڈائین فی مربع سمر دباؤ کے متناظر کثافت۔ کلیہ اوم سے پہلے

کی طرح پھر مطابقت کی جائے تو سوراخ کی مزاحمت $= \frac{1}{\text{مم}} =$

$$= \frac{1}{\text{ص}^{3}\,\pi} \sqrt{2\,\pi\,\text{ث}} \quad \cdots\cdots\cdots (۳۱)$$

پمپ کی صورت میں ایک سادہ اطلاق :- فرض کرو کہ ایک برتن جس کا حجم ح ہے گیس سے بھرا ہوا ہے اور گائیڈے کے قسم کی پمپ سے ہم اس میں خلا پیدا کرنا چاہتے ہیں۔ شکل ۱۰۱ کے مطابق اس برتن کو نلی ا ب کے ذریعہ پمپ کے ساتھ جوڑ دیا گیا ہے۔



شکل ۱۰۱

فرض کرو کہ اس برتن میں دباؤ و ثانیوں کے بعد لا ہے اور پمپ د دباؤ پر چل رہا ہے اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ فرک گرام گیس اس برتن سے فرو ثانیہ میں خارج ہو رہی ہے تب

$$\text{ک}\,\text{فرو} = -\,\text{فرک} = -\,\text{فر}(\text{ثہ}\,\text{ح}) =$$

$$= -\,\text{ح}\,\text{فرثہ} = -\,\frac{\text{ح}\,\text{ث}}{\text{لات}}\,.\,\text{فرلا}$$

$$\text{یعنی}\; -\,\frac{\text{ح}\,\text{ث}}{\text{لات}}\,\text{فرلا} =$$

$$= \frac{\pi\,\text{ص}^{3}}{\text{ل}} \sqrt{\frac{\pi\,\text{ث}}{2\,\text{لات}}}\,(\text{لا} - \text{د})\,\text{فرو}$$

$$\therefore\; -\,\text{ح}\,\text{فرلا} = \frac{\pi\,\text{ص}^{3}}{\text{ل}} \sqrt{\frac{\pi}{2\,\text{ثہ}}}\,.\,(\text{لا} - \text{د})\,\text{فرو} = \text{مہ}(\text{لا} - \text{د})\,\text{فرو}$$

$$\therefore\; -\,\frac{\text{مہ}\,\text{فرو}}{\text{ح}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{لا} - \text{د}} = \frac{\text{فر}(\text{لا} - \text{د})}{(\text{لا} - \text{د})}$$

اس کو تکملانے سے $-\frac{\text{مہ و}}{\text{ح}} = \text{لوک}_{\text{و}}(\text{لا} - \text{د}) + \text{ج}$

جہاں ج = کوئی مستقل

فرض کرو کہ جب وقت و = صفر تو لا = لآ یعنی ابتدا میں گیس کا دباؤ لآ ہے۔ اس صورت میں ج = - لوک$_{\text{و}}$ (لآ - د)

$$\therefore -\frac{\text{مہ و}}{\text{ح}} = \text{لوک}_{\text{و}}\left(\frac{\text{لا} - \text{د}}{\text{لآ} - \text{د}}\right)$$

∴ برتن میں لآ دباؤ کو لا دباؤ تک لانے میں جو وقت صرف ہوا:—

$$\text{و} = \frac{\text{ح}}{\text{مہ}}\ ۲٫۳۰۲\ \text{لوک}_{۱۰}\left(\frac{\text{لآ} - \text{د}}{\text{لا} - \text{د}}\right) \ldots\ldots (۳۲)$$

لہذا اگر ح، مہ، لآ، لا اور د کی قیمتیں ہمیں معلوم ہو جائیں تو و دریافت کیا جا سکتا ہے۔ مساوات (۳۲) میں مہ کی قیمت درج کرنے سے:—

$$\text{و} = \frac{\text{ح ل}}{\pi\,\text{ص}^{۳}}\sqrt{\frac{۲\,\text{ش}}{\pi}}\ ۲٫۳۰۲\ \text{لوک}_{۱۰}\left(\frac{\text{لآ} - \text{د}}{\text{لا} - \text{د}}\right) \ldots\ldots (۳۳)$$

اس مساوات سے ظاہر ہے کہ اگر نلی کا نصف قطر ص بڑھا دیا جائے اور ل گھٹا دیا جائے تو د کی قیمت کم ہو جائے گی۔ یعنی اگر جلد خلا پیدا کرنا مطلوب ہو تو ص کو بڑھانا اور ل کو گھٹانا چاہیئے۔

ایک چھوٹی ٹونٹی جس کا طول لَ ہو اس نلی میں لگا دی جائے تو یہ دریافت کیا جا سکتا ہے کہ نلی کے طول پر ٹونٹی کی مزاحمت کا کیا اثر ہوتا ہے:—

فرض کرو کہ نلی کی مزاحمت = ایسی ٹونٹی کی مزاحمت جس کا قطر فَ ہے۔

یعنی $\frac{۸\,\text{ل}}{\pi\,\text{ف}^{۳}}\sqrt{\frac{۲\,\text{ش}}{\pi}} = \frac{۸\,\text{لَ}}{\pi\,\text{فَ}^{۳}}\sqrt{\frac{۲\,\text{ش}}{\pi}}$

جہاں ف = نلی کا قطر

$$\therefore \text{ل} = \text{لَ}\cdot\frac{\text{ف}^{۳}}{\text{فَ}^{۳}}$$

مثال کی طور پر اگر لَ = ۱ سمر اور ف = ۲ سمر اور فَ = ۰.۲ سمر تو نلی کا طول ل ہمیں ۱۰۰۰ سمر حاصل ہوگا۔

یعنی ۱۰۰۰ سمر طول کی نلی ایک چھوٹی سی ٹونٹی کے مماثل ہوتی ہے جس کا طول صرف ۱ سمر اور قطر ۰.۲ سمر ہوتا ہے۔ ظاہر ہے کہ اس قدر چھوٹی ٹونٹی کی وجہ سے نلی کے طول میں کافی اضافہ ہوجاتا ہے اس لئے اگر جلد خلا پیدا کرنا مقصود ہو تو اس کی بڑی احتیاط کرنی چاہیے کہ ٹونٹیاں حتی الامکان کم تعداد میں رکھی جائیں۔

پمپ کی رفتار:- شکل نمبر ۱ پر غور کرو۔ برتن سے گیس کی جتنی کمیت خارج ہوتی ہے وہ اس کمیت کے مساوی ہے جو پمپ میں داخل ہوتی ہے، لیکن چونکہ دباؤ مختلف ہیں اس لئے برتن سے نکلنے والی گیس کا حجم، پمپ میں داخل ہونے والے حجم کے مساوی نہیں ہوتا۔

فرض کرو کہ فرد ثانیہ میں د دباؤ پر فرح$_1$ مکعب سمر گیس پمپ میں داخل ہوتی ہے، اسکا مطلب یہ ہے کہ فرد ثانیہ میں فرح$_1$ مکعب سمر گیس پمپ کے ذریعہ باہر خارج کی جاتی ہے، اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ اسی وقفہ فرد میں فرح$_2$ مکعب سمر گیس دباؤ لا پر برتن سے باہر نکلتی ہے ظاہر ہے کہ موثر دباؤ (لا − د) کے لئے گیس کی مجموعی برآمد = مہ (لا − د) اور یہ اس حجم کے متناظر ہے جو فی ثانیہ باہر نکل رہا ہے۔

لہذا فرد ثانیوں میں مجموعی برآمد = مہ (لا − د) فرد

کلیہ بائیل سے لا فرح$_2$ = د فرح$_1$ = مہ (لا − د) فرد

گائیڈے کے مطابق پمپ کی حقیقی رفتار س$_1$ = $\frac{\text{فرح}_1}{\text{فرد}}$ اور ظاہری رفتار س$_2$ = $\frac{\text{فرح}_2}{\text{فرد}}$

∴ مہ (لا − د) = لا $\frac{\text{فرح}_2}{\text{فرد}}$ = $\frac{\text{د فرح}_1}{\text{فرد}}$ = لا س$_2$ = د س$_1$

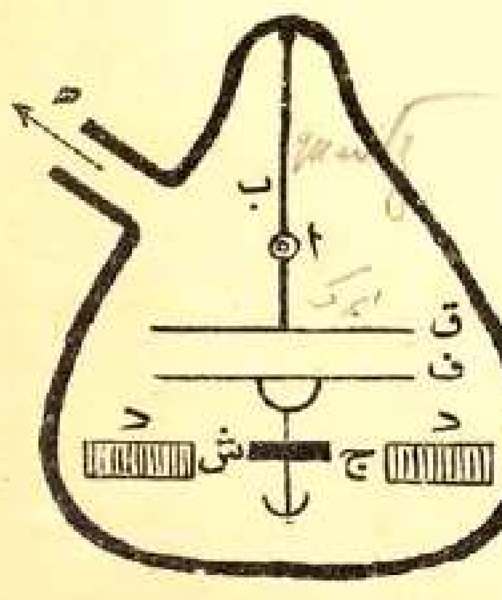
$$\therefore \frac{1}{ھ} = \frac{ل - د}{ل س_2} = \frac{1}{س_2} - \frac{د}{ل س_2} =$$

$$= \frac{1}{س_2} - \frac{د}{د س_1} = \frac{1}{س_2} - \frac{1}{س_1}$$

$$\therefore \frac{1}{س_2} = \frac{1}{ھ} + \frac{1}{س_1} \quad \text{.........} \quad (۴۴)$$

خفیف دباؤ کی پیمائش :- میکلاڈ داب پیما سے تقریباً ہر شخص واقف ہے، یہ کلیہ بائیل کے تحت کام کرتا ہے اور اس کو کئی شکلوں میں بنایا گیا ہے۔ ایک بڑی کارآمد شکل سنٹرل سائنٹفک کمپنی کے آلات کی فہرست میں دی گئی ہے، اس کے ذریعہ ۰۱ مم پارہ کے دباؤ کے رتبہ تک پارہ کی سطح کو پیچ کے ذریعہ ترتیب دینے کے انتظام کے ساتھ ناپا جاسکتا ہے اور بہت کارآمد ہے۔

ڈشمن کا سالمی داب پیما :- شکل ۱۱ میں ق ایک ابرک کا قرص ہے جو ایک کوارٹز کے ریشہ ب کے ذریعہ ایک شیشہ کے جوف کے اندر لٹکایا جاتا ہے۔ ف ایک اور قرص ہے جو گردشی مقناطیسی میدان کے ذریعہ فی منٹ دس ہزار چکروں تک گھمایا جاسکتا ہے۔ د اور د کچھے ہیں جو اس گردشی مقناطیسی میدان کو پیدا کرتے ہیں۔ ج اور ش ایک معمولی مقناطیس کے قطب ہیں اور ا ایک مستوی آئینہ ہے جس سے



شکل ۱۱

لٹکے ہوئے قرص ق کا انصراف معلوم کیا جاتا ہے۔ ھ ایک کھلا ہوا حصہ ہے جہاں خفیف دباؤ والی گیس کا برتن جوڑ دیا جاتا ہے۔ جب ف گھومتا ہے تو اوپر کے قرص پر لزوجی کھنچاؤ پیدا ہوتا ہے اور چنانچہ یہ کچھ زاویہ میں گھوم جاتا ہے جس کو ۲ سے منعکس شدہ ایک شعاع نور کے ذریعہ پڑھ لیا جاتا ہے۔ ق کے انصراف سے گیس کا دباؤ حسابی عمل سے دریافت کر لیا جاتا ہے۔ عملی طور پر ف اور ق کا درمیانی فاصلہ سالمات کے اوسط آزاد راستہ کے رتبہ کا ہوتا ہے۔

گنڈسن کے قول کے مطابق گیس کے سالمات متحرک مستوی سے چمٹ جاتے ہیں جس کی وجہ سے فی ثانیہ معیار حرکت میں تغیر واقع ہوتا ہے اور نیز متضاد سمت میں ایک مماسی قوت عمل کرنے لگتی ہے۔

مساوات (۲۷) سے مستوی کے فی مربع سمر رقبہ پر سالمات کی جو تعداد فی ثانیہ ٹکرائے گی

$$= \bar{\text{ع}} = \frac{\text{ع}\ \text{س}}{\sqrt{6\pi}}$$

∴ اس مستوی کے متوازی ان سالمات کا فی ثانیہ فی اکائی رقبہ معیار حرکت

$$= \frac{\text{ع}\ \text{س}}{\sqrt{6\pi}} \cdot \text{م}\ \bar{\text{س}} = \frac{\text{ثہ}\ \text{س}\ \bar{\text{س}}}{\sqrt{6\pi}} = \frac{\text{ث}\ \text{د}}{\text{لا}\ \text{ت}} \sqrt{\frac{3\ \text{لا}\ \text{ت}}{\text{ث}}} \cdot \frac{\bar{\text{س}}}{\sqrt{6\pi}}$$

$$= \bar{\text{س}}\ \text{د} \sqrt{\frac{\text{ث}}{2\pi\ \text{لا}\ \text{ت}}} \propto \text{مماسی قوت فی اکائی رقبہ}$$

جہاں $\bar{\text{س}}$ = اس گیس کی رفتار جو متحرک ہے

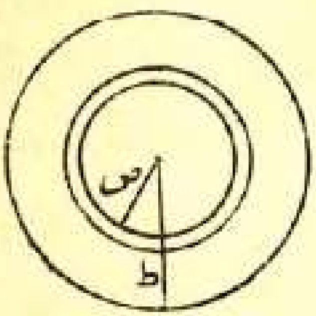
اور د = وہ دباؤ جس کی پیمائش مطلوب ہے۔

$$\therefore \text{مماسی قوت فی اکائی رقبہ} = \text{گ}\ \bar{\text{س}}\ \text{د} \sqrt{\frac{\text{ث}}{2\pi\ \text{لا}\ \text{ت}}} \quad \text{.........} (۳۵)$$

جہاں گہ = ایک مستقل جس کی قیمت بیشتر گیسوں کے لئے ایک کے مساوی ہے۔

فرض کرو کہ قرص ف کی زاوی رفتار کلا کے مساوی ہے اور اس کا نصف قطر ط ہے۔

قرص میں ایک چھوٹا حلقہ مرکز سے ص فاصلہ پر ایسا لو کہ اس کی موٹائی فص کے مساوی ہو (شکل ۱۲)



شکل ۱۲

اس حلقہ کا رقبہ = ۲ π ص فص

∴ اس حلقہ پر مماسی قوت =

$$= 2\pi\,\text{ص}\,\text{تہ}\,\text{د}\,\text{فص}\sqrt{\frac{\text{ٹ}}{2\pi\,\text{لات}}}$$

$$= 2\pi\,\text{ص}\,\text{فص}\,\text{ص}\,\text{کلا}\,\text{د}\sqrt{\frac{\text{ٹ}}{2\pi\,\text{لات}}}$$

اس کے محور کے گرد جفت $= 2\pi\,\text{ص}^3\,\text{کلا}\,\text{د}\sqrt{\frac{\text{ٹ}}{2\pi\,\text{لات}}}\cdot\text{فص}$

∴ اس پورے قرص کی وجہ سے جفت =

$$\int_{\text{صفر}}^{\text{ط}} 2\pi\,\text{ص}^3\,\text{کلا}\,\text{د}\sqrt{\frac{\text{ٹ}}{2\pi\,\text{لات}}}\cdot\text{فص}$$

$$= 2\pi\,\text{کلا}\,\text{د}\sqrt{\frac{\text{ٹ}}{2\pi\,\text{لات}}}\cdot\frac{\text{ط}^4}{4} = \text{مہ}\,\text{عہ}$$

جہاں مہ = پیچیدگی کا جفت فی اکائی زاویہ اور عہ = زاویۂ انحراف

$$\therefore\ \text{عہ} = \frac{\pi\,\text{کلا}\,\text{د}}{2\,\text{مہ}}\sqrt{\frac{\text{ٹ}}{2\pi\,\text{لات}}}\cdot\text{ط}^4 \quad \text{..........} \quad (۳۶)$$

لیکن $\text{و}_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\text{مجہ}}{\text{مہ}}}$ جہاں و_1 = اس قرص کا وقت دوران

اور مجہ = اس قرص کے جمود کا معیار اثر

پس ہم اِن دونوں مساواتوں کے ذریعہ د کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔
اس داب پیما کے ذریعہ ہم $۱۰^{-۷}$ ممر پارہ کے دباؤ کے رتبہ تک ناپ سکتے ہیں۔ امریکہ میں یہ طریقہ اب تک رائج ہے۔
اس آلہ میں کسی دھاتی قرص کے عوض ابرک کا قرص ق استعمال کرنے کی غایت صرف یہ ہے کہ ایڈی رَوؤں کو نہ پیدا ہونے دیا جائے جن سے قرص کی حرکت پر زبردست اثر پڑتا ہے

اہتزازی قرص کا طریقہ:۔ اس طریقہ میں ایک ابرک کا قرص کوارٹز کے ریشہ کے ذریعہ دو قرصوں کے درمیان اہتزاز کرنے کے لئے لٹکایا جاتا ہے اور اس پورے انتظام کو شکل ۱۱ کے قریب قریب ایک شیشہ کے جوفہ میں رکھا جاتا ہے۔
تخفیف دباؤ والی گیس کے برتن کو جوفہ سے جوڑ دینے کے بعد وقت دوران اور لوکارثمی تنزل دریافت کر لیا جائے تو خفیف دباؤ د کی قیمت حسابی عمل سے معلوم کی جاسکتی ہے۔
اگر کسی وقفہ فرو میں قرص کا زاویۂ انصراف فرعہ ہے تو زاویٔ رفتار $\omega = \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرو}}$۔ جیسا کہ شکل ۱۳ میں بتلایا گیا تھا، حلقہ کا رقبہ =

$$= ۲\pi\,\text{ص فرص}$$

$$\text{اور اس حلقہ پر مماسی قوت} = \text{مں د}\sqrt{\frac{\text{ث}}{۲\pi\,\text{لات}}}\cdot ۲\pi\,\text{ص فرص}$$

$$= \text{ص}\,\frac{\text{فرعہ}}{\text{فرو}}\cdot \text{د}\sqrt{\frac{\text{ث}}{۲\pi\,\text{لات}}}\cdot ۲\pi\,\text{ص فرص}$$

$$\text{سکے محور کے گرد جفت} = ۲\pi\,\text{ص}^{۳}\,\text{فرص}\cdot\frac{\text{فرعہ}}{\text{فرو}}\cdot \text{د}\sqrt{\frac{\text{ث}}{۲\pi\,\text{لات}}}$$

∴ اس پورے قرص کی وجہ سے جفت =

$$= \int_{\text{صفر}}^{\text{ط}} 2\pi \frac{\text{فر عہ}}{\text{فر و}}\, \text{د} \sqrt{\frac{\text{ث}}{2\pi \text{لات}}} \,.\, \text{ص}^3 \,\text{فر ص}$$

$$= \frac{\pi}{2} \,.\, \text{د}\, \frac{\text{فر عہ}}{\text{فر و}} \sqrt{\frac{\text{ث}}{2\pi \text{لات}}} \,.\, \text{ط}^4$$

جہاں ط = قرص کا نصف قطر

اب چونکہ سالمات اس قرص کے دونوں طرف ٹکراتے ہیں اس لئے

قسر کی وجہ سے پورا جفت $= \pi\, \text{د} \,.\, \frac{\text{فر عہ}}{\text{فر و}} \sqrt{\frac{\text{ث}}{2\pi \text{لات}}} \,.\, \text{ط}^4$

$= \text{گ}\, \frac{\text{فر عہ}}{\text{فر و}}$ جہاں $\text{گ} = \pi\, \text{د} \sqrt{\frac{\text{ث}}{2\pi \text{لات}}} \,.\, \text{ط}^4$

تعادل کے لئے حرکت کی مساوات حسب ذیل ہوگی :-

$$\text{مج}\, \frac{\text{فر}^2 \text{عہ}}{\text{فر و}^2} + \text{گ}\, \frac{\text{فر عہ}}{\text{فر و}} + \text{مہ}\, \text{عہ} = \text{صفر}$$

اس تفرقی مساوات کو حل کرنے سے :-

$$\text{عہ} = \text{ا}\, \text{ھو}^{-\frac{\text{گ و}}{2\,\text{مج}}}\, \text{جم} \left(\sqrt{\frac{\text{مہ}}{\text{مج}} - \frac{\text{گ}^2}{4\,\text{مج}^2}} \,.\, \text{و} + \text{ب} \right) \quad \ldots\ldots (۳۷)$$

جہاں ا اور ب مستقل ہیں۔

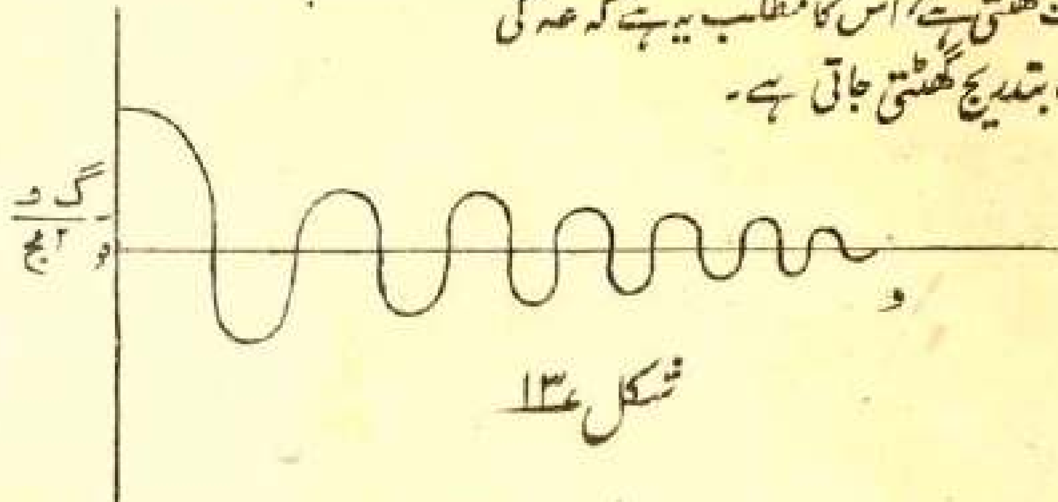
یہ ایک سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے۔ اسلئے وقت دوران

$$\text{و}_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\text{مہ}}{\text{مج}} - \frac{\text{گ}^2}{4\,\text{مج}^2}}} \quad \ldots\ldots (۳۸)$$

اگر ہمیں و_1، مہ اور مج کی قیمتیں معلوم ہوجائیں تو گ دریافت کیا

جاسکتا ہے اور پھر د کی قیمت آسانی کے ساتھ نکالی جاسکتی ہے۔

مساوات (۳۷) میں $\text{ا و}^{-\frac{\text{گ و}}{\text{۲ مج}}}$ حیطۂ ارتعاش کو تعبیر کرتا ہے۔ اگر ہم د کو $\text{و}^{-\frac{\text{گ و}}{\text{۲ مج}}}$ کے مقابلہ میں مرتسم کریں تو ایک ایسا منحنی حاصل ہوتا ہے جو شکل ۱۳ میں دکھایا گیا ہے۔ اس منحنی سے یہ ظاہر ہے کہ د کی قیمت بڑھنے سے حیطۂ ارتعاش کی قیمت گھٹتی ہے، اس کا مطلب یہ ہے کہ عم کی قیمت بتدریج گھٹتی جاتی ہے۔



شکل ۱۳

فرض کرو کہ شعاع نور جو آئینہ سے منعکس ہو کر آتی ہے جب پیمانہ کے ایک جانب حرکت کرتی ہے تو انصراف عم_1 بنتا ہے اور پیمانہ کے اسی جانب ایک کامل وقت دوران کے بعد انصراف عم_2 ہوتا ہے۔ تب :-

$$\frac{\text{عم}_1}{\text{عم}_2} = \frac{\text{و}^{-\frac{\text{گ}}{\text{۲ مج}}\cdot \text{لا و}_1}}{\text{و}^{-\frac{\text{گ}}{\text{۲ مج}}(\text{لا}+1)\,\text{و}_1}} = \text{و}^{\frac{\text{گ}}{\text{۲ مج}}\cdot \text{و}_1}$$

جہاں لا = کوئی کسر

$$\therefore \text{لوک}_{\text{و}}\frac{\text{عم}_1}{\text{عم}_2} = \frac{\text{گ و}_1}{\text{۲ مج}} = \text{مستقل} = \text{فہ} = \text{لوکارثمی تنزل}$$

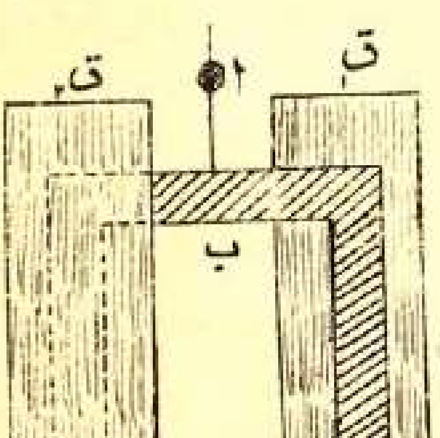
$$\therefore \text{فہ} = \frac{\text{و}_1}{\text{۲ مج}}\cdot \pi\,\text{د}\,\sqrt{\frac{\text{ث}}{\text{۲}\pi\,\text{لا ت}}}\cdot \text{ط}^2 \quad \text{..........}\ (\text{۳۹})$$

اگر ن، ق، مج وغیرہ کی قیمتیں معلوم ہوں تو د کی قیمت حسابی طریقہ سے دریافت کی جاسکتی ہے

اس طریقہ سے ۱۰ آٹھ پارہ کے دباؤ کے رتبہ تک کی قیمت دریافت کی جاسکتی ہے اور ڈاکٹر شا نے اسکو استعمال بھی اسی کیلئے کیا تھا۔

کنڈسن کا داب پیما:۔ سنہ ۱۹۱۱ء میں کنڈسن نے کسی قدر خلا دار جوف میں گرم اور سرد تختیوں کو رکھنے کے بعد ان کے درمیان جو دفع کی قوت سالمی تصادم کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے اُس کو حسابی طریقہ سے دریافت کیا۔ اگر دو ایسی تختیاں اس طرح متوازی رکھی جائیں کہ ان کے درمیان فاصلہ سالمات کے اوسط آزاد راستہ سے چھوٹا ہو تو تختیوں کے درمیان ایک دفع کی قوت عمل کرتی ہے جو گیس کے زیر غور دباؤ کے متناسب ہوتی ہے۔

شکل ۱۴۲ پر غور کرو، ق۱ اور ق۲ دو مستطیلی ثابت تختیاں ہیں جن کو کسی ذریعہ سے مثلاً برقی طریقہ سے گرم کیا جاتا ہے۔ ب ایک سرد مستطیلی تختی ہے جس کو کوارٹز کے ریشہ کے ذریعہ لٹکا دیا جاتا ہے اور اس کے ساتھ ایک مستوی آئینہ ا لگا ہوتا ہے۔ جب اس قسم کی ترتیب کو ایک لطیف گیس میں رکھا جاتا ہے (یعنی ایسی گیس میں جسکے سالمات ایک دوسرے سے بہت دور دور پر ہوں) تو سالمی دفعہ کی قوت تختی ب میں انحراف پیدا کرتی ہے۔ اس انحراف کو آئینہ ا اور شعاع نور کے ذریعہ ناپا جاسکتا ہے۔



شکل ۱۴۲

فرض کرو کہ ت۱ اور ت۲ بالترتیب

ق اور ب کی تپشیں ہیں اور ع' فی مکعب سمر سالمات کی وہ تعداد ہے جو ق سے ب تک $س_۲$ جذر اوسط مربع رفتار سے حرکت کر رہے ہیں۔

اسی طرح یہ بھی فرض کرو کہ ع' سالمات کی وہ تعداد فی مکعب سمر ہے جو ب سے ق کی طرف $س_۱$ جذر اوسط مربع رفتار سے متحرک ہیں۔

تعادل کے لئے، سالمات کی وہ تعداد جو فی ثانیہ فی مربع سمر سطح سے ٹکراتے ہیں مساوی ہونی چاہیے۔

$$\text{یعنی}\quad \frac{ع_۱ س_۱}{\sqrt{۶\pi}} = \frac{ع_۲ س_۲}{\sqrt{۶\pi}} \qquad \text{یعنی}\quad ع_۱ س_۱ = ع_۲ س_۲$$

اگر پوری گیس کو $ت_۲$ تپش پر رکھا جائے اور سالمات کی تعداد فی مکعب سمر، ق اور ب کی درمیانی فضا کے باہر ع ہو، تو تعادل کیلئے فی ثانیہ فی مربع سمر، ق اور ب کی درمیانی فضا سے باہر جانے والے سالمات کی تعداد، ان سالمات کی تعداد کے مساوی ہونا چاہیئے جو فی ثانیہ فی مربع سمر ق اور ب کی درمیانی فضا میں گزرتے ہیں۔

$$\text{یعنی}\quad \frac{ع_۱ س_۱}{\sqrt{۶\pi}} + \frac{ع_۲ س_۲}{\sqrt{۶\pi}} = \frac{ع س_۲}{\sqrt{۶\pi}}$$

$$\text{یعنی}\quad ع_۱ س_۱ + ع_۲ س_۲ = ع س_۲$$

$$\therefore\quad ع_۱ س_۱ = ع_۲ س_۲ = \frac{ع س_۲}{۲} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۴۰)$$

اگر حاصل دفع کی قوت جو تختی کے اکائی رقبہ پر عمل کرتی ہے ق ہو اور $(د_۱ + د_۲)$ تختیوں کے درمیان مجموعی دباؤ کی قیمت ہو اور گیس کے برتن میں دباؤ د ہو تو:—

$$ق = د_۱ + د_۲ - د = \frac{۱}{۳} ث_۱ س_۱^۲ + \frac{۱}{۳} ث_۲ س_۲^۲ - \frac{۱}{۳} ث س_۲^۲$$

جہاں ثہ، ثہ$_{١}$ اور ثہ$_{٢}$ بالترتیب کثافتوں کو تعبیر کرتے ہیں۔

$$\therefore \text{ق} = \tfrac{١}{٣}\text{م}\,\text{ع}_{١}\text{س}_{١}^{٢} + \tfrac{١}{٣}\text{م}\,\text{ع}_{٢}\text{س}_{٢}^{٢} - \tfrac{١}{٣}\text{م}\,\text{ع}\,\text{س}^{٢} =$$

$$= \frac{\text{م}}{٣}\left(\text{ع}_{١}\text{س}_{١}^{٢} + \text{ع}_{٢}\text{س}_{٢}^{٢} - \text{ع}\,\text{س}^{٢}\right)$$

$$= \frac{\text{م}}{٣}\left(\text{ع}_{١}\text{س}_{١}^{٢} + \text{ع}_{٢}\text{س}_{٢}^{٢} - ٢\,\text{ع}_{٢}\text{س}_{٢}^{٢}\right) = \frac{\text{م}}{٣}\left(\text{ع}_{١}\text{س}_{١}^{٢} - \text{ع}_{٢}\text{س}_{٢}^{٢}\right)$$

$$= \frac{\text{م}}{٣}\left(\frac{\text{ع}_{١}\text{س}_{١}^{٢}}{\text{ع}_{٢}\text{س}_{٢}^{٢}} - ١\right)\text{ع}_{٢}\text{س}_{٢}^{٢} = \frac{\text{م}\,\text{ع}\,\text{س}_{٢}^{٢}}{٢\times٣}\left(\frac{\text{س}_{١}}{\text{س}_{٢}} - ١\right) =$$

$$= \frac{\text{ثہ}\,\text{س}_{٢}^{٢}}{٦}\left(\frac{\text{س}_{١}}{\text{س}_{٢}} - ١\right)$$

لیکن یہ ہم جانتے ہیں کہ $\sqrt{\text{ت}_{١}} \propto \text{س}_{١}$ اور $\sqrt{\text{ت}_{٢}} \propto \text{س}_{٢}$

$$\therefore \text{ق} = \frac{\text{د}}{٢}\left(\sqrt{\frac{\text{ت}_{١}}{\text{ت}_{٢}}} - ١\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٤١)$$

کُنڈسن نے اس اصول کو اپنے داب پیما میں استعمال کیا۔ اس داب پیما کے ذریعہ $١٠^{-٦}$ مم پارہ کے دباؤ تک کی قیمت بالراست معلوم کی جا سکتی ہے۔

اینگر نے ۱۹۱۳ء میں اس اصول کے عمل کا ایک مختصر سا خاکہ دیا تھا۔

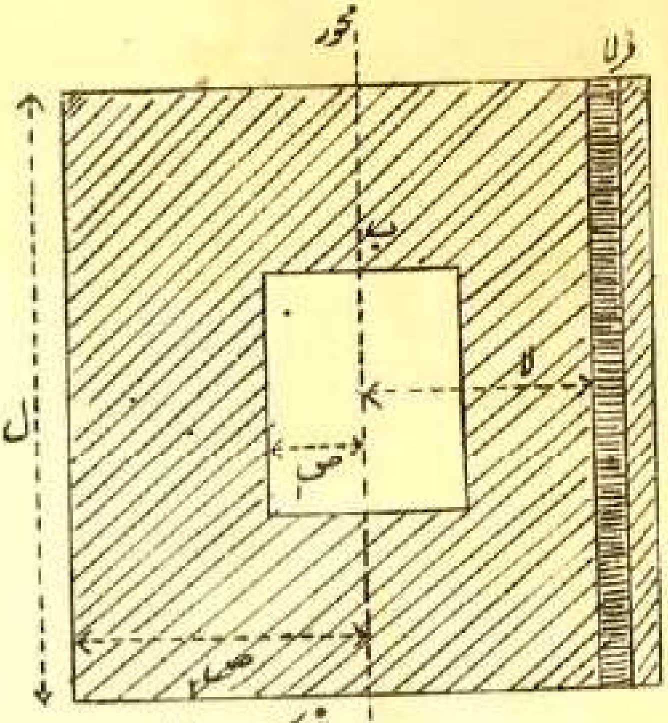
اگر ت$_{١}$ اور ت$_{٢}$ میں فرق کچھ زیادہ بڑا نہ ہو تو $\text{ق} = \frac{\text{د}}{٤}\left(\frac{\text{ت}_{١} - \text{ت}_{٢}}{\text{ت}_{٢}}\right)$

ہاڈ نے اس ضابطہ کو تقریبی طور پر ۱۹۱۹ء میں حاصل کیا تھا۔

اب فرض کرو کہ ص$_{١}$ اور ص$_{٢}$ محورِ تعلیق سے ب کے انتصابی ضلعوں کے فاصلے ہیں۔ اور ل انتصابی ضلع کا طول ہے جیسا کہ شکل ۱۵ میں بتایا گیا ہے۔

تختی میں ایک دھجی "فرلا" موٹائی کی محور سے لا فاصلہ پر لو۔

تب اس دھجی پر قوت = ق ل فرلا اور اس پر جو جفت عمل کرتا ہے وہ



شکل ۱۵

= ق ل فرلا . لا
دونوں ضلعوں کو زیر بحث
لیتے ہوئے پوری تختی کی
وجہ سے جفت =

$$= \int_{ص_1}^{ص_2} 2\, ق\, ل\, لا\, فرلا = مہ\, عہ$$

جہاں عہ = انصرافِ اور مہ
= پیچیدگی کا جفت فی اکائی
زاویہ

$$\therefore ق\, ل\, (ص_2^2 - ص_1^2)$$
$$= مہ\, عہ \quad ....(۴۲)$$

مساوات (۴۱) اور (۴۲) سے :-

$$\frac{د}{2}\left(\frac{ت_1}{ت_2}-1\right) ل\, (ص_2^2 - ص_1^2) = مہ\, عہ \quad ....(۴۳)$$

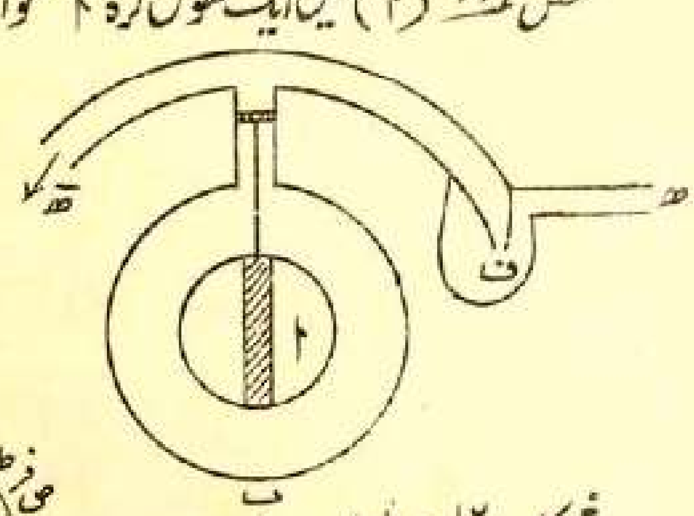
اب اگر تختی کا وقت دوران $د_1$ ہو تو $د = 2\pi\sqrt{\frac{مج}{مہ}}$
جہاں مج = تختی کے جمود کا معیار اثر محور تعلیق کے گرد
لہٰذا مہ کی قیمت معلوم کرنے کے بعد مساوات (۴۳) سے د کی قیمت
حسابی طریقہ سے حاصل کی جاسکتی ہے گو گیس کی نوعیت نامعلوم رہے۔
۱۹۱۴ء میں جے۔ ڈبلیو وڈرو نے (۶) اسی اصول پر تختیوں کے درمیان
..۱ مم کی فرق تپش سے ایک داب پیما بنایا۔ اس نے گرم تختی کے لئے
پلاٹینم کی پٹیاں استعمال کیں اور تختی کو برقی طریقہ سے گرم کیا۔ متحرک مستطیلی
تختی ایلومینیم کی تھی، اس نے تپشوں کو گرم پٹیوں کی برقی مزاحمت کی رقوم
میں، تو وہ پیما استعمال کر کے، حسابی عمل سے حاصل کیا، خفیف دباؤ حاصل

کرنے کے لئے مائع ہوائیں کوئلہ استعمال کیا گیا تھا۔ اس کا دعویٰ ہے کہ متعدد گیسوں کو استعمال کر کے اس نے $۱۰^{-۶}$ مم پارہ کے رتبہ کا دباؤ ناپا ہے۔

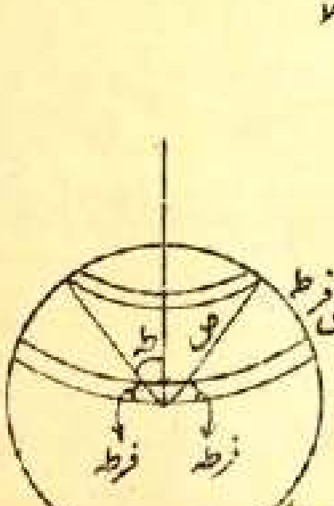
۱۹۱۸ء میں جے۔ ای۔ شریڈر اور آر۔ جی۔ شیراوڈ نے کنڈسن کے داب پیما میں بڑی حد تک حساسیت پیدا کرنے میں کامیابی حاصل کی۔ داب پیما کو ایک سخت شیشہ کی نلی میں بند کر دیا گیا جس کا قطر ۲" اور طول ۹" تھا، پلاٹینم کی گرم پٹیوں کا طول ۱۸ سمر عرض ۵ر۷ مم اور موٹائی ۰۱۸ر۰ مم تھی، متحرک مستطیلی تختی جو ایلومنیم کی تھی ۲ر۳ سمر لمبی ۴ سمر چوڑی اور ۰۰۷ر۰ سمر موٹی تھی۔ متحرک تختی اور گرم پٹیوں کا درمیانی فاصلہ مقناطیسی گرفت کے ذریعہ باہر سے مرتب کیا گیا تھا۔ تعلیق ٹنگسٹن کے تار سے کی گئی تھی۔ ان دونوں نے بھی پلاٹینم کی تپشی قدر معلوم رکھ کر اوڈررڈ کی طرح پٹیوں کی تپش برقی مزاحمت کی رقوم میں حاصل کی۔ ان کا دعویٰ ہے کہ انھوں نے $۱۰^{-۹}$ مم پارہ کے رتبہ کا دباؤ ناپا ہے۔

کنڈسن کے طریقے سے گیس کے سالمی وزن کی دریافت :-

شکل ۱۶ (ا) میں ایک ٹھوس کرہ ا کو ارٹز کے ریشہ کے ذریعہ



شکل ۱۶ (ا)



شکل ۱۶ (ب)

ایک اور کھوکھلے کرہ ب میں لٹکایا گیا ہے۔ کرہ ا کو جس کے وسطی حصہ میں موٹی پلاطنیم کی پٹی لگی ہوئی ہے دائری سمت میں مقناطیسی ذرائع سے اہتزاز کرنے کے لئے مجبور کیا جاتا ہے۔ ا اور ب کے درمیان فاصلہ تقریباً ۵ ممر کا ہوتا ہے۔ ف ایک مائع ہوا کا پھندا ہے جو سالمات کو گرفتار کر لیتا ہے۔ ھ کے ساتھ ایک سالمی پمپ جوڑا جاتا ہے جس سے حسب خواہش خفیف دباؤ ا اور ب کے درمیان پیدا کیا جا سکتا ہے۔ ھ پر ایک دابپیما جوڑا جاتا ہے جس کی مدد سے ا اور ب کے درمیان گیس کا دباؤ معلوم کیا جا سکتا ہے۔ کرہ ا کو اہتزاز میں لا کر وقت دوران اور لوگارثمی تنزل دریافت کر لیا جاتا ہے۔

کرہ ا کو جس کا نصف قطر ص ہے چھوٹے چھوٹے منطقوں یا پٹوں میں تقسیم کرو۔ ایک ایسا پٹہ شکل ۱۶۷ (ب) میں دکھایا گیا ہے۔

اگر وقفہ فرو میں فرعہ انصراف پیدا ہو تو اس پٹہ کی خطی رفتار تسا =

$$= \text{ص جب ط}\ \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرو}}$$

مساوات (۳۵) سے اس پٹہ پر مماسی قوت =

$$= 2\pi\ \text{ص}^{2}\ \text{جب ط فرط تر د}\ \sqrt{\frac{\text{ث}}{2\pi\ \text{لات}}}$$

چونکہ پٹہ کا رقبہ $= 2\pi\ \text{ص . جب ط . ص فرط}$

∴ اس پٹہ پر قوتوں کا معیار اثر =

$$= 2\pi\ \text{ص}^{3}\ \text{جب}^{2}\ \text{ط فرط تر د}\ \sqrt{\frac{\text{ث}}{2\pi\ \text{لات}}}$$

لہذا پورا جفت =

$$\int_{\text{صفر}}^{\pi} 2\pi\ \text{ص}^{3}\ \text{جب}^{2}\ \text{ط ص جب ط}\ \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرو}}\ .\ \text{فرط د}\ \sqrt{\frac{\text{ث}}{2\pi\ \text{لات}}}$$

$$= \frac{8}{3}\,\pi\,\text{ص}^{4}\,\text{د}\,\frac{\text{فرعہ}}{\text{فرو}}\sqrt{\frac{\text{ث}}{2\pi\,\text{لات}}} = \text{گ}\,\frac{\text{فرعہ}}{\text{فرو}}$$

جہاں $\text{گ} = \frac{8}{3}\,\pi\,\text{ص}^{4}\,\text{د}\sqrt{\frac{\text{ث}}{2\pi\,\text{لات}}}$

تعادل کے لئے حرکت کی مساوات حسب ذیل ہوگی :-

$$\text{مج}\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{عہ}}{\text{فرو}^{2}} + \text{گ}\,\frac{\text{فرعہ}}{\text{فرو}} + \text{مہ}\,\text{عہ} = \text{صفر}$$

جہاں مج = کرہ کے جمود کا معیار اثر قطر کے گرد، اور مہ = پیچیدگی کا جفت فی اکائی زاویہ۔

اس تفرقی مساوات کو حل کرنے سے :-

$$\text{عہ} = \text{ا}\,\text{و}^{-\frac{\text{گ}\,\text{و}}{2\,\text{مج}}}\,\text{جم}\left(\sqrt{\frac{\text{مہ}}{\text{مج}} - \frac{\text{گ}^{2}}{4\,\text{مج}^{2}}}\,.\,\text{و} + \text{ب}\right)$$

جہاں ا اور ب مستقل ہیں۔

چونکہ یہ ایک سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے۔

$$\therefore\ \text{وقت دوران}\ \text{و}_{1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\text{مہ}}{\text{مج}} - \frac{\text{گ}^{2}}{4\,\text{مج}^{2}}}}$$

اگر ہم $\text{و}^{-\frac{\text{گ}\,\text{و}}{2\,\text{مج}}}$ کو و کے مقابل مرتسم کریں تو ایک منحنی حاصل ہوتا ہے جو شکل ۱۳ میں دکھایا گیا ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ وقت جوں جوں بڑھتا ہے تو حیطۂ ارتعاش گھٹتا ہے۔

پہلے کی طرح، اگر پیمانہ کی داہنی جانب انصراف عہ_{1} ہو اور ایک کامل وقت دوران کے بعد اسی جانب انصراف عہ_{2} ہو تو $\frac{\text{عہ}_{1}}{\text{عہ}_{2}} = \text{و}^{\frac{\text{گ}\,\text{و}_{1}}{2\,\text{مج}}}$

یعنی لوک $\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} = \frac{\text{گ}\ \text{و}_1}{2\ \text{مج}}$ = فہ = لوکارتمی تنزل

گ کی قیمت درج کرنے سے :-

$$\text{فہ} = \frac{8}{3}\pi\,\text{ص}^2\,\text{د}\sqrt{\frac{\text{ث}}{2\pi\,\text{لا}\,\text{ت}}}\cdot\frac{\text{و}_1}{2\,\text{مج}} \quad \text{.......... (۴۴)}$$

اگر فہ، و اور مج وغیرہ معلوم ہوں تو د حسابی عمل سے دریافت کیا جاسکتا ہے

مساوات (۴۴) سے :-

$$\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرد}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\text{ص}^2}{\text{مج}}\sqrt{\frac{2\pi\,\text{ث}}{\text{لا}\,\text{ت}}}\cdot\text{و}_1 = \text{مستقل}$$

$$\therefore \text{ث} = \frac{9}{8}\cdot\frac{\text{لا}\,\text{ت}\,\text{مج}^2}{\pi\,\text{و}_1^2\,\text{ص}^4}\left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرد}}\right)^2 \quad \text{.......... (۴۵)}$$

د کی قیمت بدل بدل کر فہ کی متناظر قیمتیں معلوم کرلی جاتی ہیں اس طرح $\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرد}}$ کی قیمت دریافت ہوجاتی ہے، اس کے بعد مساوات (۴۵) سے گیس کا سالمی وزن ث نکل جاتا ہے۔

آکسیجن کے لئے کنڈسن نے ث کی قیمت ۳۱ء۹ کے مساوی دریافت کی تھی۔

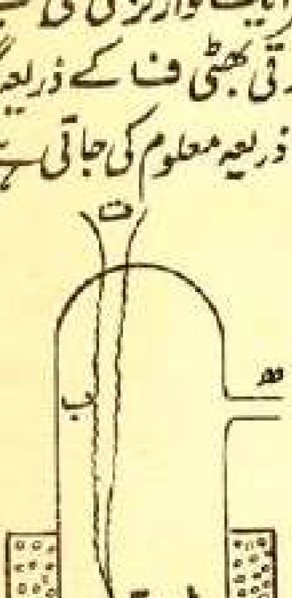
دھاتوں کا بخاری دباؤ:- اگرٹن نے بعض دھاتوں مثلاً جست، کیڈمیم، سیسہ اور سوڈیم وغیرہ کے بخاری دباؤ کی قیمتیں، سوراخوں میں سے گیسوں کے بہاؤ کے کنڈسن والے اصول کی تحت دریافت کی تھیں[۹]۔

۱۹۲۵ء میں ہارٹنگ نے اسی اصول کو استعمال کرکے، ایسے دھاتوں کے بخاری دباؤ دریافت کئے جن کے نقطہ جوش بہت اونچے ہوتے ہیں مثلاً سونا، چاندی، تانبا وغیرہ۔

ہارٹنگ اور اگرٹن کے طریقے عملی طور پر یکساں ہیں۔ اول الذکر نے خصوصاً تپش کی پیمائش کے لئے ایک نہایت حساس طریقہ اختیار کیا۔ موخر الذکر نے، دھاتوں کو گرم کرنے کے لئے تانبے کا ایک بڑا سا گرم کنندہ استعمال کیا تھا گو ہارٹنگ نے اس غرض کے لئے برقی بھٹی استعمال کی تھی۔

یہاں ہارٹنگ کے طریقے کا بیان خالی از دلچسپی نہ ہوگا:۔

شکل ۱۷۱ میں ایک چھوٹی کوارٹز کی کٹھالی ا بتائی گئی ہے جس میں دھات رکھ دی جاتی ہے۔ اس کٹھالی کے ڈھکن میں ایک بالکل چھوٹا سا سوراخ ہوتا ہے۔ کٹھالی کو پہلے وزن کر لیا جاتا ہے اور پھر ایک کوارٹز کی نلی ب کے اندر رکھا جاتا ہے اور اس نلی کا نچلا سرا برقی بھٹی ف کے ذریعہ گرم کیا جاتا ہے۔ کٹھالی کی تپش حر برقی جفت ت کے ذریعہ معلوم کی جاتی ہے۔



شکل ۱۷۱

بازو میں ایک نلی ھ لگی ہوتی ہے جس کے ذریعہ نلی ب میں پمپ کے ذریعہ اعلیٰ درجہ کا خلا پیدا کیا جا سکتا ہے۔ خلا پیدا کرنے کے بعد ہارٹنگ نے مطلوبہ تپش تک نلی کو گرم کیا اور چند گھنٹوں تک اسکو مستقل رکھا۔ اس نے پھر کٹھالی کو ٹھنڈا کر کے تول لیا۔ کٹھالی کے نقصان وزن سے اس دھاتی بخار کا وزن معلوم ہو گیا جو ایک خاص وقت میں سوراخ میں سے نکل آئی۔

مساوات (۳۰) سے، اگر سوراخ میں سے باہر کی فضا میں نکل آنے والی فی ثانیہ بخار کی کمیت $\text{ک}_{۲}$ ہو تو

$$\text{ک}_{۲} = \pi\, \text{ص}^{۲}\, \text{د}_{۱} \sqrt{\frac{\text{ع}}{۲\pi\, \text{لا}\, \text{ت}}}$$

چونکہ نلی ب میں اعلیٰ درجہ کا خلا پیدا کیا گیا ہے اس لئے $\text{د}_{۲}$ عملاً صفر کے

مساوی ہے۔

$$\therefore د_۱ = \frac{ک}{\pi ص^۲} \sqrt{\frac{۲\pi لا ت}{ع}} \quad \text{..................} (۴۶)$$

اس طرح $د_۱$ یعنی بخاری دباؤ کی قیمت معلوم کی جاتی ہے۔ ص کی قیمت سوراخ کے فوٹو بڑے پیمانہ پر لیکر دریافت ہو سکتی ہے۔

لینگمویر[۹] نے ۱۹۱۳ء میں ایک اور طریقہ بخاری دھاتوں مثلاً ٹنگسٹن، پلاٹینم وغیرہ کے بخاری دباؤ کی دریافت کا بیان کیا تھا۔ ٹنگسٹن کا ایک پتلا سا ریشہ جس کا طول تقریباً ۱۰ سم تھا ایک خلادار جوفہ میں رکھا گیا اور برقی رو کے ذریعہ اس کو گرم کیا گیا۔ ایک معلوم وقت تک تپش مستقل رکھی گئی۔ گرم کرنے کے دوران میں ظاہر ہے کہ ریشہ سے بخار کے سالمات خارج ہو کر جوفہ کے دیواروں پر چونکہ اس کا دباؤ خفیف ہے منجمد ہوتے ہیں۔ اب جوفہ کو توڑ کر ریشہ کو ایک حساس ترازو میں تول لیا جاتا ہے۔ اگر ریشہ کا ابتدائی وزن معلوم ہو تو نقصان وزن معلوم ہو جاتا ہے۔

مساوات (۲۷) سے فی ثانیہ جوفہ کی سطح کے اکائی رقبہ کو ٹکرانے والے سالمات کی تعداد $= \frac{ع\, ر}{\sqrt{\pi ۶}}$ تعادل کے لئے بخار کی اس کمیت کا جو فی ثانیہ اکائی رقبہ کی سطح سے ٹکراتی ہے، اس بخار کی کمیت ک کے مساوی ہونا ضروری ہے جو ریشہ کے اکائی رقبہ سے فی ثانیہ خلا میں پیدا ہوتی ہے

اور یہ کمیت $ک = \frac{ع\, ر\, م}{\sqrt{\pi ۶}}$ جہاں م = ایک سالمہ کی کمیت

اگر بخار کی کثافت ث ہو تو $ک = \frac{ث\, ر}{\sqrt{\pi ۶}} = \frac{د\, ع}{لا ت} \sqrt{\frac{۳ لا ت}{ع}} \cdot \frac{۱}{\sqrt{\pi ۶}} =$

$$= د \sqrt{\frac{ع}{۲\pi لا ت}} \quad \text{..................} (۴۷)$$

لہٰذا اگر ک معلوم ہو تو بخاری دباؤ د آسانی سے دریافت کیا جا سکتا ہے۔
فرض کرو کہ گرم کرنے کے قبل اکائی طول کے تار کا وزن ک_1 ہے اور ٹنگسٹن کے تار کی کثافت ث ہے اور نیز گرم کرنے کے قبل تار کا نصف قطر ص_1 کے مساوی ہے۔ و ثانیوں تک گرم کرنے کے بعد جب وہ سرد کر کے تولا جاتا ہے تو فرض کرو اکائی طول کے تار کا وزن ک_2 اور نصف قطر ص_2 ہوتا ہے۔

$$\therefore \text{ک}_1 = \pi\, \text{ص}_1^2\, \text{ث} \quad \text{اور} \quad \text{ک}_2 = \pi\, \text{ص}_2^2\, \text{ث}$$

$$\therefore \text{ص}_1 = \sqrt{\frac{\text{ک}_1}{\pi\, \text{ث}}} \quad \text{اور} \quad \text{ص}_2 = \sqrt{\frac{\text{ک}_2}{\pi\, \text{ث}}}$$

ریشہ کے اکائی طول میں سے فی ثانیہ جو کمیت کم ہو جاتی ہے وہ =

$$= \frac{\text{فرک}_1}{\text{فرو}} = 2\pi\, \text{ث}\, \text{ص}_1 \frac{\text{فرص}_1}{\text{فرو}}$$

∴ ریشہ کے اکائی رقبہ سے فی ثانیہ جس کمیت کا نقصان ہوتا ہے

$$= \text{ک} = \text{ث} \frac{\text{فرص}_1}{\text{فرو}} = \frac{1}{2\pi\, \text{ص}_1} \cdot \frac{\text{فرک}_1}{\text{فرو}}$$

$$\therefore \text{مجموعی وقت و کے لئے} \int_{\text{صفر}}^{\text{و}} \text{ک فرو} = \int_{\text{ص}_2}^{\text{ص}_1} \text{ث فرص}$$

$$\text{یعنی ک} = \frac{\text{ث}(\text{ص}_1 - \text{ص}_2)}{\text{و}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{ث}}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\text{ک}_1} - \sqrt{\text{ک}_2}}{\text{و}}$$

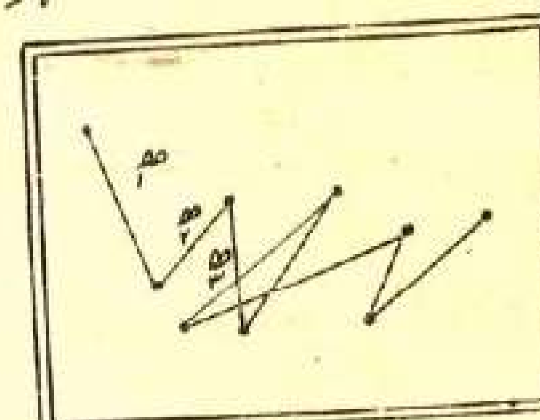
مساوات (۴۷) سے:-

$$\text{د} \sqrt{\frac{\text{ث}}{2\pi\, \text{لا ت}}} = \sqrt{\frac{\text{ث}}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\text{ک}_1} - \sqrt{\text{ک}_2}}{\text{و}} \quad \text{........ (۴۸)}$$

اس طرح د کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہے۔

تجربہ میں ٹنگسٹن کے لئے د کی قیمت جبکہ تپش ت ٢٤٠٠° مطلق تھی، ٢ر٤٩ × ١٠^{-٩} مم پارہ کے دباؤ کے مساوی نکلی۔ جبکہ ت ٣٠٠٠° مطلق تھی تو د کی قیمت ٦٢ر٣ × ١٠^{-٤} مم پارہ کے دباؤ کے مساوی حاصل ہوئی۔

سالمات کا اوسط آزاد راستہ:— ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی گیس کے سالمات معمولی تپش پر بڑی زبردست رفتاروں کے ساتھ حرکت کرتے رہتے ہیں وہ ایک دوسرے سے ٹکراتے بھی ہیں اور ان کی حرکت کی سمتیں بدلتی بھی رہتی ہیں۔ دو متواتر تصادم کے درمیان کسی ایک سالمہ کا راستہ خط مستقیم ہوتا ہے۔ لہذا کسی ایک سالمہ کا راستہ متعدد تصادم کے بعد بے قاعدہ یا آڑے ترچھے خطوط مستقیم پر مشتمل ہوتا ہے جیسا کہ شکل ۱۸ میں دکھایا گیا ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ بعض راستے زیادہ لمبے اور بعض چھوٹے ہوتے ہیں۔



شکل ۱۸

اگر ہم ھ۱، ھ۲، ھ۳ .... راستوں کی بڑی تعداد کے طولوں کو جمع کریں اور حاصل جمع کو راستوں کی مجموعی تعداد ع سے تقسیم کریں تو حاصل مقدار سالمات کا اوسط آزاد راستہ ھ کہلاتا ہے۔

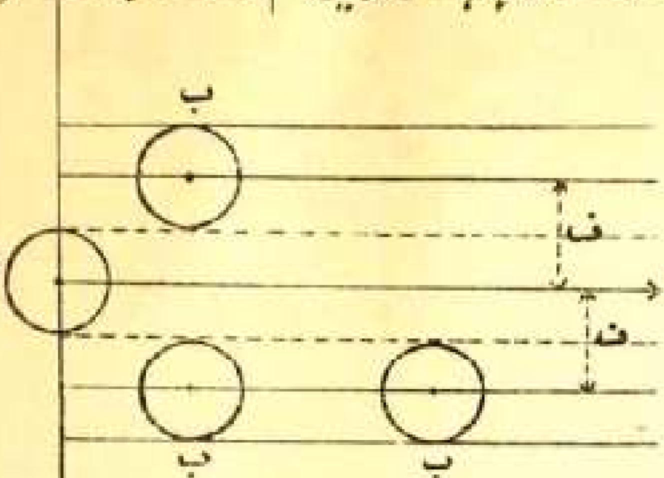
یعنے

$$ھ = \frac{ھ_1 + ھ_2 + ھ_3 + \cdots\cdots}{ع}$$

$$= \frac{\text{کل طے شدہ فاصلہ ایک ثانیہ میں}}{\text{تعداد تصادم فی ثانیہ}}$$

فرض کرو کہ شکل ۱۹ میں ا ایک سالمہ ہے جس کا قطر ف ہے اور یہ

لا سمت میں س رفتار سے حرکت کر رہا ہے، اور دیگر تمام سالمات جن کے قطر بھی یہی ہیں اپنی جگہ پر قائم ہیں۔ نیز یہ بھی فرض کرو کہ یہ سالمہ ا، ب سالمات کو چھوتا ہوا گزرتا ہے۔



شکل ۱۹

∴ تعداد تصادم فی ثانیہ = تعداد سالمات جن کے مرکز اس حجم یعنی $\pi\, ف^2\, س$ کے اندر واقع ہیں $= \pi\, ف^2\, س\, ع$

[چونکہ ع = تعداد سالمات فی مکعب سم]

$$\therefore ھ = \frac{\text{طے شدہ فاصلہ ایک ثانیہ میں}}{\text{تعداد تصادم فی ثانیہ}} = \frac{س}{\pi\, ف^2\, س\, ع} = \frac{1}{\pi\, ف^2\, ع}$$

$$\therefore \text{اوسط آزاد راستہ } ھ = \frac{1}{\pi\, ف^2\, ع} = \frac{م}{\pi\, ف^2\, ثہ}$$

$$= \frac{م\, لا\, ت}{\pi\, ف^2\, د} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (۴۹)$$

جہاں ثہ = گیس کی کثافت

م = ایک سالمہ کی کمیت

اور د = دباؤ

لیکن اوپر کے نتائج بالکل صحیح اس وجہ سے نہیں ہیں کہ ہم نے یہ فرض کیا ہے کہ دیگر سالمات متحرک نہیں ہیں۔

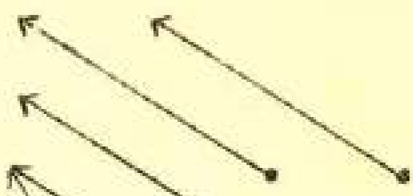
کلائیشیس نے اس لئے یہ فرض کیا کہ تمام سالمات بھی اسی رفتار سے حرکت کرتے ہیں اور چنانچہ اس خطا کو اسی قسم کی ایک اور مساوات حاصل کر کے رفع کیا۔

اگر سَا = سالمہ کی اضافی رفتار بلحاظ دوسرے سالمات کے اور

سا = تمام سالمات کی اوسط رفتار تو

$$\text{ھ} = \frac{\text{سا}}{\pi\ \text{ف}^{2}\ \text{ع}\ \text{سَا}} \quad \text{(۵۰)}$$

عام صورت کے لئے فرض کرو کہ ایک سالمہ ا رفتار سا سے ایسی فضا میں پھینکا جاتا ہے جس میں ع سالمات فی مکعب سم موجود ہیں اور یہ تمام اس سالمہ کی سمت حرکت سے زاویہ عہ بناتے ہوئے ایک سمت میں حرکت کر رہے ہیں جیسا کہ شکل ۲۰ میں دکھایا گیا ہے۔ فرض کرو کہ اس پھینکے ہوئے سالمہ کی اضافی رفتار سَا ہے بلحاظ ایکدوسرے سالمہ ب کے جس کی رفتار سا۲ ہے۔



شکل ۲۰

تب $\text{سَا}^{2} = \text{سا}^{2} + \text{سا}_{2}^{2} - 2\ \text{سا}\ \text{سا}_{2}\ \text{جم عہ}$

اگر حقیقی طور پر دیکھا جائے تو رفتار سا۲ کے لئے تمام سمتیں مساوی طور پر ممکن ہیں۔ لہذا سَا کی اوسط قیمت دریافت کرنے کے لئے ہمیں سَا کو اس احتمال سے ضرب دینا ہوگا جو کہ سا۲ رفتار، عہ اور عہ + فرعہ کے درمیانی مجسّم زاویہ میں واقع ہوتی ہے۔

لیکن اس مجسّم زاویہ کی قیمت جو کُل یعنے ع سالمات فی مکعب سم کے لئے پوری فضا میں ہوگی ۴ π کے مساوی ہے۔ مجسم زاویہ جو عہ اور عہ + فرعہ کے درمیان واقع ہونے والی سمت کے متناظر ہے ۲ π جب عہ فرعہ کے

مساوی ہے۔

∴ ان سالمات کی تعداد فی مکعب سمر جو عہ اور عہ + فرعہ کے درمیان واقع ہونے والی سمت میں آتے ہیں $= \frac{\text{ع}}{۴\pi} \cdot ۲\pi \, \text{جب عہ فرعہ}$

∴ احتمال فی مکعب سمر ابات کا، کہ رفتار $\text{سا}_۱$ عہ اور عہ + فرعہ کے درمیان واقع ہونے والے مجسم زاویہ کے اندر رہے گی $= \frac{\text{ع}}{۲} \, \text{جب عہ فرعہ}$

∴ احتمال فی سالمہ کہ $\text{سا}_۲$ رفتار عہ اور عہ + فرعہ کے درمیان واقع ہونے والے مجسم زاویہ کے اندر ہوگی $= \frac{\text{جب عہ فرعہ}}{۲}$

∴ تر کی اوسط قیمت $= \text{تر} \, \frac{\text{جب عہ فرعہ}}{۲}$

∴ تر کی اوسط قیمت بلحاظ دیگر سالمات $= \overline{\text{تر}} = \int_{\text{صفر}}^{\pi} \text{تر} \, \frac{\text{جب عہ فرعہ}}{۲}$

$$\therefore \overline{\text{تر}} = \int_{\text{صفر}}^{\pi} \frac{\text{جب عہ فرعہ}}{۲} \cdot \sqrt{\text{سا}_۱^۲ + \text{سا}_۲^۲ - ۲\,\text{سا}_۱\,\text{سا}_۲\,\text{جم عہ}}$$

$$= \left\{ \frac{۱}{۶\,\text{سا}_۱\,\text{سا}_۲} \left(\text{سا}_۱^۲ + \text{سا}_۲^۲ - ۲\,\text{سا}_۱\,\text{سا}_۲\,\text{جم عہ} \right)^{\frac{۳}{۲}} \right\}_{\text{صفر}}^{\pi}$$

$$= \frac{۱}{۶\,\text{سا}_۱\,\text{سا}_۲} \left(\text{سا}_۱^۲ + \text{سا}_۲^۲ \right)^{\frac{۳}{۲}}$$

کلاوشیس کے مفروضہ کے مطابق، چونکہ تمام سالمات ایک ہی رفتار سے حرکت کر رہے ہیں۔ لہٰذا $\text{سا}_۱ = \text{سا}_۲ = \text{سا}$

$$\therefore \overline{\text{تر}} = \frac{(۲\,\text{سا})^۳}{۶\,\text{سا}^۲} = \frac{۴}{۳}\,\text{سا} \quad \text{یعنی} \quad \frac{\text{سا}}{\overline{\text{تر}}} = \frac{۳}{۴}$$

مساوات (۵۰) میں $\frac{\text{سا}}{\overline{\text{تر}}}$ کی قیمت لکھنے سے:-

$$\text{ھ} = \frac{۳}{۴\pi\,\text{ف}^۲\,\text{ع}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۵۱)$$

بعد میں میکسول نے رفتاروں کی تقسیم کے کلیہ سے حسب ذیل نتیجہ حاصل کیا[۵۰]۔

$$ھ = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi\, ف^2\, ع} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵۲)$$

اس کے بعد جینس نے یہ فرض کرتے ہوئے کہ سالمات سخت لچکدار کرے ہیں حسب ذیل مساوات حاصل کی :-

$$ھ = \frac{۱٫۳۱۹}{\sqrt{2}\,\pi\, ف^2\, ع} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵۳)$$

لیکن چیپمن نے اپنا ضابطہ اس طرح پیش کیا :-

$$ھ = \frac{۱٫۴۰۲}{\sqrt{2}\,\pi\, ف^2\, ع} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵۴)$$

سدرلینڈ نے یہ فرض کرتے ہوئے کہ سالمات کے درمیان' بین السالماتی قوتیں یا تجاذبی قوتیں کسی خاص کلیہ کے تحت عمل کرتی ہیں' سالماتی قطر کے لئے ایک ضابطہ اخذ کیا[۱]۔ اگر تجاذبی قوتیں عمل پیرا ہوتی ہیں تو سالمات ایکدوسرے سے قریب تر ہو جاتے ہیں اور اس طرح ان میں تصادم کا امکان بڑھ جاتا ہے لہذا ان کا اوسط آزادراستہ گھٹ جاتا ہے۔ اس نقطۂ نظر سے سدرلینڈ کی تصحیح' اوسط آزادراستہ کے لئے حاصل کرنے کی کوشش کی جائے گی :-

سدرلینڈ کا ضابطہ اخذ کرنے کے قبل ہم چند ابتدائی باتیں سمتیوں کے متعلق یہاں بیان کردینا ضروری سمجھتے ہیں۔ طلباء کو چاہیئے کہ ان کو یاد رکھیں۔

ہر شخص یہ جانتا ہے کہ ایسی مقادیر جو سمت رکھتے ہیں مثلاً فاصلہ' رفتار' قوت وغیرہ سمتی مقادیر کہلاتے ہیں۔ جن مقادیر میں سمت نہیں ہوتی وہ مقداری کہلاتی ہیں کسی ایک سمتی کی ترسیمی طریقہ سے تعبیر ایک خط مستقیم سے ہوتی ہے' الجبری طریقہ سے اس کی تعبیر ایک علامت سے ہوتی ہے جس کے نیچے ایک چھوٹی سی لکیر کھینچ دی جاتی ہے۔ اگر دو سمتیاں ع اور ی ایک دوسرے سے زاویہ ط بناتے ہوں جیسا کہ شکل ۲۱ میں دکھایا گیا ہے

تو حاصل جمع ج = ع + ب

ب ۸ ع اگر لکھا جائے تو اس کا مطلب یہ ہے کہ سمتی ع کو سمتی طور پر سمتی ب سے ضرب دیا گیا ہے۔
اس حاصل ضرب کو مقداری میں لکھنے سے :-



شکل ۲۱ع

ع ۸ ب = ع. ب جب ط = (اس مثلث کا رقبہ) × ۲

∴ مثلث کا رقبہ = $\frac{۱}{۲}$ ع ۸ ب .... (۵۵)

اگر ب ۸ ع = صفر تو ط = صفر، اس کا مطلب یہ ہے کہ ع منطبق ہو جاتی ہے ب سے، اسکے معنی یہ ہوں گے کہ ع ۸ ع = صفر

∴ ع ۸ ع = صفر .... (۵۶)

اب قوت کے معکوس مربع کے کلیہ سے :-

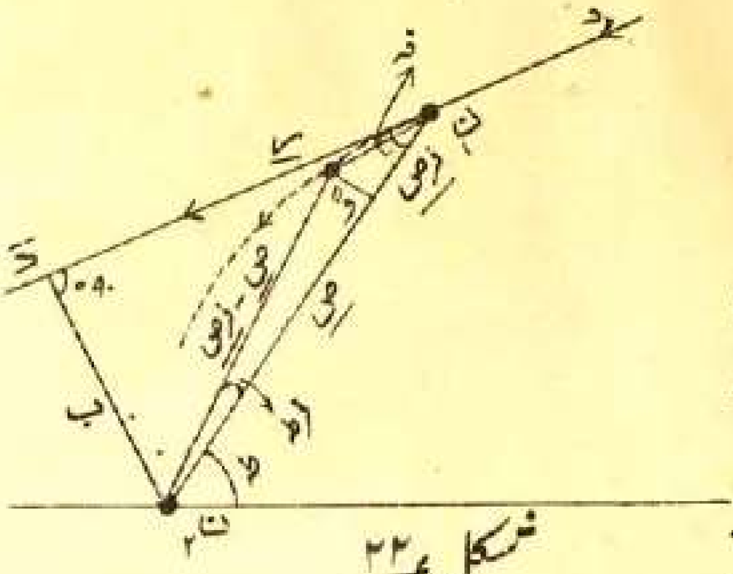
قوت ق ∝ $\frac{م^۲}{ص^۲}$ جہاں م = ایک ذرہ کی کمیت اور ص = دونوں ذرات کے درمیان فاصلہ لیکن ہم یقین کے ساتھ یہ نہیں کہہ سکتے کہ کلیہ بالا میں ص^۲ کے بجائے، ص^۳ یا ص^۴ وغیرہ تو نہیں ہے۔ اسلئے سدرلینڈ نے یہ فرض کیا کہ دو ذرات کے درمیان تجاذبی قوت ق ہے جو م^۲ ف ($\frac{۱}{ص}$) کے متناسب ہے جہاں ف سے مطلب کوئی تفاعل ہے۔

∴ قوت کا صحیح کلیہ حسب ذیل ہوگا :-

ق = مہ م^۲ ف ($\frac{۱}{ص}$) .... (۵۷)

جہاں مہ = کوئی مستقل

فرض کرو کہ کسی خاص وقت میں ن۱ اور ن۲ دو ذرات کے مقامات ہیں اور ان کے درمیان فاصلہ ص ہے۔ ن۱ ذرہ ابتدا میں ر۱ رفتار کیساتھ د سے نکلتا ہے اور د د سمت میں چلنے لگتا ہے لیکن تھوڑی دیر کے بعد



ذرّہ ن۲ کی کشش کی وجہ سے اس کو ایک منحنی کی وضع کا راستہ اختیار کرنا پڑتا ہے جیسا کہ نقطہ دار خط سے شکل ۲۲ میں ظاہر کیا گیا ہے۔

شکل ۲۲

چنانچہ وہ ایک مثلث ن۱ ک ن۲ کا رقبہ بناتے ہوئے نیچے اُترتا ہے۔ اگر ن۲ کی کشش نہ ہوتی تو ذرہ ن۱ سپ رفتار کے ساتھ د د کا راستہ اختیار کرتا۔

فرض کرو کہ ذرہ ن۱ فرو وقت میں فرص فاصلہ طے کیا یعنی فرو وقت کے بعد ن۱ اور ن۲ کا درمیانی فاصلہ (ص۱ − فرض) ہے۔ ایسی صورت میں وہ رقبہ جو ذرہ نے فرو وقت میں بنایا مساوات (۵۵) سے = فرا (فرض کرو)

$$= \frac{1}{2}\ \text{ص}\ \wedge\ (\text{ص} - \text{فرص})$$

$$\therefore\ \text{فرا} = \frac{1}{2}\left\{\text{ص}\ \wedge\ \text{ص} - \text{ص}\ \wedge\ \text{فرص}\right\}$$

∴ مساوات (۵۶) سے :-

$$\text{فرا} = -\frac{1}{2}\ \text{ص}\ \wedge\ \text{فرص}$$

$$\therefore\ \text{سطحی رفتار} = \frac{\text{فرا}}{\text{فرو}} = -\frac{1}{2}\ \text{ص}\ \wedge\ \frac{\text{فرص}}{\text{فرو}}$$

$$= -\frac{1}{2}\ \text{ص}\ \wedge\ \dot{\text{ص}}\qquad \text{جہاں}\ \dot{\text{ص}} = \frac{\text{فرص}}{\text{فرو}}$$

اب چونکہ رفتار مستقل ہے لہذا عرضی اسراع صفر ہے

$$\therefore\ \text{ص}\ \wedge\ \dot{\text{ص}} = -2\ \dot{\text{ا}} = \text{مستقل} = \text{ج فرض کرو}$$

جہاں $\hat{\text{ا}} = \frac{\text{فر ا}}{\text{فر و}}$

$\therefore \text{ج} = \overline{\text{ص}} \wedge \hat{\text{ص}} = \overline{\text{ص}} \wedge \overline{\text{ر}}$ .... (۵۸)

فرض کرو کہ ن پ 5 رفتار کی سمت پر عمود کھینچا گیا ہے اور اسکا طول = ب

تو $\text{ج} = \overline{\text{ص}} \wedge \overline{\text{ر}} = \text{ص} . \text{ر} \text{ جب فہ} = \text{ب ر}$ .... (۵۹)

جہاں فہ = $\overline{\text{ص}}$ اور $\overline{\text{ر}}$ کا درمیانی زاویہ

اب اگر $\overline{\text{ص}}$ اور افقی سمت کے درمیان زاویہ طہ ہو تو

$\frac{\text{فر ص}}{\text{ص فر طہ}} = \text{مم فہ}$ لیکن $\frac{\text{ص}}{\text{ب}} = \text{قم فہ}$ یعنی $\frac{\text{ص}^۲}{\text{ب}^۲} = \text{قم}^۲ \text{ فہ} = ۱ + \text{مم}^۲ \text{ فہ}$

$$\therefore \frac{\text{ص}^۲}{\text{ب}^۲} = ۱ + \left(\frac{\text{فر ص}}{\text{ص فر طہ}}\right)^۲ \quad \text{.............. (۶۰)}$$

اب فرض کرو کہ $\frac{۱}{\text{ص}} = \text{ن}$ یعنی ن ص = ۱

اسکو تفرقانے سے $\frac{\text{ن فر ص}}{\text{فر طہ}} + \frac{\text{ص فر ن}}{\text{فر طہ}} = \text{صفر}$

یعنی $\frac{۱}{\text{ص}} . \frac{\text{فر ص}}{\text{فر طہ}} + \frac{۱}{\text{ن}} . \frac{\text{فر ن}}{\text{فر طہ}} = \text{صفر}$

$$\therefore \frac{۱}{\text{ص}^۲} . \left(\frac{\text{فر ص}}{\text{فر طہ}}\right)^۲ = \frac{۱}{\text{ن}^۲} \left(\frac{\text{فر ن}}{\text{فر طہ}}\right)^۲ \quad \text{......... (۶۱)}$$

لہذا مساوات (۶۰) اور (۶۱) سے:-

$$\frac{\text{ص}^۲}{\text{ب}^۲} - ۱ = \frac{۱}{\text{ن}^۲} \left(\frac{\text{فر ن}}{\text{فر طہ}}\right)^۲ \quad \text{یعنی} \quad \frac{۱}{\text{ب}^۲} = \frac{۱}{\text{ص}^۲} + \frac{۱}{\text{ص}^۲ \text{ن}^۲} \left(\frac{\text{فر ن}}{\text{فر طہ}}\right)^۲$$

$$\therefore \frac{\text{١}}{\text{ب}^2} = \text{ن}^2 + \left(\frac{\text{فرن}}{\text{فزط}}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{٦٢})$$

اب مساوات (٥٧) کی مدد سے سالمہ کی توانائی بالقوہ =

$$= -\text{م مہ} \int \text{ف} \left(\frac{\text{١}}{\text{ص}}\right) \text{فرص} = -\text{م مہ} \int \text{ف (ن)} \frac{\text{فرن}}{\text{ن}^2}$$

لیکن توانائی بالفعل + توانائی بالقوہ = مستقل = گ فرض کرو

$$\therefore \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{م سر}^2 - \text{م مہ} \int \text{ف (ن)} \frac{\text{فرن}}{\text{ن}^2} = \text{گ}$$

مساوات (٥٩) اور (٦٢) کی مدد سے :-

$$\text{سر}^2 = \frac{\text{ج}^2}{\text{ب}^2} = \text{ج}^2 \left\{ \text{ن}^2 + \left(\frac{\text{فرن}}{\text{فزط}}\right)^2 \right\}$$

$$\therefore \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{م ج}^2 \left\{ \text{ن}^2 + \left(\frac{\text{فرن}}{\text{فزط}}\right)^2 \right\} =$$

$$= \text{م مہ} \int \text{ف (ن)} \frac{\text{فرن}}{\text{ن}^2} + \text{گ}$$

$$\therefore \text{ن}^2 + \left(\frac{\text{فرن}}{\text{فزط}}\right)^2 = \frac{\text{٢مہ}}{\text{ج}^2} \int \text{ف (ن)} \frac{\text{فرن}}{\text{ن}^2} + \text{گَ}$$

$$\text{جہاں گَ} = \frac{\text{٢گ}}{\text{م ج}^2} = \text{مستقل}$$

$$\therefore \frac{\text{١}}{\text{ب}^2} = \frac{\text{سر}^2}{\text{ج}^2} = \frac{\text{٢مہ}}{\text{ج}^2} \text{فَ (ن)} + \text{گَ}$$

$$\text{جہاں فَ (ن)} = \int \text{ف (ن)} \frac{\text{فرن}}{\text{ن}^2} \ \text{فرض کرو اور گَ = کوئی}$$

دوسرا مستقل

$$\text{اب جبکہ ص} = \infty \ \text{تو ن = صفر} \ \therefore \text{گَ} = \frac{\text{سر}^2}{\text{ج}^2}$$

$$\therefore\ \text{ن}^{2} + \left(\frac{\text{فن}}{\text{فط}}\right)^{2} = \frac{\text{۲مہ۴}}{\text{ج}^{2}}\,\text{فَ}(\text{ن}) + \frac{\text{س}^{2}}{\text{ج}^{2}} \quad \text{.......}\ (\text{۶۳})$$

لیکن جبکہ ص = ف = سالمہ کا قطر، اس صورت میں سالمات صرف چھوتے ہوئے گزرتے ہیں لہذا وہ صرف مماسی رفتار رکھتے ہیں یعنی اس کے معنی یہ ہیں کہ $\frac{\text{فص}}{\text{فو}} = \text{صفر}$

اس لئے جبکہ ص = ف تو

$$\frac{\text{فن}}{\text{فط}} = \frac{\text{فر}\left(\frac{1}{\text{ص}}\right)}{\text{فط}} \cdot \frac{\text{فرو}}{\text{فو}} = \frac{\text{فر}\left(\frac{1}{\text{ص}}\right)}{\text{فص}} \cdot \frac{\text{فص}}{\text{فو}} \cdot \frac{\text{فو}}{\text{فط}} = \text{صفر}$$

$$\therefore\ \frac{1}{\text{ف}^{2}} = \frac{\text{۲مہ۴}}{\text{ج}^{2}}\,\text{فَ}\left(\frac{1}{\text{ف}}\right) + \frac{\text{س}^{2}}{\text{ج}^{2}} =$$

$$= \frac{\text{۲مہ۴}}{\text{ب}^{2}\,\text{س}^{2}}\,\text{فَ}\left(\frac{1}{\text{ف}}\right) + \frac{1}{\text{ب}^{2}}$$

$$\therefore\ \text{ب}^{2} = \text{ف}^{2}\left\{\frac{\text{۲مہ۴}\,\text{فَ}\left(\frac{1}{\text{ف}}\right)}{\text{س}^{2}} + 1\right\} \quad \text{..........}\ (\text{۶۴})$$

چونکہ جاذبی قوتوں کی وجہ سے سالمات ایک منحنی راستہ اختیار کر رہے ہیں اس لئے تعداد تصادم فی ثانیہ = تعداد سالمات جن کے مرکز π ب² س کے اندر واقع ہیں

$$= \pi\ \text{ب}^{2}\ \text{س}\ \text{ع}$$

یعنی کشش کی وجہ سے مرکزوں کے درمیان اعظم فاصلہ ف نہیں ہے بلکہ ب ہے۔

پس اگر ہم چیپمن کا ضابطہ لیں تو صحیح ضابطہ حسب ذیل ہوگا:۔

$$\text{ھ} = \frac{\text{۱٫۴۰۲}}{\overline{\text{۲ط}}\ \overline{\pi}\ \text{ع}\ \text{ف}^{2}\left\{1 + \frac{\text{۲مہ۴}\,\text{فَ}\left(\frac{1}{\text{ف}}\right)}{\text{س}^{2}}\right\}}$$

$$= \frac{۱ر۴۰۳}{\sqrt{۲}\ \pi\ ع\ ف^{۲} \left\{ ۱ + \frac{۲ صہ ۴ ف \left(\frac{۱}{ف}\right) ئ}{\sqrt{۳}\ ت} \right\}}$$

$$= \frac{۱ر۴۰۳}{\sqrt{۲}\ \pi\ ع\ ف^{۲} \left(۱ + \frac{س}{ت} \right)} \quad \text{......}(۶۵)$$

جہاں $س = \frac{۲ صہ ۴ ف \left(\frac{۱}{ف}\right) ئ}{\sqrt{۳}} =$ سدرلینڈ کا مستقل

اوسط آزاد راستہ اور لزوجت (۱۲) :۔ میکسول پہلا شخص ہے جس نے اس مظہر کی گیسوں کے نظریۂ تحرک کے نقطۂ نظر سے تشریح کرنے کی کوشش کی۔

لزوجیت اور اوسط آزاد راستہ میں جو ربط ہے ہم اس کو ایک آسان طریقہ سے ثابت کرنے کی کوشش کریں گے۔

فرض کرو کہ ایک گیس کسی مستوی لا ٔیا کے متوازی حرکت کر رہی ہے۔ اس کے سالمات کی رفتار کسی متناظر پرت کے لئے فرض کرو کہ ایک ہی ہے اور جوں جوں فاصلہ ما بڑھتا جاتا ہے یعنی پرتوں کی تعداد میں اضافہ ہوتا ہے سالمات کی رفتار میں بھی بتدریج اضافہ ہوتا جاتا ہے۔ اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ سالمی رفتاروں میں دو ایسے پرتوں کی وجہ سے جن کے درمیان فاصلہ "فرما" ہے، فرق "فرسا" کے مساوی ہے۔

اس صورت میں دو ایسے پرتوں کے لئے جن کے درمیان فاصلہ ھ یعنی سالمات کے آزاد اوسط راستہ کے مساوی ہو سالمی رفتاروں میں فرق ھ $\frac{فرسا}{فرما}$ کے مساوی ہوگا۔ لہٰذا معیار حرکت میں تبدیلی فی سالمہ م ھ $\frac{فرسا}{فرما}$ کے مساوی ہوگی جہاں م سے مراد ایک سالمہ کی کمیت۔

چونکہ ان سالمات کی تعداد کا جو "لا" محور کی جانب حرکت کرتے ہیں، ان سالمات کی تعداد کے تقریباً مساوی ہونا ضروری ہے جو "ما" یا "یا"

محور کی جانب حرکت کرتے ہیں

لہذا اگر لا محور کی جانب ہی کی حرکت پر غور کیا جائے تو $\frac{\text{ع}}{3}$ سالمات کو ہم اس محور کے متوازی حرکت کرتے ہوئے لے سکتے ہیں جہاں ع سالمات کی تعداد فی مکعب سمر ہے۔ پس کسی ایک پرت کے اکائی رقبہ میں سے فی ثانیہ گزرنے والے سالمات کی تعداد $\frac{\text{ع}\,\bar{\text{س}}}{3}$ کے مساوی ہوگی جہاں $\bar{\text{س}}$ حسابی اوسط رفتار ہے۔ لہذا فی مربع سمر رقبہ میں فی ثانیہ معیار حرکت کی مجموعی تبدیلی

$$= \frac{1}{3}\,\text{ع}\,\bar{\text{س}}\,\text{م}\,\text{ھ}\,\frac{\text{فرس}}{\text{فرما}}$$

اس کا مطلب یہ ہے کہ فی اکائی رقبہ وہ قوت جو تیز حرکت کرنے والی پرت کی رفتار میں گھٹاؤ پیدا کرنے کی کوشش کرتی ہے

$$= \frac{1}{3}\,\text{ع}\,\bar{\text{س}}\,\text{م}\,\text{ھ}\,\frac{\text{فرس}}{\text{فرما}}$$

لیکن لزوجیت لہ کی تعریف سے یہ قوت فی اکائی رقبہ $\text{لہ}\,\frac{\text{فرس}}{\text{فرما}}$ کے مساوی ہے۔

$$\therefore\ \text{لہ}\,\frac{\text{فرس}}{\text{فرما}} = \frac{1}{3}\,\text{ع}\,\bar{\text{س}}\,\text{م}\,\text{ھ}\,\frac{\text{فرس}}{\text{فرما}}$$

یعنی $\text{لہ} = \frac{1}{3}\,\text{ثہ}\,\bar{\text{س}}\,\text{ھ}$ .... (٦٦)

چونکہ $\bar{\text{س}} \propto \sqrt{\text{ت}}$ اسلئے $\text{لہ} \propto \text{ثہ}\,\sqrt{\text{ت}}\cdot\text{ھ}$

مساوات (٦٥) کی مدد سے $\text{لہ} \propto \frac{\text{١٤٤۰٢} \times \sqrt{\text{ت}}\ \text{ع}\ ٣}{\sqrt{2}\ \pi\ \text{ع}\ \text{فا}^2\left(1 + \frac{\text{سع}}{\text{ت}}\right)}$

$$\therefore\ \text{لہت} = \frac{\text{گ}\,\text{ت}^{\frac{1}{2}}}{1 + \frac{\text{سع}}{\text{ت}}} \qquad (٦٧)$$

جہاں گ = مستقل اور لہت = لزوجیت ت درجے تپش مطلق پر

لہذا مساوات (٦٧) سے یہ ظاہر ہے کہ کسی گیس کی لزوجیت کو اس کی کثافت

یا دباؤ سے کوئی تعلق نہیں ہے بشرطیکہ تپش مستقل ہو۔ لیکن بعد میں عملی طور پر یہ ثابت ہو چکا ہے کہ یہ کلیہ بہت ہی اونچے اور نیز بہت ہی کم دباؤ پر کام نہیں دے سکتا۔

کلیات گیس کا اطلاق شیرے کی صورت میں "پیران کا کلیہ":—

پیران [۱۲] کو یہ خیال ہوا تھا کہ کسی لس ونتی محلول میں بھی ذرات کی تقسیم کے لئے، کرہ ہوائی میں ہوا کے سالمات کی تقسیم کے مماثل، ایک کلیہ ضرور ہونا چاہیئے۔ اس لئے شیرے کی صورت میں، "توانائی کی مساوی تقسیم" کے کلیہ کے اطلاق سے، مختلف گہرائیوں پر ذرات کی کثافت کے متعلق ایک ضابطہ حاصل کیا تھا۔

مساوات (۲۶) سے

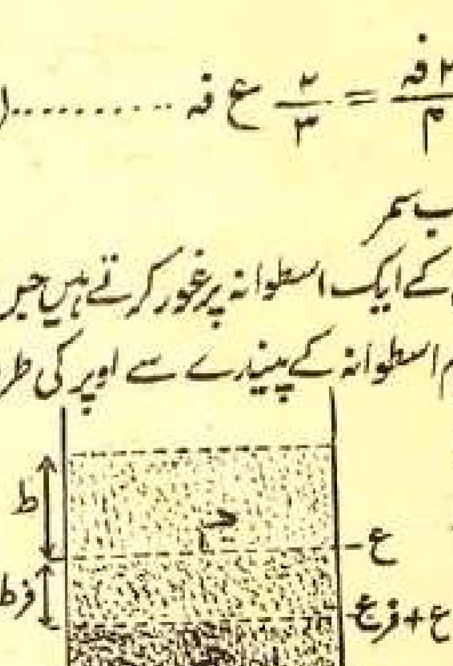
توانائی بالفعل فی ذرہ = ½ م ر² = ۳ ک ت / ۲ ن = فہ (فرض کرد)

مساوات (۱) سے

د = ⅓ ثہ ر² = ⅓ ثہ (۲ فہ / م) = ⅔ ع فہ .... (۶۸)

جہاں ع = تعداد ذرات فی مکعب سم

فرض کرو کہ ہم اکائی تراش عمودی کے ایک اسطوانہ پر غور کرتے ہیں جس میں کوئی شیرہ بھرا ہوا ہے۔ جیسے جیسے ہم اسطوانہ کے پیندے سے اوپر کی طرف جائیں گے تو ارتکاز میں جاذبہ زمین کی وجہ سے کمی ہونے لگے گی۔ شکل ۲۳ میں ایک ایسا پرت بتایا گیا ہے جو اوپر کی پرت سے ط فاصلے پر ہے۔



شکل ۲۳

فرض کرو کہ اس پرت کا ارتکاز ع اور ولوجی دباؤ د ہے۔

ایک اور پرت کا جس کا فاصلہ اوپر کی پرت سے ط + فرط ہے فرض کرو کہ ارتکاز ع + فرع اور دلوجی دباؤ د_2 ہے۔

مساوات (۶۸) سے $\text{د}_1 = \frac{2}{3}\,\text{ع فہ}$ اور $\text{د}_2 =$

$$= \frac{2}{3}\,(\text{ع} + \text{فرع})\ \text{فہ}$$

∴ حاصل دلوجی دباؤ $= \text{د}_2 - \text{د}_1 = \frac{2}{3}\,\text{فرع فہ}$

∴ حاصل دباؤ فرط بلندی میں ذرات کی وجہ سے =

$$\text{فرط}\,(\text{ثہ} - \text{ث})\ \text{ج ع حہ}$$

جہاں حہ = ایک ذرہ کا حجم، ثہ = ذرہ کی کثافت اور ث = مائع کی کثافت

لہذا تعادل کے لئے $\frac{2}{3}\,\text{فہ فرع} = \text{فرط}\,(\text{ثہ} - \text{ث})\ \text{ج ع حہ}$

اسکو صفر گہرائی سے ط تک تکملانے سے:-

$$\int_{\text{ع}_{\text{صفر}}}^{\text{ع}} \frac{2}{3}\,\text{فہ}\,\frac{\text{فرع}}{\text{ع}} = \int_{\text{صفر}}^{\text{ط}} (\text{ثہ} - \text{ث})\ \text{ج حہ فرط}$$

جہاں $\text{ع}_{\text{صفر}}$ = سب سے اوپر کی پرت کے پاس ارتکاز

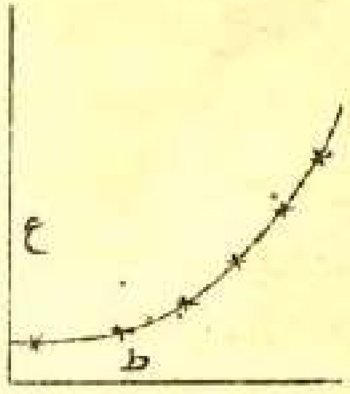
$$\therefore \text{لوک}_{\text{و}}\,\frac{\text{ع}}{\text{ع}_{\text{صفر}}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\text{حہ}\,(\text{ثہ} - \text{ث})}{\text{فہ}}\cdot\text{ج ط}$$

$$\therefore \text{ع} = \text{ع}_{\text{صفر}}\ \text{و}^{\text{عہ ط}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۶۹)$$

جہاں $\text{عہ} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\text{حہ}\,(\text{ثہ} - \text{ث})\ \text{ج}}{\text{فہ}}$

اس مساوات سے ظاہر ہے کہ شیرہ کے ذرات کا ارتکاز، گہرائی کے اضافہ سے بڑھتا ہے۔ لہذا اگر ہم ط کو ع کے مقابل مرتسم کریں تو ایک ایسا منحنی

حاصل ہوگا جس کی تقریبی شکل، شکل ۲۴ میں دکھائی گئی ہے۔



شکل ۲۴

پیراں نے اس کلیہ کا ثبوت عملی طور پر ۱۹۰۹ء میں دیا۔ اس نے گیمبوج کو ایتھل الکوہل میں حل کرکے آمیزہ کو پانی کی کثیر مقدار کے ساتھ ملانے کے بعد ایک شیرہ تیار کیا۔ اس تیار شدہ محلول میں چھوٹے چھوٹے کرہ نما ذرات موجود تھے جن کے حجم معمولی لس دنتی محلول کے ذرات سے کسی قدر بڑے تھے۔ اس شیرہ کو ایک اسطوانہ میں رکھ کر اس کی ۰ر۱ مم بلندی کو پیراں نے ایک زبردست خوردبین سے دیکھا جو مختلف سطحوں پر ماسکہ میں لائی جاسکتی تھی، اس نے یہ معلوم کیا کہ ابتدا میں سالمات کی تقسیم بظاہر یکساں رہی لیکن چند دقیقوں کے بعد یہ ظاہر ہوا کہ ذرات، نچلے پرتوں میں بہ نسبت اوپر کے پرتوں کے ایک دوسرے کے قریب تر جمع ہوگئے۔ چند گھنٹوں کے بعد تقسیم یکساں ہوگئی۔ اسکا بیان ہے کہ پندرہ دن کے بعد تقسیم کی ترتیب عملاً بالکل اسی طرح کی تھی جیسی کہ تین گھنٹوں کے اختتام پر پائی گئی تھی۔ ایک تجربہ میں گیمبوج کے ذرات کے لئے جنکا قطر ۲ر۵ × $۱۰^{-۵}$ سمر تھا، چار مختلف گہرائیوں پر جن میں علی الترتیب ۶ × $۱۰^{-۴}$ سمر کا فرق تھا، اس نے ذرات کی تعداد کو گن کر جب دریافت کیا تو عددوں میں ۳۰۵ : ۵۳۰ : ۹۴۰ : ۱۸۸۰ کی نسبت تھی۔

ذرات کی کثافت معمولی طریقہ سے یعنی خشک شے کو ابتدا ہی میں تولکر دریافت کی گئی تھی۔ ایک اور طریقہ بھی استعمال کیا گیا تھا یعنے ایک کثافت اضافی کی بوتل میں جس کا حجم ح تھا شیرہ بھر گیا اور اسکا وزن معلوم کرلیا گیا، اسی بوتل کو پانی سے بھر کر یہ وزن بھی دریافت کیا گیا۔

فرض کرو کہ ان دونوں ح حجم کی کمیتوں کی قیمتیں بالترتیب $م_۲$ اور $م_۱$

کے مساوی ہیں۔ اس کے بعد ح حجم کا شیرہ لے کر اس کے پانی کو تبخیر کے ذریعہ خارج کر دیا گیا اور جو کچھ رسوب بچ رہا اس کو تول لیا۔ فرض کرو کہ اس رسوب کی کمیت م۳ ہے۔ اگر پانی کی کثافت ث ہو تو $\text{ح} = \frac{\text{م}_{۱}}{\text{ث}}$ اور چونکہ $(\text{م}_{۲} - \text{م}_{۳})$ = اس پانی کی کمیت جو ح حجم کے شیرے میں موجود تھی لہٰذا اس پانی کا حجم جو ح حجم کے شیرے میں موجود تھا $= \frac{(\text{م}_{۲} - \text{م}_{۳})}{\text{ث}}$

$$\therefore \text{ذرات جو حجم گھیرتے ہیں} = \frac{\text{م}_{۱}}{\text{ث}} - \frac{\text{م}_{۲} - \text{م}_{۳}}{\text{ث}}$$

$$\therefore \text{ذرات کی کثافت ثہ} = \frac{\text{م}_{۳}}{\left\{\frac{\text{م}_{۱} - \text{م}_{۲} + \text{م}_{۳}}{\text{ث}}\right\}} \qquad \ldots\ldots\ldots (۷۰)$$

اس طرح گیمبوج کی کثافت ۲۰۷ء۱ گرام فی مکعب سمر نکلی۔

حہ یعنے ذرہ کے حجم کی دریافت کے لئے شیرہ میں اوپر کی سطح کے ذرات، جاذبۂ زمین کی تحت جس شرح سے نیچے گرتے ہیں وہ شرح ناپی گئی اور اسٹوک کے کلیہ سے اس ذرّے کا نصف قطر دریافت کیا گیا:-

$$۶\pi\ \text{ص لہ س} = \frac{۴}{۳}\pi\ \text{ص}^{۳}(\text{ثہ} - \text{ث})\ \text{ج}$$

جہاں لہ = محلول کی لزوجت

س = ذرہ کی رفتار

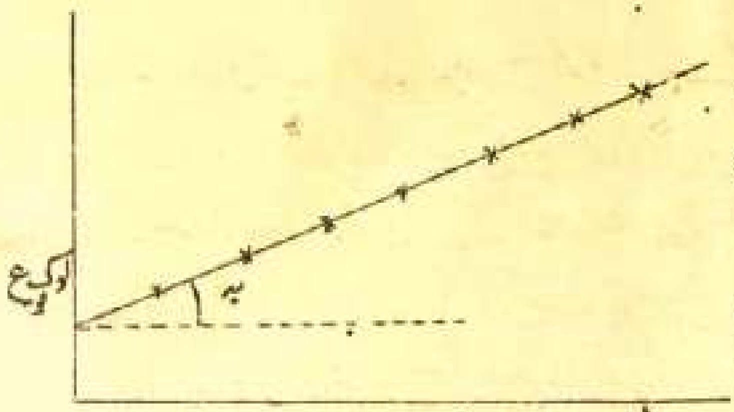
اور ص = ذرہ کا نصف قطر

چونکہ $\text{حہ} = \frac{۴}{۳}\pi\ \text{ص}^{۳}$ لہٰذا ایک ذرہ کا حجم معلوم ہو جاتا ہے۔

ایک ذرہ کا حجم حسب ذیل طریقہ سے بھی دریافت کیا جا سکتا ہے:-

مساوات (۶۹) سے $\text{لوگ}_{\text{و}}\ \text{ع} = \text{لوگ}_{\text{و}}\ \text{ع}_{\text{صفر}} + \text{عہ}\ \text{ط}$

اگر لوگ$_{\text{و}}$ ع کو ط کے مقابل مرتسم کیا جائے تو شکل ۲۵ کی طرح ایک خط مستقیم حاصل ہوتی ہے۔ اس ترسیم کے میلان سے عہ کی قیمت دریافت



شکل ۲۵

کی جاسکتی ہے یعنی عہ = مس ب۔ اس طرح حہ کی قیمت بالراست معلوم ہوجاتی ہے۔ اگر حہ معلوم ہوجائے تو عہ کی قیمت سے مستقل ن کی قیمت معلوم کی جاسکتی ہے۔

پیراَن کے تقسیمی کلیہ کی تصحیح:- ای۔ لیف برٹن کی رائے میں پیراَن کا کلیہ صرف بہت ہی چھوٹی گہرائیوں یعنی ط کی بالکل چھوٹی قیمتوں کے لئے صحیح ہے۔ مختلف گہرائیوں کے لئے چاندی کے لس دنتی محلولوں پر برٹن نے متعدد مشاہدات حاصل کئے اور یہ دریافت کیا کہ ذرات کی تقسیم سطح کے قریب پیراَن کے کلیہ کی مطابقت کرتی ہے لیکن بڑی گہرائیوں پر ارتکاز ع کی قیمت عملاً مستقل ہوجاتی ہے۔ پیراَن نے اپنے کلیہ کو حاصل کرنے میں ذرات کے باہمی عمل کا لحاظ نہیں رکھا۔ برٹن کا یہ خیال ہے کہ اس قسم کے شیرے کے ذرات ایک ہی قسم کی بھرن رکھتے ہیں جس کی وجہ سے وہ ایک دوسرے کو دفع کرتے رہتے ہیں۔ اس کو ثابت کرنے کے لئے اس نے خوردبین سے ایسے ذرات کا مشاہدہ کیا جن میں آپس میں تصادم کی کوئی علامت نہیں پائی جاتی تھی۔

اس طرح پیراَن کی مساوات میں' اس زائد دباؤ کے لئے' جو ذرات کی "فرط یوٹائی کی پرت میں ان کے برقی دفع کے عمل سے پیدا ہوتا ہے' برٹن نے ایک تصحیحی رقم لکھ کر بڑی گہرائیوں کے لئے ایک مساوات حاصل کی جو حسب ذیل ہے:-

$$ع = \frac{حہ(ثہ - ث)ج}{گ\ بھ^{۲}} \quad ....(۷۱)$$

جہاں گ = ایک مستقل

بھ = ہر ذرہ پر بھرن برقی سکونی اکائیوں میں

اس مساوات سے ظاہر ہے کہ ع کی قیمت مستقل رہتی ہے بشرطیکہ بھرن میں کوئی تبدیلی نہ ہو۔

اگر بھرن بھ کی قیمت گھٹتی ہے تو ع کی قیمت بڑھتی ہے۔

بعد میں پورٹر اور ہیچز نے یہ بتایا کہ لس ونتی محلول میں ایک ہی علامت کی بھرن والے ذرات نہیں ہوتے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ محلول تعدیلی ہو۔ ان دونوں نے زیادہ گہرائیوں کے لئے سیگر کی مشہور دباؤ "د" والی مساوات استعمال کرکے پیران کے کلیہ کو وسعت دینے کی کوشش کی۔

مساوات (۴۸) سے:۔

$$\text{د} = \tfrac{۲}{۳}\ \text{ع نہ} = \frac{\text{ع لات}}{\text{ن}}$$

فرض کرو کہ $\text{د}_۱ = \text{د}$ اور $\text{د}_۲ = \text{د} + \text{فرد}$

$$\therefore \text{حاصل دباؤ} = \text{فرد} = \tfrac{۲}{۳}\ \text{نہ فرع} = \frac{\text{لات فرع}}{\text{ن}}$$

$$= \text{فرط}\,(\text{ثہ} - \text{ث})\ \text{ج ع حہ}$$

اسکے بجائے سیگر کی مساوات استعمال کرنے سے:۔

$$\text{د} = \frac{\text{ع لات}}{\text{ن}\,(\text{ا} - \text{ب ع})} \qquad \text{جہاں ب} = \text{مستقل}$$

$$\therefore \text{فرد} = \frac{\text{لات}}{\text{ن}} \left\{ \frac{(\text{ا} - \text{ب ع})\,\text{فرع} + (\text{ع ب فرع})}{(\text{ا} - \text{ب ع})^۲} \right\}$$

$$= \frac{\text{لات}}{\text{ن}} \cdot \frac{\text{فرع}}{(\text{ا} - \text{ب ع})^۲}$$

تعادل کے لئے:۔

$$\text{فرد} = \frac{\text{لات}}{\text{ن}} \cdot \frac{\text{فرع}}{(\text{ا} - \text{ب ع})^۲} =$$

= ذ ط (ثہ - ث) ج ع حہ

گہرائی ط کے لئے اسکو تکملانے سے

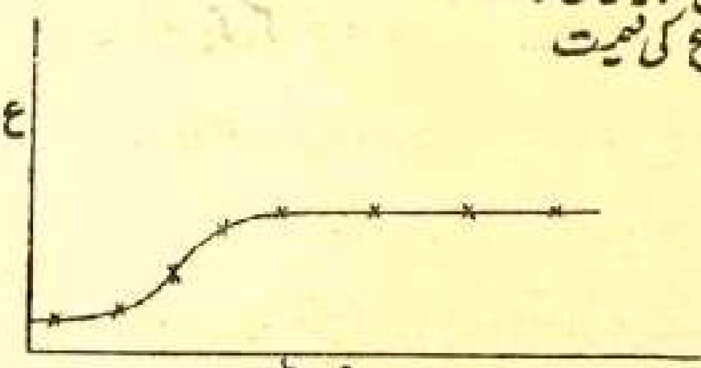
$$\int \frac{\text{لاٹ ذ ع}}{\text{ن ع}(\text{ا - ب ع})^{۲}} = \int (\text{ثہ - ث})\ \text{ج حہ ذ ط}$$

$$\text{یعنی}\ \frac{\text{لاٹ}}{\text{ن}} \left\{ \text{لوک}_{\text{و}}\ \text{ع} - \text{لوک}_{\text{و}} (\text{ا - ب ع}) + \frac{۱}{(\text{ا - ب ع})} \right\} =$$

$$= (\text{ثہ - ث})\ \text{ج حہ ط} + \text{گہ} \quad \text{.................} \quad (۷۲)$$

جہاں گہ = کوئی مستقل

ط کو ع کے مقابل مرتسم کرنے سے شکل ۲۶ کے مطابق ایک ترسیم حاصل ہوتی ہے۔ اس ترسیم سے یہ ظاہر ہے کہ چھوٹی گہرائیوں کے لئے پیراں کا کلیہ صحیح ہے لیکن بڑی گہرائیوں کے لئے عملاً ع کی قیمت مستقل رہتی ہے۔



شکل ۲۶

پروفیسر پورٹر نے اس ضابطہ کی تصدیق تجربہ سے حاصل کی۔

فانڈروال اور سیٹر کی مساوات ہے:-

$$\left(\text{د} + \frac{\text{بہ}}{\text{ح}^{۲}}\right) = \frac{\text{ع لاٹ}}{\text{ن}(\text{ا - ب ع})}$$

جہاں بہ = مستقل اور ح = مائع کا وہ حجم جس میں ایک ذرہ موجود ہے

$$= \frac{۱}{\text{ع}}$$

∴ د = ع لات / ن (ا - ب ع) - بہ ع²

∴ فرد = لات / ن · فرع / (ا - ب ع)² - ۲ بہ ع فرع =

= فرط (ثہ - ث) ج ع حہ

اس کو تکملانے سے :-

∫ لات / ن ع · فرع / (ا - ب ع)² - ∫ ۲ بہ ع فرع / ع =

= ∫ (ثہ - ث) ج حہ فرط

یعنی لات / ن { لوگ ع / (ا - ب ع) + ۱ / (ا - ب ع) } - ۲ بہ ع =

= (ثہ - ث) ج حہ ط + گہ .... (۷۳)

جہاں گہ = مستقل

اس مساوات کی، جو کہ سابق مساوات سے زیادہ صحیح ہے پیراَن، برٹن اور پورٹر کے تجربات سے تصدیق ہوتی ہے۔

براؤنی حرکات:- ۱۸۲۷ء تک، پانی میں معلق خوردبینی اشیاء تیز تیز حرکت کرتے ہوئے مشاہدہ کئے گئے تھے، رابرٹ براؤن[۵] نامی ایک انگریز ماہر نباتیات نے اسکے متعلق مسلسل تجربے کئے اور یہ دریافت کیا کہ جب کسی ٹھوس شے کے نہایت چھوٹے چھوٹے ذرات خالص پانی یا کسی اور مائع میں معلق ہوتے ہیں تو ان سے ایک عجیب بے قاعدہ یا غیر منظم وضع کی حرکات ظہور پذیر ہوتے ہیں (شکل ۲۷)۔ ایک زبردست خوردبین کی مدد سے چھوٹے سے چھوٹا ذرہ اس



شکل ۲۷

طرح حرکت کرتے ہوئے جو دیکھا گیا اسکا قطر $\frac{1}{30000}$ انچ کے رتبہ کا تھا۔
اسکے بعد متعدد سائنسدانوں نے مختلف محلولوں، آمیزوں اور مائعات کی صورت میں ان عجیب وغریب حرکات کا مشاہدہ کیا لیکن کئی برس تک اسکی صحیح توجیہہ کسی نے بھی نہ کی پچاس برس کے بعد ایک بلجیم کے رہنے والے شخص نے یہ تجویز پیش کی کہ یہ مظہر مائعات کے نظریہ تحرک کا مرئی ثبوت ہے۔ مائع کے سالمات ٹھوس کے معلق ذرات کو ہر طرف سے ٹکراتے اور ٹھکراتے رہتے ہیں اور اس سالمی تصادم کی وجہ سے ٹھوس کے ذرات اِدھر اُدھر حرکت کرتے ہوئے نظر آتے ہیں۔

براؤنی حرکات کو معلق ٹھوس ذرات کی نوعیت سے کوئی تعلق نہیں ہوتا اور انکو جاری رکھنے کیلئے ٹھوس ذرات کے حجم کو 10^{-4} سم کے رتبہ سے چھوٹا رکھنا ضروری ہوتا ہے۔ ان حرکات کے مرئی ہونے کیلئے دوسری شرط یہ ہے کہ ٹھوس ذرات برتن کے پیندے سے دور رکھے جائیں۔ ہنری نے دریافت کیا کہ ربر کے شیرہ میں ایسیٹک تیزاب یا الکوحل کی قلیل مقدار ملانے سے براونی حرکات میں کمی ہونے لگتی ہے۔ بلس لکھتا ہے کہ ریت یا گیج کے نہایت ہی چھوٹے ذرات کے شیرے میں بے حد خفیف سی قلیوں کی مقدار ملانے سے حرکات میں اضافہ ہونے لگتا ہے لیکن قلیوں کی مقدار بڑھا دی جائے تو پھر براؤنی حرکات میں کمی واقع ہونے لگتی ہے[16]۔

اس مظہر کا نظریہ جدید زمانہ کا ہے۔ سنہ ۱۹۰۵ء میں آئنسٹائین نے جرمنی میں ریاضی کی مدد سے کسی دیئے ہوئے وقت میں ایک ذرہ کے طے کردہ فاصلہ، اس ذرہ کے نصف قطر، مائع کی تپش اور اسکی لزوجیت کے درمیان ایک تعلق[17] دریافت کیا۔ اسی زمانہ میں لینژوان نے فرانس میں ایک دوسرے سادہ طریقہ سے اس مسئلہ کو حل کرنے کی کوشش کی۔ اس نے بھی وہی ضابطہ حاصل کیا۔ سمولوشوسکی کی رائے یہ تھی کہ چونکہ ذرات کو استوار کرے فرض کرنے اور سطحی تناؤ کی قوتوں کو نظر انداز کرنے کے بعد یہ ضابطہ حاصل ہوا ہے اسلئے نظری ضابطہ اور مشاہدات میں مطابقت کی ہمیں کوئی توقع نہیں رکھنی چاہیئے۔ لیکن پھر بھی سنہ ۱۹۱۰ء میں سوڈبرگ

نے مختلف مائعات میں پلاطینم کے ذرات کی مدد سے تجربی طور پر اس ضابطہ کی تصدیق کی۔

۱۹۰۶ء میں سمولوشوسکی نے یہ بتایا کہ مائعات کی طرح گیسوں میں بھی براونی حرکات کا ہونا ضروری ہے اور وہی نظری ضابطہ جو مائعات میں استعمال کیا گیا تھا گیسوں میں بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔ ۱۹۰۷ء میں اہرن ہافٹ نے تجربہ کی مدد سے یہ دریافت کیا کہ گیسوں میں مائعات کی بہ نسبت حرکت زیادہ تیز ہوتی ہے[۱۸]

سگریٹ کے دھویں اور امونیم کلورائیڈ کے دخان میں نسبتاً بڑے ذرات کی حرکات کو اس نے مشاہدہ کیا تھا۔ ۱۹۰۹ء میں اہرن ہافٹ اور ڈی براگلی نے ہوا میں چاندی کے ذرات کو معلق رکھ کر نہ صرف نظری ضابطہ کی تصدیق کی بلکہ برقیہ کی بھرن کی قیمت بھی دریافت کی۔ ۱۹۱۱ء میں ملیکن نے برقی اور تجاذبی قوتوں کی مدد سے دو متوازی تختیوں کے[۱۹] درمیان تیل کے ایک قطرہ کو ہوا میں معلق رکھ کر براونی حرکات کا مطالعہ کیا اور اس طرح چالاکی کے ساتھ لزوجیت کی تکلیف دہ رقم کو نظری ضابطہ سے غائب کر دینے میں کامیابی حاصل کی۔ برقیہ پر بھرن کی جو قیمت اس نے دریافت کی تھی وہ اب بھی برقی اکائی کی معیاری قیمت تصور کی جاتی ہے۔

۱۹۱۵ء میں کارل[۱۹] نے فلیچر کے (برقیہ پہ بھرن اور ایوگیڈرو کے عدد کا حاصلضرب معلوم کرتا) طریقہ کی مدد سے اس ضابطہ کی تصدیق کی۔

ڈاکٹر وائس اور دیگر اشخاص بھی اسی طرح اسکی تصدیق کر چکے ہیں۔

براؤنی حرکات کا کلیہ[۲۰]:۔ براؤنی حرکات کے نظریہ کی تکمیل کا سہرا تین اشخاص یعنی آئنسٹائن، سمولوشوسکی اور لینژوان کے سر رہے گا۔

لینژوان کا آسان طریقہ ہم درج ذیل کرتے ہیں۔

مائع میں جو ذرات معلق رہتے ہیں انکو مائع کے سالمات ہر جانب سے

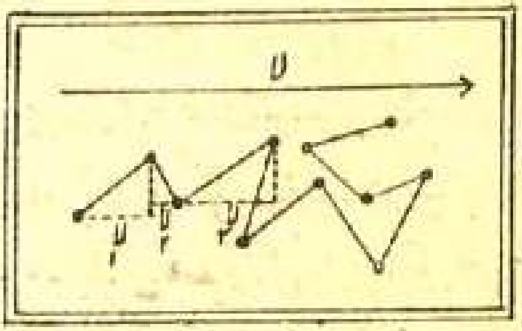
ٹکراتے ہیں اور ان ضربوں کی وجہ سے ہر ذرہ پر ایک حاصل قوت پیدا ہوتی ہے جس کے تحت یہ ذرات مختلف سمتوں میں حرکت کرنے لگتے ہیں لیکن مائع کی لزوجیت اس حرکت میں کمی کرنے کا تقاضا رکھتی ہے۔ اسٹوک کے کلیہ (۲۱) سے یہ کمی پیدا کرنے والی متضاد لزج قوت ۶ π ص لہ سا کے مساوی ہے۔

جہاں سا = ذرہ کی رفتار

لہ = مائع کی لزوجیت

ص = ذرہ کا نصف قطر

فرض کرو کہ ہم صرف لا محور پر ان حرکات کی پیمائش کرنا چاہتے ہیں جیسا کہ شکل ۲۸ میں دکھایا گیا ہے۔ فرض کرو کہ وقت و میں لا محور کی سمت میں ایک ذرہ کا مجموعی نقل مکان =



شکل ۲۸

$$= \left(\text{لا}_{1} + \text{لا}_{2} + \text{لا}_{3} + \cdots\cdots + \text{لا}_{\text{ع}}\right)$$

اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ ایک چھوٹے وقفہ فر و میں نقل مکان فر لا کے مساوی ہے۔

تب تعادل کے لئے حرکت کی مساوات حسب ذیل ہوگی:۔

$$\text{ک}\ \frac{\text{فر}^{2}\ \text{لا}}{\text{فر و}^{2}} = \text{جہ} - 6\pi\ \text{ص لہ}\ \frac{\text{فر لا}}{\text{فر و}} = \text{جہ} - \text{گ}\ \frac{\text{فر لا}}{\text{فر و}}$$

جہاں ک = ذرہ کی کمیت

جہ = لا سمت میں ضربوں کی وجہ سے قوت

اور گ = ۶ π ص لہ

اوپر کی مساوات کو لا سے ضرب دینے سے

$$\text{ک}\ \text{لا}\ \frac{\text{فر}^{2}\,\text{لا}}{\text{فر}\,\text{و}^{2}} = \text{جہ}\ \text{لا} - \text{گ}\ \text{لا}\ \frac{\text{فر}\,\text{لا}}{\text{فر}\,\text{و}}$$

$$\text{لیکن}\ \text{لا}\ \frac{\text{فر}^{2}\,\text{لا}}{\text{فر}\,\text{و}^{2}} = \frac{1}{2}\ \frac{\text{فر}^{2}\,(\text{لا}^{2})}{\text{فر}\,\text{و}^{2}} - \left(\frac{\text{فر}\,\text{لا}}{\text{فر}\,\text{و}}\right)^{2}$$

$$\text{اور}\ \text{لا}\ \frac{\text{فر}\,\text{لا}}{\text{فر}\,\text{و}} = \frac{1}{2}\ \frac{\text{فر}\,(\text{لا}^{2})}{\text{فر}\,\text{و}}$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\,\text{ک}\ \frac{\text{فر}^{2}\,(\text{لا}^{2})}{\text{فر}\,\text{و}^{2}} - \text{ک}\left(\frac{\text{فر}\,\text{لا}}{\text{فر}\,\text{و}}\right)^{2} = \text{جہ}\ \text{لا} - \frac{\text{گ}}{2}\,.\,\frac{\text{فر}\,(\text{لا}^{2})}{\text{فر}\,\text{و}}$$

اس مساوات کو نقل مکان کی مجموعی تعداد ع کے لئے لکھنے سے :-

پہلے نقل مکان کیلئے :-

$$\frac{\text{ک}}{2}\,.\,\frac{\text{فر}^{2}\,(\text{لا}_{1}^{2})}{\text{فر}\,\text{و}^{2}} - \text{ک}\left(\frac{\text{فر}\,\text{لا}_{1}}{\text{فر}\,\text{و}}\right)^{2} = \text{جہ}\ \text{لا}_{1} - \frac{\text{گ}}{2}\,.\,\frac{\text{فر}\,(\text{لا}_{1}^{2})}{\text{فر}\,\text{و}}$$

دوسرے نقل مکان کے لئے :-

$$\frac{\text{ک}}{2}\,.\,\frac{\text{فر}^{2}\,(\text{لا}_{2}^{2})}{\text{فر}\,\text{و}^{2}} - \text{ک}\left(\frac{\text{فر}\,\text{لا}_{2}}{\text{فر}\,\text{و}}\right)^{2} = \text{جہ}\ \text{لا}_{2} - \frac{\text{گ}}{2}\,.\,\frac{\text{فر}\,(\text{لا}_{2}^{2})}{\text{فر}\,\text{و}}$$

تیسرے نقل مکان کے لئے :-

$$\frac{\text{ک}}{2}\,.\,\frac{\text{فر}^{2}\,(\text{لا}_{3}^{2})}{\text{فر}\,\text{و}^{2}} - \text{ک}\left(\frac{\text{فر}\,\text{لا}_{3}}{\text{فر}\,\text{و}}\right)^{2} = \text{جہ}\ \text{لا}_{3} - \frac{\text{گ}}{2}\,.\,\frac{\text{فر}\,(\text{لا}_{3}^{2})}{\text{فر}\,\text{و}}$$

اسی طرح چوتھے کے لئے :-

....

....

$$\frac{\text{ک}}{2}\,.\,\frac{\text{فر}^{2}\,(\text{لا}_{\text{ع}}^{2})}{\text{فر}\,\text{و}^{2}} - \text{ک}\left(\frac{\text{فر}\,\text{لا}_{\text{ع}}}{\text{فر}\,\text{و}}\right)^{2} = \text{جہ}\ \text{لا}_{\text{ع}} - \frac{\text{گ}}{2}\,.\,\frac{\text{فر}\,(\text{لا}_{\text{ع}}^{2})}{\text{فر}\,\text{و}}$$

ان تمام مساواتوں کو جمع کرنے اور شمار کنندہ اور نصب نما کو مجموعی تعداد ع سے ضرب دینے سے :-

$$\frac{\text{ک}}{۲}\,\text{ع}\,.\,\frac{\text{فر}^{۲}\{\text{لا}_{۱}^{۲}+\text{لا}_{۲}^{۲}+\cdots\cdots+\text{لا}_{\text{ع}}^{۲}\}}{\text{فرو}^{۲}\,\text{ع}}-\frac{\text{ک}}{۲}\,\text{ع}\,\frac{\{(\frac{\text{فرلا}_{۱}}{\text{فرو}})^{۲}+(\frac{\text{فرلا}_{۲}}{\text{فرو}})^{۲}+\cdots\cdots+(\frac{\text{فرلا}_{\text{ع}}}{\text{فرو}})^{۲}\}}{\text{ع}}$$

$$=\text{ح جہ لا}-\frac{\text{گ}}{۲}\,\text{ع}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرو}}\,\frac{(\text{لا}_{۱}^{۲}+\text{لا}_{۲}^{۲}+\cdots\cdots+\text{لا}_{\text{ع}}^{۲})}{\text{ع}}$$

فرض کرو کہ $\bar{\text{لا}}^{۲}=\frac{\text{لا}_{۱}^{۲}+\text{لا}_{۲}^{۲}+\cdots\cdots+\text{لا}_{\text{ع}}^{۲}}{\text{ع}}$.

لیکن مساوات (۲۶) سے $\text{فہ}=\frac{۲\,\text{لات}}{۲\,\text{ن}}$ . . .

∴ صرف محور لا کی سمت میں اوسط توانائی بالفعل $=\text{فہ}_{۱}=\frac{\text{لات}}{۲\,\text{ن}}$

$$=\frac{۱}{۲}\,\frac{\text{ک}}{\text{ع}}\left\{(\frac{\text{فرلا}_{۱}}{\text{فرو}})^{۲}+(\frac{\text{فرلا}_{۲}}{\text{فرو}})^{۲}+\cdots\cdots+(\frac{\text{فرلا}_{\text{ع}}}{\text{فرو}})^{۲}\right\}$$

اسکو سابق مساوات میں درج کرنے سے :-

$$\frac{\text{ک}}{۲}\,\text{ع}\,\frac{\text{فر}^{۲}(\bar{\text{لا}}^{۲})}{\text{فرو}^{۲}}-\frac{\text{ع لات}}{\text{ن}}=\text{ح جہ لا}-\frac{\text{گ}}{۲}\,\text{ع}\,\frac{\text{فر}(\bar{\text{لا}}^{۲})}{\text{فرو}}$$

ایک محدود وقت کیلئے ح جہ لا = صفر چونکہ یہ ممکن ہے کہ نقل مکان لا کی مثبت اور منفی سمت میں تقریباً مساوی ہو۔

فرض کرو کہ $\text{ما}=\frac{\text{فر}\bar{\text{لا}}^{۲}}{\text{فرو}}$ اس صورت میں

$$\frac{\text{ک}}{۲}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرو}}-\frac{\text{لات}}{\text{ن}}=-\frac{\text{گ}}{۲}\,\text{ما}$$

یعنی $\frac{\text{فرما}}{\text{ما}-\frac{۲\,\text{لات}}{\text{ن گ}}}=-\frac{\text{گ}}{\text{ک}}\,\text{فرو}$

اس کو تکملانے سے :-

$$\text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{ما}-\frac{۲\,\text{لات}}{\text{ن گ}}\right)=-\frac{\text{گ}}{\text{ک}}\,\text{و}+\text{مہ}$$

جہاں مہ = مستقل

یعنی $\text{ما} = \frac{\text{۲لات}}{\text{ن گ}} = \text{گہ} \; \text{و}^{-\frac{\text{گ}}{\text{ک}}\text{و}}$ جہاں گہ = مستقل

اگر و بہت بڑا ہو تو $\text{گہ} \; \text{و}^{-\frac{\text{گ}}{\text{ک}}\text{و}}$ = صفر

$$\therefore \text{ما} = \frac{\text{۲لات}}{\text{ن گ}} \quad \text{یعنے} \quad \frac{\text{فر}\,\overline{\text{لا}}^{۲}}{\text{فر و}} = \frac{\text{۲لات}}{\text{ن گ}}$$

اسکو ایک محدود وقت $\overline{\text{و}}$ کیلئے ابتدائی حالت سے انتہائی حالت تک تکملاتے ہیں :-

$$\int_{\text{ابتدائی حالت سے}}^{\text{انتہائی حالت تک}} \text{فر}\,\overline{\text{لا}}^{۲} = \int_{\text{صفر}}^{\overline{\text{و}}} \frac{\text{۲لات}}{\text{ن گ}}\,\text{فر و}$$

$$\text{یعنے}\quad \overline{\text{لا}}^{۲} = \frac{\text{لا}_{۱}^{۲} + \text{لا}_{۲}^{۲} + \ldots\ldots + \text{لا}_{\text{ع}}^{۲}}{\text{ع}} = \frac{\text{۲لات}}{\text{ن گ}}\cdot\overline{\text{و}} \quad\ldots\ldots\ldots (۷۴)$$

پیران نے تجربہ کے ذریعہ اس مساوات کی تصدیق کی اور آبیوگیڈرو کے مستقل ن کی قیمت اس سے معلوم کی۔

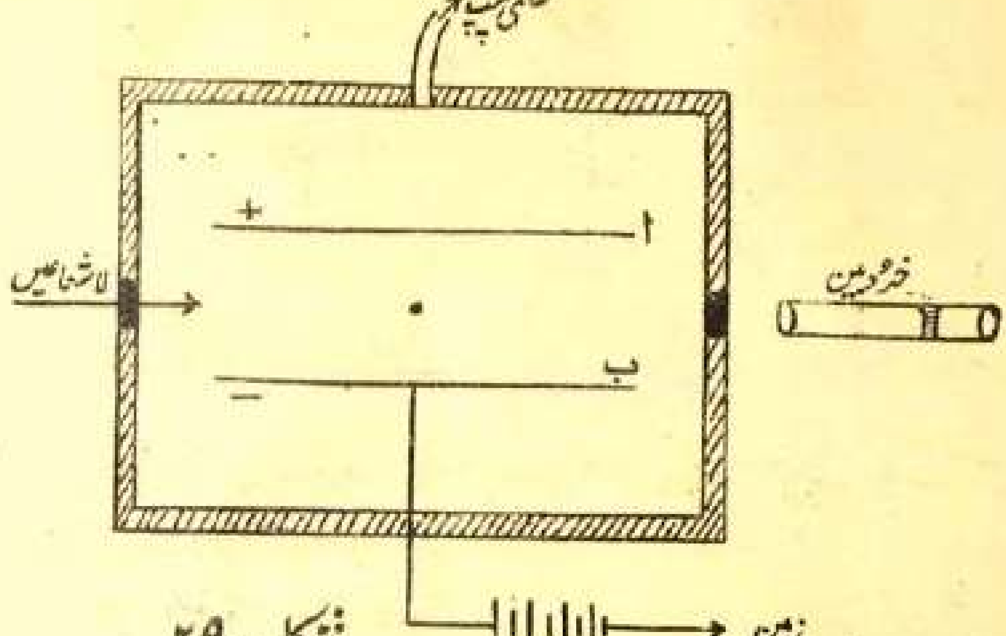
خطی براؤنی حرکات کے علاوہ گردشی براؤنی حرکات بھی واقع ہوتے ہیں آئینسٹائین نے ایک خاص محور کے اعتبار سے وقت $\overline{\text{و}}$ میں گردشی زاویہ ط کے اوسط مربع کیلئے سالمی دھکوں سے ذرات میں جو گردش پیدا ہوتی ہے اسکا لحاظ کرتے ہوئے حسب ذیل مساوات حاصل کی :-

$$\overline{\text{ط}}^{۲} = \frac{\text{ط}_{۱}^{۲} + \text{ط}_{۲}^{۲} + \ldots\ldots + \text{ط}_{\text{ع}}^{۲}}{\text{ع}} = \frac{\text{لات}}{\text{ن}}\cdot\frac{\overline{\text{و}}}{\text{۴ ۱۱ لہ صو}^{۳}} \quad\ldots\ldots\ldots (۷۵)$$

پیران نے ایک خوردبین کی مدد سے نسبتاً بڑے ذرات کی گردش کیلئے ایک خاص وقت میں شاہدات لیکر اس مساوات کی تصدیق کرنے میں کامیابی حاصل کی۔

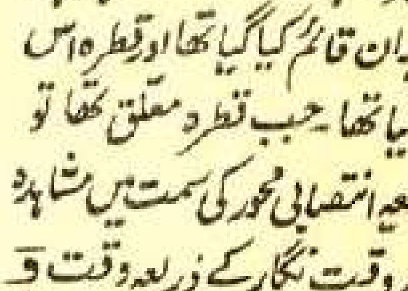
ملیکن کے تیل کے قطرہ والا تجربہ :- ملیکن نے اپنے تجربہ میں بہت ہی چھوٹے تیل کے قطرے $۱۰^{-۴}$ سمر نصف قطر کے رتبہ کے استعمال کئے۔ تیل کی پھوار کو ایک سادہ جوہر پاش کے ذریعہ ایک خانہ میں پھونک کر لینے ان قطروں کو حاصل کیا، اور ایک قطرہ کو دو متوازی افقی تختیوں ا اور ب کے درمیان جہاں کہ

ہوا موجود تھی مقید کر لیا جیسا کہ شکل ۲۹ میں دکھایا گیا ہے۔ ان دونوں تختیوں کے درمیان ایک برقی میدان اسطرح قائم کیا گیا کہ تیل کا قطرہ معلق دونوں کے درمیان توازن میں رہے۔ اسکا مطلب یہ ہے کہ تجاذبی قوت تو قطرہ کو



شکل ۲۹

نیچے کی طرف کھینچتی تھی لیکن برقی قوت اسکو اوپر کی طرف ہٹانے کا تقاضا کرتی تھی۔ لا شعاعوں کے ذریعہ تختیوں کے درمیان روانی میدان قائم کیا گیا تھا اور قطرہ اس طرح ایک یا زیادہ برقیوں کی بہرنوں سے بڑھایا گیا تھا۔ جب قطرہ معلق تھا تو براونی حرکتوں کو ایک زبردست خوردبین کے ذریعہ انتصابی محور کی سمت میں مشاہدہ کیا گیا۔ چشمہ کے پیمانہ پر نقل مکان "لا" ناپا گیا اور وقت نگار کے ذریعہ وقت ق کی قیمت معلوم کر لی گئی۔ تجربہ سے یہ معلوم ہوا کہ ہوا کے دباؤ کو کم کرنے سے حرکات معمولی دباؤ کے مقابلہ میں بہت تیز ہوتے ہیں اور نیز تیل کا قطرہ، پانی کے قطرہ کی نسبت زیادہ نقل مکان کرتا ہے۔



شکل ۳۰

ملیکن نے اپنے تجربہ میں مساوات (۴۷)

سے گ کی قیمت کا ازالہ کرنے کی کوشش اسوجہ سے کی کہ اس زمانہ میں لزوجیت کی قیمت کچھ زیادہ قابل اطمینان نہیں تصور کی جاتی تھی۔ اسنے قطرہ کو تجاذبی قوت کے تحت نیچے گرا کر یکساں نیچے کی طرف کی رفتار س۱ کی قیمت معلوم کی، اسکے بعد پھر قطرہ کو برقی قوت کے تحت اوپر چڑھنے دیا اور یکساں اوپر کی طرف کی رفتار س۲ دریافت کیا۔

جب قطرہ نیچے گر رہا تھا تو اسٹوک کے کلیہ سے:-

گ س۱ = ک ج   جہاں ک = قطرے کی کمیت

جب قطرہ اوپر چڑھ رہا تھا تو ق بھ = ک ج + گ س۲ = گ (س۱ + س۲)

جہاں ق = برقی حدت اور بھ = قطرہ پر برقی بھرن

∴ گ = ق بھ / (س۱ + س۲) .... (۷۶)

مساوات (۷۴) اور (۷۶) سے:-

لا۲ = ۲ لا ت و / ن . (س۱ + س۲) / ق بھ

یہ لا۲ نقل مکان کا اوسط مربع ہے۔ اگر ہم اسکو حسابی اوسط نقل مکان مثلاً Δ لا۲ میں تحویل کریں تو مساوات (۲۲) سے:-

Δ لا۲ = لا۲ × ۸ / ۳π

اس قیمت کو اوپر کی مساوات میں اگر لکھا جائے تو

ن بھ = ۱۶ / ۳π . لا ت و (س۱ + س۲) / ق Δ لا۲ .... (۷۷)

اس مساوات سے ملیکن نے ن بھ کی قیمت ۲۶۸۹۰. × ۱۰^۱۴ برقی سکونی اکائیوں کے مساوی دریافت کی۔

اسکے بعد ہارٹے فلیچر نے ۱۹۱۴ء میں اسی تیل کے قطرہ کے طریقہ کو استعمال کرکے گ کی قیمت کو اسی طرح ساقط کیا۔ اسنے Δ لا۲ لینے کے بجائے، چشمہ

(١٩) کے پیمانہ کے مختلف درجوں کے لئے، وقت کا اوسط حسابی تغیر ناپ لیا۔ اسطرح اسکو جو قیمت حاصل ہوئی وہ ملیکن کی ن بھ کی قیمت سے عملی طور پر ملتی تھی۔

برقیہ کی بھرن کی تخمین :- ملیکن کے تجربہ میں جبکہ تیل کا قطرہ تجاذبی قوت کے تحت گر رہا تھا :-

$$\text{ک ج} = \text{گ}\,\text{س}_1 = 6\pi\,\text{ص}\,\text{له}\,\text{س}_1$$

اور جب برقی قوتوں کے تحت قطرہ اوپر جا رہا تھا :-

$$\text{ق بھ} = \text{ک ج} + 6\pi\,\text{ص}\,\text{له}\,\text{س}_2$$

$$\therefore \frac{\text{ق بھ}}{\text{ک ج}} = 1 + \frac{\text{س}_2}{\text{س}_1} = \frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{\text{س}_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۷۸)$$

اگر ک ج کی قیمت معلوم ہو جائے تو برقیہ کی بھرن بھ کی قیمت معلوم کی جاسکتی ہے لیکن بالراست ک ج کی دریافت آسان مسئلہ نہیں ہے۔

$$\text{مگر ک ج} = \frac{4}{3}\pi\,\text{ص}^3\,(\text{ثہ} - \text{ث})\,\text{ج} = 6\pi\,\text{ص}\,\text{له}\,\text{س}_1$$

جہاں ثہ = تیل کی کثافت اور ث = واسطہ کی کثافت

$$\therefore \text{ص} = \sqrt{\frac{9\,\text{له}\,\text{س}_1}{2(\text{ثہ} - \text{ث})\,\text{ج}}}$$

$$\text{یعنی ک ج} = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{9\,\text{له}\,\text{س}_1}{2(\text{ثہ} - \text{ث})\,\text{ج}}\right)^{\frac{3}{2}} (\text{ثہ} - \text{ث})\,\text{ج}$$

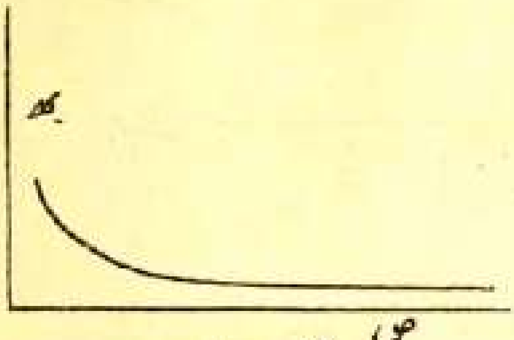
$$= \frac{4}{3}\pi \left(\frac{9\,\text{له}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot (\text{س}_1)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\text{ثہ} - \text{ث})\,\text{ج}}} \quad \ldots\ldots\ldots (۷۹)$$

لہذا مساوات (۷۸) اور (۷۹) سے

$$\text{بھ} = (\text{س}_1)^{\frac{1}{2}} \cdot (\text{س}_1 + \text{س}_2) \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{\text{ق}} \left(\frac{9\,\text{له}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\text{ثہ} - \text{ث})\,\text{ج}}} \quad \ldots\ldots (۸۰)$$

اس مساوات سے بھ کی قیمت بہ آسانی معلوم کی جاسکتی ہے۔

مگر ملیکن نے اپنے تجربہ میں یہ دریافت کیا کہ بالکل چھوٹے چھوٹے قطروں کے لئے بھ کی قیمت، نصف قطر کے گھٹنے سے کسی قدر بڑھ جاتی ہے، لیکن بڑے قطروں کے لئے بھ کی قیمت عملی طور پر مستقل رہتی ہے جیسا کہ شکل ۳۱ء میں ترسیم کے ذریعہ دکھایا گیا ہے۔



شکل ۳۱ء

کننگھیم نامی ملیکن کے ایک شاگرد نے اس کی توجیہ کی اور تیل کے بالکل چھوٹے قطروں کی صورت میں اس نے ایک تصحیح بھی نکالی۔ اس کا خیال تھا کہ اسٹوک کا کلیہ بالکل چھوٹے چھوٹے قطروں کے لئے بالکل صحیح نہیں ہو سکتا۔ (۴۲) کننگھیم کی رائے کے مطابق جب کوئی قطرہ کسی واسطہ میں گرتا ہے تو قطرہ کی رفتار اس کو گھیرے ہوئے واسطہ کی پرت کی رفتار کے مساوی نہیں ہوتی، کیونکہ اس صورت میں قطرہ کی اِرد گِرد کی پرت پھسل جانے کا امکان ہے۔ اگر گرتے ہوئے قطرہ کی رفتار سا ہو تو اُس کے اطراف کی پرت کی رفتار بہ سا ہو سکتی ہے، جہاں بہ کوئی کسر ہے۔ لہٰذا وہ قوت جو کہ قطرہ کو پیچھے کھینچ لے جانے کی کوشش کرتی ہے = ۶ π ص لہ بہ سا، مساوات (۳۵) سے مماسی قوت فی اکائی رقبہ جو قطرہ کو پیچھے کھینچنے کا تقاضا رکھتی ہے =

$$\text{گ}\ \bar{\text{سا}}\ \text{د} = \sqrt{\frac{\text{ک}}{۲\pi\ \text{لا}\ \text{ت}}}$$

جہاں گ = مستقل؛ $\bar{\text{سا}}$ = اضافی رفتار = (سا − بہ سا)

$$\therefore\ \text{۶} \pi\, \text{ص لہ بہ س} =$$

$$= \text{۴} \pi\, \text{ص}^{\text{۲}}\, \text{گہ س (۱ - بہ) د} \sqrt{\frac{\text{ث}}{\text{۲}\pi\, \text{لا ت}}}$$

$$\text{یعنی}\quad \frac{\text{بہ}}{\text{۱ - بہ}} = \frac{\text{گہ د}\ \frac{\text{۲}}{\text{۳}}\ \text{ص} \sqrt{\frac{\text{ث}}{\text{۲}\pi\, \text{لا ت}}}}{\text{لہ}} = \frac{\text{د ص}}{\text{مہ}}$$

$$\text{جہاں مہ} = \frac{\text{لہ}}{\frac{\text{۲}}{\text{۳}}\ \text{گہ} \sqrt{\frac{\text{ث}}{\text{۲}\pi\, \text{لا ت}}}} = \text{مستقل}$$

$$\therefore\ \text{بہ} = \left(\text{۱} + \frac{\text{مہ}}{\text{د ص}}\right)^{-\text{۱}}$$

∴ بالکل چھوٹے قطروں کے لئے صحیح اسٹوک کا کلیہ:-

$$\text{قوت} = \text{۶}\pi\, \text{ص لہ} \left(\text{۱} + \frac{\text{مہ}}{\text{د ص}}\right)^{-\text{۱}} \text{س} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۸۱})$$

لہذا مساوات (۸۰) میں ہم کو صرف لہ کی جگہ $\text{لہ} \left(\text{۱} + \frac{\text{مہ}}{\text{د ص}}\right)^{-\text{۱}}$ لکھنا چاہیئے تاکہ بھ کی صحیح قیمت تیل کے چھوٹے قطروں کی صورت میں حاصل ہو سکے۔

فرض کرو کہ تصحیح کے بعد قیمت $\overline{\text{بھ}}$ اور غیر تصحیح شدہ قیمت بھ ہے جو مساوات (۸۰) سے حاصل ہوتی ہے۔

اس صورت میں

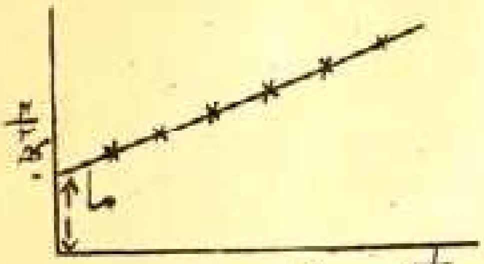
$$\overline{\text{بھ}} = (\text{س}_{\text{۱}})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}} \cdot (\text{س}_{\text{۱}} + \text{س}_{\text{۲}}) \cdot \frac{\text{۴}}{\text{۳}}\ \frac{\pi}{\text{ق}} \left\{ \frac{\text{۹}}{\text{۲}}\ \text{لہ} \left(\text{۱} + \frac{\text{مہ}}{\text{د ص}}\right)^{-\text{۱}} \right\}^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}} \cdot \frac{\text{۱}}{\text{س (ثہ - ث) ج}} \quad \ldots\ldots (\text{۸۲})$$

لہذا مساوات (۸۰) اور (۸۲) سے:-

$$\frac{\text{بھ}}{\text{بھَ}} = \frac{1}{\left(1+\frac{\text{مہ}}{\text{دص}}\right)^{-\frac{3}{2}}}$$

$$\text{یعنی } \text{بھ}^{\frac{2}{3}} = \text{بھَ}^{\frac{2}{3}} + \text{بھَ}^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\text{مہ}}{\text{دص}} \quad \text{..................} \quad (۸۳)$$

اگر $\text{بھ}^{\frac{2}{3}}$ کو $\frac{1}{\text{دص}}$ کے مقابل
مرتسم کیا جائے تو منحنی کی شکل شکل ۳۲
کی طرح حاصل ہوگی،



شکل ۳۲

خط کے مقطوعہ "ما" سے $\text{بھَ}^{\frac{2}{3}}$ کی قیمت معلوم ہو جاتی ہے
لہٰذا ارتسیم سے بالکل چھوٹے قطروں
کی صورت میں برقیہ پر بھرن کی صحیح قیمت معلوم کی جا سکتی ہے۔

Chapter X.

(۱) Collected Works "Maxwell" Vol. 1, P380
(۲) Jean's Dynamical Theory of Gases or Properties of Matter "Newman & Searle" P231 (1928)
(۳) Phys. Rev 30, P931
(۴) Phys. Rev, 5, P212, (1915)
(۵) Ann-der-Physik 31, P205 (1910)
(۶) Phys. Rev. 4, P491 (1914)
(۷) ,, ,, 12 P70 (1918)
(۸) Proc-Roy. Soc. A 103 P469 (1923) and
,, ,, 113 P520 (1927)
(۹) Phys. Rev. 2, P327 (1913) or Text Book of Heat "M. N. Saha & B. N. Srivastava" P207 (1931)
(۱۰) Jeans' Dynamical Theory of Gases P37
(۱۱) Phil Mag; 36, P507 (2893)
(۱۲) Text Book of Heat "M. N. Saha & B. N. Srivastava" P126 (1931) or General Physics for Students "E. Edser" P 564 (1926)
(۱۳) The Physical Properties of Colloidal Solutions "E. F. Burton" P80 (1921)
(۱۴) ,, ,, ,, ,, ,, ,, P88 (1921)
(۱۵) Phil. Mag. 4. P161 (1828)
(۱۶) Phys Rev. 2. P373 (1895)
(۱۷) Ann. der. Physik. 19 P 371 (1906)
22, P569 (1907)
(۱۸) Theory of Brownian Movement "Einstein" P104 (1926)
(۱۹) The Electron "R. A. Millikan" P145
(۲۰) Text Book of Heat "M. N. Saha & B. N. Srivastava" P729 (1931)
(۲۱) Hydrodynamics "H. Lamb" P567 (1924)
(۲۲) Proc. Roy. Soc A. 83 P357

اسمی اشاریہ

ج

چ

ڈ

ر

ف

ک

گ

ل

م

فہرست اصطلاحات

ا

آزاد راہ	Free path
آمیزہ	Mixture
ابعاد	Dimensions
اتار	Depression
احتمال	Probability
ارتکاز	Concentration
استواری کی شرح	Modulus of rigidity
اوج	Crest
اوچھال	Buoyancy

ب

برآمد	Output
برق پیما	Electrometer
برقیہ	Electron
بستگی	Condensation
بقائے توانائی	Conservation of energy
بگاڑ	Strain
بنیادی اکائی	Fundamental unit
بوجھ	Load
بین السالماتی	Intermolecular

پ

پترا	Lamina
پٹہ	Belt
پچکاو	Compressibility
پرت	Layer
پیچیدگی کا جفت	Torque

ت

تپشی قدر	Temperature coefficient
تداخل پیما	Interferometer
تداخلی دھاریاں	Interference fringes
تدویر نما	Cycloid
تصعید	Sublimation
تعدیلی محور	Neutral Axis
تقطیب	Polarisation
تلطیف	Rarefaction
تمدیدی طاقت	Tensile strength
تنویری چمک	Flashes of illumination

ج

جزی قوت	Shearing force
جفت	Couple
جمود کا معیار اثر	Moment of inertia
جوہر پاش	Atomizer
جھلی	Membrane

چ

چپٹی کمانی	Flat spring
چڑھاو	Elevation

ح

حرارت مخفی	Latent Heat
حرارت نوعی	Specific heat
حربرقی	Thermoelectric
مرحرکیات	Thermodynamics
حرناگزار لچک	Adiabatic elasticity
حضیض	Trough
حل پزیر	Soluble

خ

خط استوا	Equator
خماو	Bending
خمیدگی کا معیار اثر	Bending moment

د

درجہ آزادی	Degree of freedom
دھاریدار پتی	Blade
دھاریدار کنارہ	Knife edge
دھجی	Strip
دھری	Axle
دو جوہری	Diatomic
دوریشی تعلیق	Bifilar suspension

گ

Radius of gyration گردشي نصف قطر

ل

Viscous لزج
Viscosity لزوجت
Colloidal لسوتقي
Logarithmic decrement لوکارثمي تنزل
Ripple لهر

م

Inclined spring مائل کمانی
Homogeneous متجانس
Isotropic متساوی السموت
Bladder مثانہ
Solid angle مجسم زاویہ
Gaurd rings محافظ حلقی
Solvent محلل
Solution محلول
Spiral مرغولہ
Compound pendulum مرکب رقاص
Centrifugal force مرکزگریز قوت
Torsion مروز
Torsional Hysteresis مروزی اختناق
Porous مسامدار
Deposit مطروحہ
Momentum معیارحرکت
Modulus of Elasticity معیار لچک
Scalar مقداري
Intercept مقطوعہ
Rarefied ملطف
Amalgamated ملغم

ر

Hodograph رسم الطریق
Stirrup رکاب
Fibre ریشہ

ز

Supersaturated زائد سیرشده
Stress زور

س

Simple harmonic ساده موسیقی
Surface Tension سطحی تناو
Vector سمتی
Filament سوت

ش

Capillary Tube شعري نلي
Emulsion شیره

ط

Volatile طیران پزیر

ع

Latitude عرض البلد
Lateral contraction عرضي سکڑاو

غ

Aeolotropic غیرمتساوی السموت

ف

Piston فشاره

ق

Damped Oscillation قسري اهتزاز
Forced vibration قسری ارتعاش
Crystal قلم
Potentiometer قوه [illegible]

ک

Perfect differential
Perfect gas

Solute	منحل
Zone	منطقہ
Beads	منکے
Effective	موثر
Thermal conductivity	موصلیت حرارت

ن

Entropy	ناکارگی
Theory of Relativity	نظریہ اضافیت
Kinetic theory	نظریہ تحرک
Diffusion	نفوذ
Permeability	نفوذ پزیری
Point of suspension	نقطہ تعلیق
Yield point	نقطہ مغلوبیت
Specific inductive capacity	نوعی امالی گنجائش
Semi permeable	نیم نفوذ پزیر

و

Medium	واسطہ
Receiver	وصول کنندہ
Osmosis	ولوج
Osmotic pressure	ولوجی دباو

ہ

Hyperbolae	ہزلولی
Meniscus	ہلالی سطح
Isothermal elasticity	ہم تپشی لچک

ی

Monatomic	یک جوہری